



# СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году  
Выходит 4 раза в год  
**Том 25, №3(91)**  
Июль - сентябрь 2022 г.

## ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

## СОДЕРЖАНИЕ

Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением .....	5
Дурдиев Д. К., Меражова Ш. Б. Обратная задача для двумерного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в цилиндрической области .....	14
<b>Иванов В. В.</b> Притягивающий предельный цикл модели нечётномерной кольцевой генной сети .....	25
• Имомназаров Б. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Худайназаров Б. Б. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении .....	33
Ковалёв М. Д. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике .....	41
Куликов И. М., Черных И. Г., Ульяничев И. С., Тутуков А. В. Математическое моделирование ядерного горения углерода в белых карликах с использованием 7-изотопной сети реакций .....	55
Купцова Е. В. Осциллятор Ван дер Поля под действием случайного шума .....	67
Лазарева Г. Г., Максимова А. Г. Численное моделирование распространения паров вольфрама над нагреваемой поверхностью .....	81
Мамажонов М., Шерматова Х. М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения .....	93
Минаков А. В., Лобасов А. С., Шебелев А. В., Зайцев Д. В., Кабов О. А. Режимы течения плёнки жидкости, увлекаемой потоком газа в плоском горизонтальном канале, в изотермических условиях .....	104
Митрофанов Г. М., Карчевский А. Л. Математическое моделирование для тонкослоистых упругих сред в сейсморазведке .....	120
Перцев Н. В., Топчий В. А., Логинов К. К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций .....	135
Романов В. Г., Бугуева Т. В. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения .....	154
Старовойтов В. Н., Старовойтова Б. Н. Усреднённая математическая модель периодической упругой структуры, насыщенной жидкостью Максвелла .....	170

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 517.994

## ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С РАВНОВЕСИЕМ ФАЗ ПО ДАВЛЕНИЮ В ДИССИПАТИВНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

© 2022 Б. Х. Имомназаров<sup>1</sup>, Ш. Х. Имомназаров<sup>2,3</sup>,  
М. М. Маматкулов<sup>4</sup>, Б. Б. Худайназаров<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,

<sup>2</sup>Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН,

просп. Акад. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,

<sup>3</sup>Институт геологии и минералогии им. В. С. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Коптюга, 3, г. Новосибирск 630090, Россия,

<sup>4</sup>Национальный университет Республики Узбекистан им. М. Улугбека,  
ул. Университетская, 4, г. Ташкент 100174, Узбекистан

E-mails: <sup>a</sup>bunyod@ngs.ru, <sup>b</sup>imom@omzg.ssc.ru, <sup>c</sup>MMamatqulov@nuz.uz,  
<sup>d</sup>BKhudainazarov@nuz.uz

Поступила в редакцию 12.01.2022 г.; после доработки 12.01.2022 г.;  
принята к публикации 22.06.2022 г.

Построено фундаментальное решение для описания трёхмерных стационарных течений вязких жидкостей двухскоростного континуума с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении.

**Ключевые слова:** двухскоростная гидродинамика, вязкая жидкость, фундаментальное решение, переопределённая система, коэффициент трения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.304

## ВВЕДЕНИЕ

Изучение физико-технических процессов в механике сплошных сред начинается с построения математической модели. Рассмотрение присутствия в верхних слоях мантии частичных расплавов приобрело важную роль в геофизической литературе. Предположение о формировании частичного расплава фазового перехода первого рода позволило В. Н. Доровскому объяснить локализацию в пространстве значительных масс такой субстанции в динамических условиях [1]. При этом эффектом объемной генерации магмы пренебрегли. Учёт генерации магмы в условиях сдвиговой деформации мантийных толщ была сделан в [2]. В этих работах сплошная среда в геологическом временном масштабе представляет собой вязкую жидкость-1 и за счёт собственной вязкости либо по другим причинам достигает необходимых термодинамических условий протекания фазового перехода. По границам зёрен и межзеренным узлам начинает скапливаться магма — жидкость-2 с вязкостью, присущей известным в геологии расплавам. Такой расплав включается в процесс совместного тепломассопереноса и фильтруется

