

# СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор В. Л. Береснев  
Зам. главного редактора А. Л. Карчевский  
Отв. секретарь В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году  
Выходит 4 раза в год  
**Том 25, №3(91)**  
Июль - сентябрь 2022 г.

## ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев  
Б. Д. Аннин  
В. С. Белоносов  
В. Н. Белых  
Ю. С. Волков  
В. П. Ильин  
С. И. Кабанихин  
А. Н. Карапетянц  
М. В. Клибанов  
С. С. Кутателадзе  
В. А. Левин  
Н. И. Макаренко  
С. Б. Медведев  
Р. Г. Новиков  
Д. Е. Пальчунов  
П. И. Плотников  
В. Г. Романов  
Е. М. Рудой  
В. М. Садовский  
Д. И. Свириденко  
А. С. Терсенов  
В. С. Тимофеев  
В. В. Шайдуров

## СОДЕРЖАНИЕ

Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением .....	5
Дурдиев Д. К., Меражова Ш. Б. Обратная задача для двумерного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в цилиндрической области .....	14
<b>Иванов В. В.</b> Притягивающий предельный цикл модели нечётномерной кольцевой генной сети .....	25
Имомназаров Б. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Худайназаров Б. Б. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении .....	33
• Ковалёв М. Д. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике .....	41
Куликов И. М., Черных И. Г., Ульяничев И. С., Тутуков А. В. Математическое моделирование ядерного горения углерода в белых карликах с использованием 7-изотопной сети реакций .....	55
Купцова Е. В. Осциллятор Ван дер Поля под действием случайного шума .....	67
Лазарева Г. Г., Максимова А. Г. Численное моделирование распространения паров вольфрама над нагреваемой поверхностью .....	81
Мамажонов М., Шерматова Х. М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения .....	93
Минаков А. В., Лобасов А. С., Шебелев А. В., Зайцев Д. В., Кабов О. А. Режимы течения плёнки жидкости, увлекаемой потоком газа в плоском горизонтальном канале, в изотермических условиях .....	104
Митрофанов Г. М., Карчевский А. Л. Математическое моделирование для тонкослоистых упругих сред в сейсморазведке .....	120
Перцев Н. В., Топчий В. А., Логинов К. К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций .....	135
Романов В. Г., Бугуева Т. В. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения .....	154
Старовойтов В. Н., Старовойтова Б. Н. Усреднённая математическая модель периодической упругой структуры, насыщенной жидкостью Максвелла .....	170

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 514.8:531.1:531.8

## О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА, ТЕОРЕМЕ КЕМПЕ И ПЕРЕЗРЕЛОЙ МАТЕМАТИКЕ

© 2022 М. Д. Ковалёв

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Ленинские горы, 1, г. Москва 119991, Россия*

E-mail: kovalev.math@mtu-net.ru

Поступила в редакцию 12.04.2022 г.; после доработки 20.04.2022 г.;  
принята к публикации 22.06.2022 г.

Приводится определение шарнирного механизма, учитывающее его кинематическую природу. Это определение существенно отличается от принятого рядом математиков в недавних работах. Если использовать не учитывающее кинематической подоплёки принятое ныне определение, то классический результат Кемпе о возможности черчения по частям произвольной плоской алгебраической кривой шарнирами подходящим образом выбранных плоских шарнирных механизмов нельзя считать достаточно обоснованным самим Кемпе. Что и было отмечено в современной литературе и даже привело к обвинениям Кемпе в ошибке. Предложенное развитие и современное обоснование результата Кемпе по существу представляет собой модификацию метода Кемпе построения нужного механизма из механизмов-кирпичиков, выполняющих алгебраические действия. Однако оно основано на использовании сложного языка алгебраической геометрии, что приводит к замене коротких и прозрачных рассуждений Кемпе на порядок более длинными и трудновоспринимаемыми текстами. При нашем определении шарнирного механизма можно дать строгую формулировку теоремы Кемпе, для доказательства которой достаточно аргументов Кемпе с минимальными уточнениями. Эти уточнения приведены в работе. Обсуждается современное развитие результата Кемпе и претензии к рассуждениям Кемпе. Также приведены общие мысли о математике, возникшие у автора в связи с теоремой Кемпе и её современным развитием.