сквозь систему, его породившую. Другими словами, эта теория представляет собой динамику тепломассопереноса взаимного проникновения одной менее вязкой жидкости сквозь более вязкую среду, как своеобразный процесс фильтрации. Или, по аналогии с уравнением Навье — Стокса, её можно называть двухскоростной системой уравнений Навье — Стокса либо уравнением двухскоростной гидродинамики.

Изучение течений вязких сжимаемых/несжимаемых жидкостей на основе решения полной системы уравнений двухскоростной гидродинамики представляется актуальным. В литературе известно очень ограниченное число случаев, допускающих аналитическое интегрирование уравнений Навье — Стокса [3–5]. Цель настоящей работы — построение фундаментальных решений для стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении обусловленными коэффициентами вязкости фаз и коэффициентом межкомпонентного трения. Эти формулы могут быть полезными для тестирования численных методов решения уравнений двухскоростной гидродинамики.

## 1. УРАВНЕНИЯ ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ОДНИМ ДАВЛЕНИЕМ

В работах [6, 7] на основе законов сохранения, инвариантности уравнений относительно преобразований Галилея и условия термодинамической согласованности построена нелинейная двухскоростная модель движения жидкости через деформируемую пористую среду. Двухскоростная двухжидкостная гидродинамическая теория с условием равновесия подсистем по давлению была построена в работе [2]. Уравнения движения двухскоростной среды в диссипативном случае с одним давлением для изотермического случая имеет вид [2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad (1)$$

$$\bar{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + (\nu/3 + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\tilde{\rho}}{2} \nabla (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 - b \tilde{\rho} \frac{\tilde{\rho}}{\rho} (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) + \bar{\rho} \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\tilde{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}}, \nabla) \tilde{\mathbf{v}} \right) = -\nabla p + \tilde{\nu} \Delta \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\nu}/3 + \tilde{\mu}) \nabla \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} - \frac{\rho}{2} \nabla (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 + b \tilde{\rho} (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) + \tilde{\rho} \mathbf{f}, \quad (3)$$

где  $\tilde{\mathbf{v}}$  и  $\mathbf{v}$  — векторы скоростей подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями  $\tilde{\rho}$  и  $\rho$ ;  $\nu$  ( $\mu$ ) и  $\tilde{\nu}$  ( $\tilde{\mu}$ ) — соответствующие сдвиговые (объёмные) вязкости;  $b = \chi \tilde{\rho}$ ,  $\chi$  — коэффициент межфазного трения;  $\bar{\rho} = \tilde{\rho} + \rho$  — общая плотность двухскоростного континуума;  $p = p(\bar{\rho}, (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2)$  — уравнение состояния двухскоростного континуума;  $\mathbf{f}$  — вектор массовой силы, отнесённой к единице массы.

Перепишем уравнения (2) и (3) в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(v^2) - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \right) = & -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \\ & + (\nu/3 + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\tilde{\rho}}{2} \nabla (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 - b \tilde{\rho} \frac{\tilde{\rho}}{\rho} (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) + \bar{\rho} \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\tilde{v}^2) - \tilde{\mathbf{v}} \times \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{v}} \right) = & -\nabla p + \tilde{\nu} \Delta \tilde{\mathbf{v}} \\ & + (\tilde{\nu}/3 + \tilde{\mu}) \nabla \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} - \frac{\rho}{2} \nabla (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 + b \tilde{\rho} (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) + \tilde{\rho} \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (5)$$

Из этих уравнений можно вывести другие, определяющие изменение вихрей с течением времени. Для этого применим к обеим частям уравнений (4), (5) оператор  $\text{rot}$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) = & -\text{rot}\left(\frac{\nabla p}{\bar{\rho}}\right) + \nu \Delta \boldsymbol{\Omega} \\ & + \text{rot}\left(\frac{\nu/3 + \mu}{\bar{\rho}} \nabla \text{div} \mathbf{v}\right) + \text{rot}\left(\frac{\tilde{\rho}}{2\bar{\rho}} \nabla(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2\right) - b\bar{\rho} \frac{\tilde{\rho}}{\rho} (\boldsymbol{\Omega} - \tilde{\boldsymbol{\Omega}}) + \text{rot} \mathbf{f}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial t} - \text{rot}(\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\boldsymbol{\Omega}}) = & -\text{rot}\left(\frac{\nabla p}{\bar{\rho}}\right) + \tilde{\nu} \Delta \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \\ & + \text{rot}\left(\frac{\tilde{\nu}/3 + \tilde{\mu}}{\bar{\rho}} \nabla \text{div} \tilde{\mathbf{v}}\right) - \text{rot}\left(\frac{\rho}{2\bar{\rho}} \nabla(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2\right) + b\bar{\rho} (\boldsymbol{\Omega} - \tilde{\boldsymbol{\Omega}}) + \text{rot} \mathbf{f}. \end{aligned}$$

## 2. ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

В отсутствие массовых сил  $\mathbf{f} = 0$  система уравнений (1)–(3) имеет решение  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{v}} = 0$ ,  $\rho = \rho^0$ ,  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^0$  для покоящейся смеси жидкостей с равномерным давлением  $p = p^0$ , парциальными плотностями  $\rho^0$ ,  $\tilde{\rho}^0$  и температурой  $T$  (см. [8]).

Линеаризуем уравнения (2), (3) относительно гидродинамического фона  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{v}} = 0$ ,  $\rho = \rho^0$ ,  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^0$ ,  $p = p^0$ , т. е.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}^1, \quad \rho = \rho^0 + \rho^1, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^0 + \tilde{\rho}^1, \quad p = p^0 + p^1.$$

Подставляя эти выражения в (1)–(3) и для сокращения записи, дальше вместо обозначения  $\mathbf{v}^1$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}^1$ ,  $\rho^1$ ,  $\tilde{\rho}^1$  будем использовать  $\mathbf{v}$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}$ ,  $\rho$ ,  $\tilde{\rho}$ . В результате получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^0 \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \tilde{\rho}^0 \text{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (6)$$

$$\bar{\rho}^0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + (\nu/3 + \mu) \nabla \text{div} \mathbf{v} - b\bar{\rho}^0 \frac{\tilde{\rho}^0}{\rho^0} (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) + \bar{\rho}^0 \mathbf{f}, \quad (7)$$

$$\bar{\rho}^0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} = -\nabla p + \tilde{\nu} \Delta \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\nu}/3 + \tilde{\mu}) \nabla \text{div} \tilde{\mathbf{v}} + b\bar{\rho}^0 (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) + \bar{\rho}^0 \mathbf{f}. \quad (8)$$

## 3. ЛИНЕЙНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯНСТВА ОБЪЁМНЫХ НАСЫЩЕННОСТЕЙ

В стационарном случае  $(\dot{\rho}, \dot{\tilde{\rho}}, \dot{\mathbf{v}}, \dot{\tilde{\mathbf{v}}}) = \mathbf{0}$  система уравнений (6)–(8) имеет вид [9, 10]

$$\text{div} \mathbf{v} = 0, \quad \text{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (9)$$

$$\nu \Delta \mathbf{v} = \nabla p + b\bar{\rho}^0 \frac{\tilde{\rho}^0}{\rho^0} (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) - \bar{\rho}^0 \mathbf{f}, \quad (10)$$

$$\tilde{\nu} \Delta \tilde{\mathbf{v}} = \nabla p - b\bar{\rho}^0 (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) - \bar{\rho}^0 \mathbf{f}. \quad (11)$$

Эта система является переопределённой системой уравнений в частных производных. Изучению краевых задач для таких переопределённых систем уравнений в частных производных посвящены работы [11–13]. В [12] доказано существование обобщённого решения системы

(9)–(11) в ограниченной области в бездиссипативном приближении с неоднородными граничными условиями.