**Ключевые слова:** шарнирные механизмы, алгебраические кривые, теорема Кемпе, конфигурационное пространство, перезрелая математика.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.305

### ВВЕДЕНИЕ

Здесь рассматриваются классические идеальные плоские шарнирные механизмы. Занимаясь ими, П. Л. Чебышёв не ощущал потребности в формализации самого понятия шарнирного механизма. Не ощущал её и А. Кемпе, описавший (1876) построение шарнирного механизма для черчения произвольной плоской алгебраической кривой [1]. Давид Гильберт в лекциях по наглядной геометрии [2] так определял шарнирный механизм: «Плоским шарнирным механизмом называется всякая плоская система жёстких стержней, частично соединённых между собой или скреплённых с неподвижными точками плоскости, вокруг которых они могут вращаться, так что вся система ещё сохраняет подвижность в её плоскости». Но является ли это математическим определением? Пользуясь этим определением, конечно, можно сказать, является ли данная конструкция механизмом. Но можно ли на его основе отличить один механизм от другого? Например, на рис. 1 изображён один механизм или два? Его нельзя назвать математическим определением в современном смысле. Математические определения шарнирного механизма появились лишь в конце прошлого века. Одно из них принадлежит автору [3–5] (1994), другое было выдвинуто в работах [6–8] (1998), посвящённых осмыслению результата Кемпе на современном языке. Это привело к принятию в работах [6–8], а вслед за ними

и другими математиками [9, 10] настолько общего математического определения шарнирного механизма, что оно даже не различает допускающих непрерывное движение конструкций от неизгибаемых (механизмов от ферм в инженерной терминологии). Такое игнорирование кинематической природы механизмов стало главной причиной недоразумений с результатом Кемпе.

В разд. 1 автор приводит своё определение шарнирного механизма. В его духе можно дать строгую формулировку теоремы Кемпе, для доказательства которой достаточно аргументов Кемпе с минимальными уточнениями, что и сделано в разд. 4. В разд. 2 воспроизведены оригинальные рассуждения Кемпе. В разд. 3 обсуждаются современные продвижения в направлении теоремы Кемпе и претензии к рассуждениям Кемпе. В заключении сделаны выводы и приведены мысли о математике, порождённые историей с результатом Кемпе.

## 1. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ

Здесь даны математические определения основных понятий теории плоских шарнирно рычажных конструкций, в частности шарнирного механизма и фермы. В основу положены геометрические и кинематические свойства. Исходным пунктом является то, что в механике чётко разделяются понятия идеальных механизма и фермы. Ферма — это конструкция, которую нельзя деформировать. Механизм же можно непрерывно переводить из одного его положения в любое другое. На языке геометрии это звучит так: ферма неизгибаема, а конфигурационное пространство механизма связно. Считаем рассматриваемые плоские шарнирно рычажные конструкции составленными из прямолинейных стержней (рычагов), несущих на концах шарниры (вращательные пары). Шарниры могут быть двух видов — свободные и закреплённые в плоскости (стойке). Первые мы обозначаем на рисунках кружочками, вторые — крестиками. Структуру конструкции задаём шарнирной структурной схемой (ШСС) — абстрактным связным графом  $G(V, E)$  без петель и кратных рёбер, вершины которого отвечают шарнирам, а рёбра — рычагам.

Напомним, что абстрактный граф представляет собой множество  $V$  вершин и совокупность  $E$  их неупорядоченных пар, называемых рёбрами. Связность графа означает существование для любых двух вершин цепи из его рёбер, соединяющей эти вершины. В нашей модели это удобнее, чем чаще принятое в теории механизмов сопоставление звеньям-рычагам вершин, а кинематическим парам — рёбер структурной схемы.

Множество  $V$  вершин графа распадается на два подмножества:  $V = V_1 \sqcup V_2$ , где  $V_1$  отвечает свободным шарнирам и  $V_2$  отвечает закреплённым шарнирам. Граф  $G(V, E)$  удовлетворяет условиям:

- 1) его подграф на множестве  $V_1$  свободных вершин связан,
- 2) в  $G(V, E)$  нет рёбер, соединяющих вершины из  $V_2$  между собой.

Последнее условие означает, что излишне связывать рычагами закреплённые в стойке шарниры. Условие 1 накладываем для того, чтобы сосредоточиться на изучении одной индивидуальной конструкции. Если оно не выполнено, то конструкция распадается на несколько кинематически не связанных одна с другой частей, которые можно изучать по отдельности.

Отметим, что в своих определениях [6, 7] отвлечённые математики (отвлечёнными автор называет математиков, не согласующих вводимую ими терминологию с терминологией, принятой в других науках) не накладывают на граф  $G(V, E)$  каких-либо ограничений, за исключением разве лишь отсутствия петель и конечности, что молчаливо предполагаем и мы. В частности, они не требуют связности  $G(V, E)$ .