Компоненты матриц  $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,  $\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , и вектора  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  с компонентами  $P_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , фундаментального решения системы (9)–(11) находятся из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\partial_m G_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \quad \partial_m \tilde{G}_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \quad (12)$$

$$\nu \Delta G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \partial_i P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - b \bar{\rho}^0 \frac{\bar{\rho}^0}{\rho^0} (G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (13)$$

$$\tilde{\nu} \Delta \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \partial_i P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + b \bar{\rho}^0 (G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (14)$$

где  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $\delta(\mathbf{r})$  —  $\delta$ -функция Дирака,  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . По повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до 3.

Обозначим через  $(\hat{\mathbf{v}}(\alpha), \hat{\tilde{\mathbf{v}}}(\alpha), \hat{p}(\alpha))$  преобразование Фурье от  $(\mathbf{v}(\mathbf{r}), \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}), p(\mathbf{r}))$ , а именно,

$$(\hat{\mathbf{v}}(\alpha), \hat{\tilde{\mathbf{v}}}(\alpha), \hat{p}(\alpha)) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{v}(\mathbf{r}), \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}), p(\mathbf{r})) e^{-i\alpha \mathbf{r}} d\mathbf{r}.$$

Умножим (12)–(14) на  $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$  и проинтегрируем по  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ , в результате получим

$$\alpha_m \hat{G}_{mj} = 0, \quad \alpha_m \hat{\tilde{G}}_{mj} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (15)$$

$$-\nu \alpha^2 \hat{G}_{mj} + i \alpha_m \hat{P}_j - b \bar{\rho}^0 \frac{\bar{\rho}^0}{\rho^0} (\hat{G}_{mj} - \hat{\tilde{G}}_{mj}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \delta_{mj}, \quad m, j = 1, 2, 3, \quad (16)$$

$$-\tilde{\nu} \alpha^2 \hat{\tilde{G}}_{mj} + i \alpha_m \hat{P}_j + b \bar{\rho}^0 (\hat{G}_{mj} - \hat{\tilde{G}}_{mj}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \delta_{mj}, \quad m, j = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Отсюда функции  $\hat{G}_{mj}$ ,  $\hat{\tilde{G}}_{mj}$ ,  $\hat{P}_j$  определяются единственным образом:

$$\hat{G}_{mj} = \frac{\tilde{\nu} \bar{\rho}^0}{(2\pi)^{3/2} (\nu \rho^0 + \tilde{\nu} \bar{\rho}^0)} \left( \frac{1/\tilde{\nu} - 1/\nu}{\alpha^2 + A^2} \delta_{mj} + \frac{1/\tilde{\nu} - 1/\nu}{A^2} \alpha_m \alpha_j \left[ \frac{1}{\alpha^2 + A^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right] - \frac{\bar{\rho}^0 / \bar{\rho}^0}{\tilde{\nu} \alpha^2} \left[ \delta_{mj} - \frac{\alpha_m \alpha_j}{\alpha^2} \right] \right),$$

$$\hat{\tilde{G}}_{mj} = -\frac{\nu \rho^0}{(2\pi)^{3/2} (\nu \rho^0 + \tilde{\nu} \bar{\rho}^0)} \left( \frac{1/\tilde{\nu} - 1/\nu}{\alpha^2 + A^2} \delta_{mj} + \frac{1/\tilde{\nu} - 1/\nu}{A^2} \alpha_m \alpha_j \left[ \frac{1}{\alpha^2 + A^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right] + \frac{\bar{\rho}^0 / \rho^0}{\nu \alpha^2} \left[ \delta_{mj} - \frac{\alpha_m \alpha_j}{\alpha^2} \right] \right),$$

$$\hat{P}_j = -\frac{i \alpha_j}{(2\pi)^{3/2} \alpha^2},$$

где  $A = \sqrt{b \bar{\rho}^0 \left( \frac{\bar{\rho}^0}{\rho^0} \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\tilde{\nu}} \right)}$ .

Обратное преобразование Фурье, формула (3.723) из [14] и формулы из [15]

$$\left( \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{8\pi} \right) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} (1, \alpha^{-2}, \alpha^{-4}) e^{i\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d\alpha$$

дают

$$G_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\tilde{\nu}\tilde{\rho}^0}{\nu\rho^0 + \tilde{\nu}\tilde{\rho}^0} \left( \frac{\nu - \tilde{\nu}}{4\pi\nu\tilde{\nu}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta_{mj} e^{-A|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\nu - \tilde{\nu}}{4\pi\nu\tilde{\nu}A^2} \partial_m \partial_j \frac{e^{-A|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - 1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\tilde{\rho}^0/\tilde{\rho}^0}{\tilde{\nu}} \left[ \frac{\delta_{mj}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \partial_m \partial_j \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{8\pi} \right] \right),$$

$$\tilde{G}_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\nu\rho^0}{\nu\rho^0 + \tilde{\nu}\tilde{\rho}^0} \left( \frac{\nu - \tilde{\nu}}{4\pi\nu\tilde{\nu}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta_{mj} e^{-A|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\nu - \tilde{\nu}}{4\pi\nu\tilde{\nu}A^2} \partial_m \partial_j \frac{e^{-A|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - 1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\tilde{\rho}^0/\rho^0}{\nu} \left[ \frac{\delta_{mj}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \partial_m \partial_j \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{8\pi} \right] \right),$$

$$P_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \partial_m \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Из этих выражений получим формулы Грина задачи (9)–(11) в виде

$$G_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\tilde{\nu}\tilde{\rho}^0}{\nu\rho^0 + \tilde{\nu}\tilde{\rho}^0} \left( \frac{\nu - \tilde{\nu}}{4\pi\nu\tilde{\nu}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta_{mj} e^{-A|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\nu - \tilde{\nu}}{4\pi\nu\tilde{\nu}A^2} \partial_m \partial_j \frac{e^{-A|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - 1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\tilde{\rho}^0/\tilde{\rho}^0}{8\pi\tilde{\nu}} \left[ \frac{\delta_{mj}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(x_m - x'_m)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \right), \quad (18)$$

$$\tilde{G}_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\nu\rho^0}{\nu\rho^0 + \tilde{\nu}\tilde{\rho}^0} \left( \frac{\nu - \tilde{\nu}}{4\pi\nu\tilde{\nu}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta_{mj} e^{-A|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\nu - \tilde{\nu}}{4\pi\nu\tilde{\nu}A^2} \partial_m \partial_j \frac{e^{-A|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - 1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\tilde{\rho}^0/\rho^0}{8\pi\nu} \left[ \frac{\delta_{mj}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(x_m - x'_m)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \right), \quad (19)$$

$$P_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{x_m - x'_m}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \quad (20)$$

Из этих формул и системы уравнений (12)–(14) видно, что по аргументу  $\mathbf{r}'$  функции  $G_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,  $\tilde{G}_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,  $P_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  удовлетворяют сопряжённой системе

$$\frac{\partial G_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x'_m} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{G}_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x'_m} = 0, \quad (21)$$

$$\nu \Delta_{\mathbf{r}'} G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{\partial P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x'_i} - b\tilde{\rho}^0 \frac{\tilde{\rho}^0}{\rho^0} (G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (22)$$

$$\tilde{\nu} \Delta_{\mathbf{r}'} \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{\partial P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x'_i} + b\tilde{\rho}^0 (G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (23)$$