Чтобы формализовать принятое в теории механизмов понятие кинематической схемы, нам придётся ввести несколько новых дополнительных понятий. Выберем в плоскости декартову прямоугольную систему координат  $Oxy$ . Закреплённой шарнирной схемой (ЗШС) назовём ШСС, каждой закреплённой вершине  $v_i \in V_2$  которой сопоставлена точка  $p_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$  —

положение закреплённого шарнира в плоскости. Пусть  $m$  — число свободных шарниров,  $r$  — число всех рычагов. Бросим свободные шарниры в плоскость, это определит отображение  $F: \mathcal{R}^r$ , задающееся формулами  $d_{ij} = (p_i - p_j)^2$ ,  $v_i v_j \in E$ . Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов и называется рычажным. Оно играет ключевую роль в геометрии шарнирных конструкций. Точки  $\{d_{ij}\} = \mathbf{d} \in \mathcal{R}^r$  назовём кинематическими шарнирными схемами (КШС). Это математический аналог понятия кинематической схемы. В теории механизмов кинематической схемой механизма называют его структурную схему с указанием размеров звеньев, необходимых для кинематического анализа механизма [11]. Для задания КШС необходимо, кроме структуры конструкции, задать положения закреплённых шарниров, а также длины всех рычагов. Шарнирником мы называем точку  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2m}$ . Ей отвечает либо шарнирная ферма, либо положение шарнирного механизма. (В русской литературе, по-видимому, нет соответствующего термина, но в английской имеется термин *framework*). Полный прообраз  $F^{-1}(\mathbf{d})$  точки КШС называем конфигурационным пространством КШС  $\mathbf{d}$ . При таком подходе каждой компоненте связности множества  $F^{-1}(\mathbf{d})$  отвечает определённое шарнирное устройство. Если компонента связности одноточечна, то это устройство представляет собой шарнирную ферму. В противном случае компонента связности есть множество положительной размерности — конфигурационное пространство  $K$  шарнирного механизма.

Одной КШС могут отвечать несколько шарнирных устройств как механизмов, так и ферм. Но каждое из устройств непрерывно не переводится в другое. Чтобы это сделать, необходимо разобрать устройство и пересобрать его по-другому. В теории механизмов это явление называют различными сборками шарнирного механизма [11]. На наш взгляд, этот термин неудачен, поскольку после пересобирания может получиться и ферма. Приведём соответствующий пример.

На рис. 1 изображены два шарнирных механизма (a) и (b) с одной и той же кинематической схемой. Механизмы состоят из четырёхзвенника  $p_4 p_1 p_2 p_5$ , к которому присоединена так называемая двуповодковая группа  $p_6 p_3 p_2$ . Если рычаг  $p_1 p_2$  достаточно короток, то четырёхзвенники, отличающиеся отражением относительно прямой  $p_4 p_5$ , нельзя непрерывно перевести один в другой.

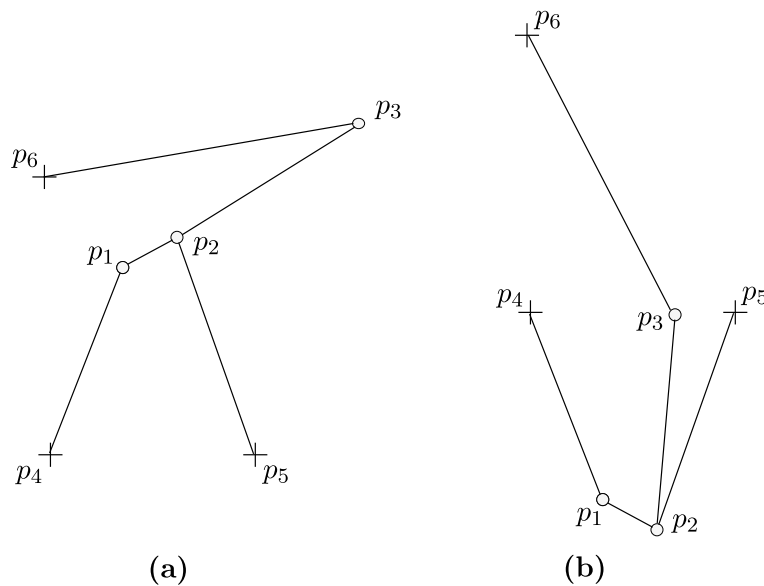


Рис. 1. Два шарнирных механизма (a) и (b) с одной и той же кинематической схемой

В терминологии машиноведов речь идёт о двух сборках шарнирного механизма. Однако, уменьшая длины рычагов  $p_2 p_3$  и  $p_3 p_6$ , можно добиться, чтобы сборка (b) стала фермой. Это

наступит, когда рычаги  $p_2p_3$  и  $p_3p_6$  окажутся на одной прямой и круг с центром  $p_6$  радиуса, равного сумме длин этих рычагов, будет иметь лишь одну общую точку с траекторией шарнира  $p_2$  четырёхзвенника. Эта траектория представляет собой дугу окружности радиуса  $|p_2p_5|$  с центром в точке  $p_5$ . Сборка (а) при этом останется механизмом. Разумно ли механизм и ферму называть разными сборками одного шарнирного механизма?