Функции  $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,  $\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,  $P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  позволяют построить объёмные потенциалы

$$v_i(\mathbf{r}) = -\tilde{\rho}^0 \int d\mathbf{r}' G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}'),$$

$$\tilde{v}_i(\mathbf{r}) = -\tilde{\rho}^0 \int d\mathbf{r}' \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}'),$$

$$p(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{\rho}^0 \int d\mathbf{r}' P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_i(\mathbf{r}'),$$

которые в силу системы (12)–(14) удовлетворяют стационарной неоднородной системе уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением (9)–(11). Характер сингулярностей ядер  $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,  $\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  и  $P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  такой же, как и для сингулярного решения  $\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  уравнения Лапласа и его первых производных соответственно. Отсюда видно влияние физических плотностей, коэффициента межфазного трения, а также объемной насыщенности веществ, составляющего двухфазного континуума на решения системы уравнений (9)–(11).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для описания трёхмерных стационарных течений вязких жидкостей двухскоростного континуума в диссипативном приближении с равновесием фаз по давлению построено фундаментальное решение. Показано влияние физических плотностей фаз, объёмных насыщенностей веществ, коэффициента межфазного трения и вязкости составляющего двухфазного континуума на скорости течений и давления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Доровский В.Н. Образование диссипативных структур в процессе необратимой передачи импульса литосферы // Геология и геофизика. 1987. № 6. С. 108–117.
2. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика. 1989. № 9. С. 56–64.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
5. Drazin P., Riley N. The Navier–Stokes equations. A Classification of Flows and Exact Solutions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.
6. Доровский В.Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.
7. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // Прикл. математика и теор. физика. 1992. № 3. С. 94–105.
8. Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Маматкулов М.М., Черных Е.Г. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 4. С. 60–66.
9. Imomnazarov Kh.Kh., Korobov P.V., Zhabborov N.M. Conservation laws for the two-velocity hydrodynamics equations with one pressure // Bull. Novosibirsk Computing Center. Ser. Math. Modeling in Geophysics. 2013. № 16. P.35–44.
10. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х., Коробов П.В. Трёхмерные вихревые течения несжимаемых двухскоростных сред в случае постоянства объёмной насыщенности веществ // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2014. № 2. С. 15–23.
11. Гудович И.С., Крейн С.Г. О некоторых краевых задачах, эллиптических в подпространстве // Мат. сб. 1971. Т. 84(126), № 4. С. 595–606.
12. Урев М.В., Имомназаров Х.Х., Тан Ж. Краевая задача для одной переопределённой стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, № 4. С. 425–437.
13. Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Урев М.В., Бахрамов Р.Х. Решение одной переопределённой стационарной системы типа Стокса в полупространстве // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 4. С. 54–63.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963.
15. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

UDC 517.994

**THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE EQUATION  
IN DISSIPATIVE APPROXIMATION FOR THE STATIONARY  
TWO-VELOCITY HYDRODYNAMICS WITH PHASE EQUILIBRIUM  
PRESSURE**

© 2022 B. Kh. Imomnazarov<sup>1a</sup>, Sh. Kh. Imomnazarov<sup>2,3b</sup>,  
M. M. Mamatkulov<sup>4c</sup>, B. B. Khudainazarov<sup>4d</sup>

<sup>1</sup>*Novosibirsk State University,  
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia,*

<sup>2</sup>*Institute of Computational Mathematics  
and Mathematical Geophysics SB RAS,*

*pr. Akad. Lavrentyeva 6, Novosibirsk 630090, Russia,*

<sup>3</sup>*Sobolev Institute of Geology and Mineralogy SB RAS,  
pr. Acad. Koptiyuga 3, Novosibirsk 630090, Russia,*

<sup>4</sup>*Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan,  
University town, Tashkent 100174, Uzbekistan*

E-mails: <sup>a</sup>bunyod@ngs.ru, <sup>b</sup>imom@omzg.sgcc.ru, <sup>c</sup>MMamatkulov@nuz.uz,  
<sup>d</sup>BKhudainazarov@nuz.uz

Received 12.01.2022, revised 12.01.2022, accepted 22.06.2022

**Abstract.** The fundamental solution to describe the three-dimensional steady-state flows in dissipative approximation of viscous fluids two velocity continuum with phase equilibrium pressure has been constructed.