Наше геометрическое определение шарнирного механизма, отождествляющее его с его связным конфигурационным пространством, носит существенные черты идеализации. Скажем, при движении нашего геометрического механизма могут пересекаться его рычаги и совмещаться различные шарниры, что невозможно для реальных механизмов. Этого не всегда можно избежать, даже разнося рычаги реальной конструкции по различным параллельным плоскостям. Отметим также, что наша модель допускает так называемые совмещённые шарниры.

Заметим, что мы, как правило, пользуемся приведёнными ЗШС, т. е. такими, у которых различные закреплённые шарниры не совпадают как точки плоскости. Изучая движения шарнирного механизма, необходимо следить лишь за свободными шарнирами, подвижными в этом механизме. Если положение какого-либо свободного шарнира неизменно при всех движениях механизма, то этот свободный шарнир естественно причислить к закреплённым. Таким образом, изучая определённый механизм, также целесообразно перейти к его приведённым схемам. Приведённой для механизма  $K$  ШСС (ЗШС) назовём такую его ШСС (и ЗШС), для которой все свободные шарниры подвижны в механизме  $K$ . Приведённость накладывает определённые условия на ШСС. Например, поскольку в приведённой ЗШС плоского механизма закреплённые шарниры попарно не совпадают, то не может быть свободных шарниров, смежных более чем одному закреплённому. Именно приведёнными ЗШС и пользуются, анализируя шарнирные механизмы.

## 2. ТЕОРЕМА КЕМПЕ

После исследований Чебышева по приближённым прямым, положившим начало изучению приближений функций на множествах, и открытия инверсора Поселье [10], являющегося точным прямым, наиболее ярким достижением в теории шарнирных механизмов явилась работа А. Кемпе [1]. Поскольку в ней не было сформулировано никакой теоремы, то обычно её результат формулируют так [10].

**Теорема 1.** *Всякий достаточно малый кусок произвольной плоской алгебраической кривой представляет собой множество положений шарнира плоского шарнирного механизма.*

Так как рассуждения Кемпе весьма прозрачны и долго считались безупречными, воспроизведём их. Они заключаются в указании способа построения нужного механизма из простейших механизмов-кирпичиков, выполняющих определённые алгебраические действия.

**Доказательство.** Сначала перечислим эти механизмы-кирпичики.

Механизм сдвоенного антипараллелограмма — опрокидыватель (рис. 2). Механизм состоит из четырёхзвенника  $OACB$ , в котором закреплёны шарниры  $O$  и  $A$  и равны длины противоположных рычагов, два из которых ( $OB$  и  $AC$ ) пересекаются. Такой механизм называют антипараллелограммом, при его движении угол  $\theta$  меняется. К этому антипараллелограмму приделан меньший подобный ему антипараллелограмм  $OADE$ . Он откладывает от прямой  $OA$  углы, отличающиеся лишь знаком.

Механизм-умножитель. Он получается, если в первом антипараллелограмме предыдущего механизма закрепить шарниры  $O$  и  $B$ , а затем пристроить к нему нужное число антипараллелограммов, как показано на рис. 2. С его помощью можно получить угол  $\angle BOF = n\angle BOA$  для произвольного натурального  $n$ .

Механизм-накопитель. Чтобы получить сумму углов, нужно от луча  $OB$  (рис. 3) отложить складываемые углы  $\angle BOB'$  и  $\angle BOE'$  и соединить их штрихованным опрокидывателем,