**Keywords:** two-velocity hydrodynamics, viscous fluid, a fundamental solution, the potentials of single and double layer.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.304

REFERENCES

1. Dorovsky V.N. Obrazovanie dissipativnykh struktur v protsesse neobratimoi peredachi impul'sa litosfery [Formation of dissipative structures in the process of irreversible momentum transfer of the Lithosphere]. *Geology and Geophysics*, 1987, No. 6, pp. 108–117 (in Russian).
2. Dorovsky V.N., Perepechko Yu.V. Teoriya chastichnogo plavleniya [Theory of the partial melting]. *Geology and Geophysics*, 1989, No. 9, pp. 56–64 (in Russian).
3. Loitsyanskiy L.G. Mechanics of Liquids and Gases. N. Y.: Begell House, 1995.
4. Schlichting G. Teoriya pogrannichnogo sloya [The theory of the boundary layer]. Moscow: Nauka, 1969 (in Russian).
5. Drazin P., Riley N. The Navier–Stokes equations. A Classification of Flows and Exact Solutions. Cambridge: Univ. Press, 2006.
6. Dorovsky V.N. Kontinual'naya teoriya fil'tratsii [Continual theory of filtration]. *Geology and Geophysics*, 1989, No. 7, pp. 34–39 (in Russian).
7. Dorovsky V.N., Perepechko Yu.V. Phenomenological description of two-velocity media with relaxing shear stresses. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1992, No. 3, pp. 403–409.

8. Imomnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh., Mamatkulov M.M., Chernykh E.G. Fundamental'noe reshenie dlya statsionarnogo uravneniya dvukhskorostnoi gidrodinamiki s odnim davleniem [The fundamental solution of the stationary two-velocity hydrodynamics equation with one pressure]. *Siber. Zhurn. Indust. Mat.*, 2014, Vol. 17, No. 4, pp. 60–66 (in Russian).
9. Imomnazarov Kh.Kh., Korobov P.V., Zhabborov N.M. Conservation laws for the two-velocity hydrodynamics equations with one pressure. *Bull. Novosibirsk Computing Center. Ser. Math. Model. Geophysics.*, 2013, No. 16, pp. 35–44.
10. Imomnazarov Kh.Kh., Korobov P.V., Zhabborov N.M. Three-dimensional vortex flows of two-velocity incompressible media in the case of constant volume saturation. *J. Math. Sci.*, 2015, Vol. 211, No. 6, pp. 760–766.
11. Gudovich I.S., Krein S.G. [Some boundary value problems elliptic in a subspace]. *Mat. Sbornik.*, 1971, Vol. 84, No. 4, pp. 595–606 (in Russian).
12. Urev M.V., Imomnazarov Kh.Kh., Tang J. A boundary value problem for an overdetermined steady system in two-velocity hydrodynamics. *Numer. Anal. Appl.*, 2017, Vol. 10, No. 4, pp. 347–357.
13. Imomnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh., Urev M.V., Baxromov R.Kh. Reshenie odnoi pereopredelennoi statsionarnoi sistemy tipa Stoksa v poluprostranstve [Solution of one overdetermined stationary Stokes-type system in a half-space]. *Sibir. Zhurn. Indust. Mat.*, 2021, Vol. 24, No. 4, P. 60–66 (in Russian).
14. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables of Integrals, Series and Products. Cambridge: Acad. Press, 2000.
15. Ladyzhenskaya O.A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. N. Y.: Gordon and Breach, 1969.