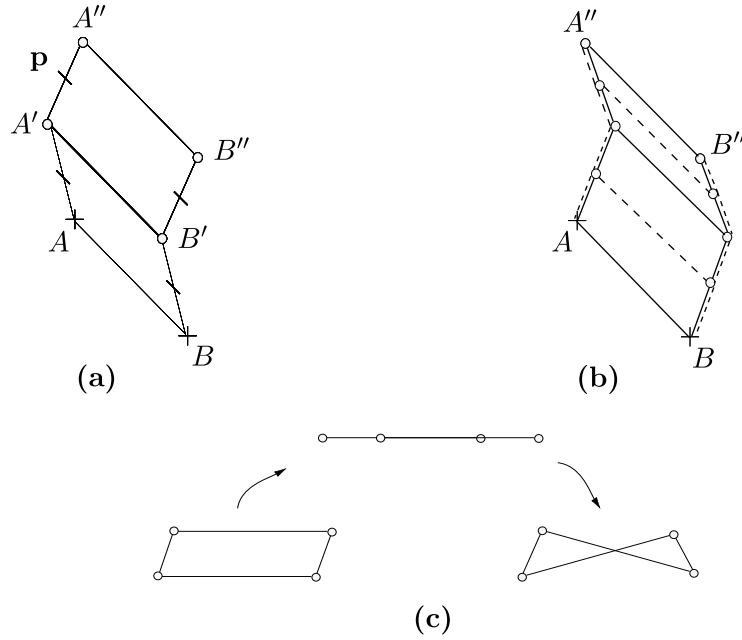


Рис. 4. Переносчик (b) с укреплёнными добавлениям штрихованных рычагов параллелограммами выполняет тот же перенос, что и переносчик (a), но в нём невозможен переход параллелограмма после распрямления в антипараллелограмм, как это показано на рисунке (c)

построим наш шарнирный механизм. Пусть  $\angle XOA = \theta$ ,  $\angle XOB = \varphi$ , и эти углы меняются при движении точки  $p$  по алгебраической кривой, заданной в нашей системе координат уравнением  $f(x, y) = \sum_{kl} A_{kl} x^k y^l = 0$ , где  $k, l$  — неотрицательные целые. Выпишем координаты точки  $p$ :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta + b \cos \varphi, \\ y &= a \cos(\theta - \pi/2) + b \cos(\varphi - \pi/2). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в уравнение кривой и, применяя формулу

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)],$$

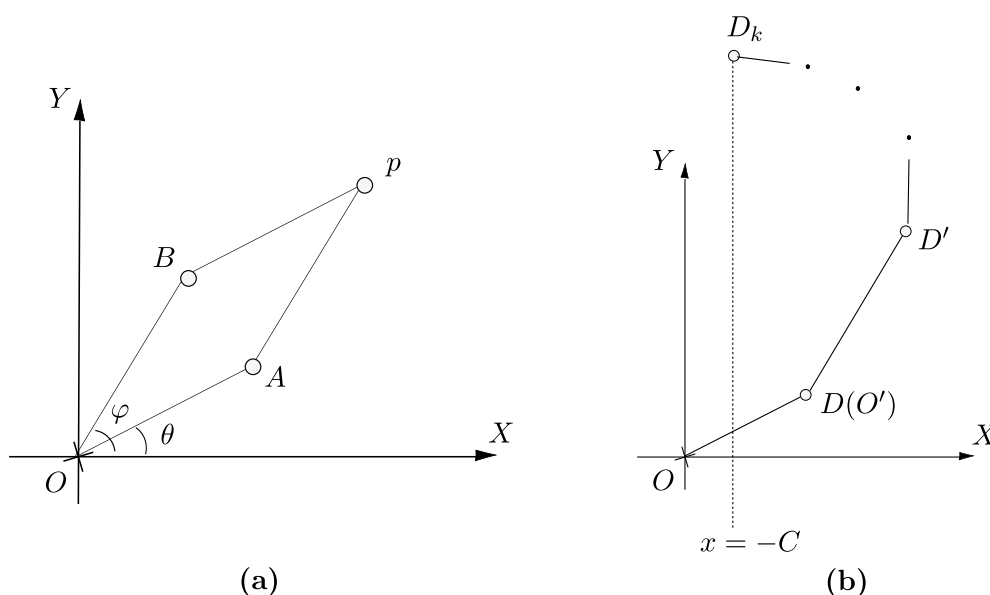
придём к уравнению вида

$$f(x, y) = \sum_{r,s} B_{rs} \cos(r\varphi + s\theta + \chi_{rs}) + C = 0, \quad (1)$$

где  $r, s$  — целые, не равные нулю одновременно,  $C$  — постоянная, зависящая от  $A_{kl}, a, b$ , а  $\chi_{rs}$  — постоянный угол. За счёт выбора этого угла можно считать коэффициенты  $B_{rs}$ , выражающиеся через  $A_{kl}, a, b$ , положительными.

С помощью механизмов накопителя и умножителя для каждого члена последней суммы можно построить такой рычаг  $OD_{rs}$ ,  $|OD_{rs}| = B_{rs}$ , что  $\angle XOD_{rs} = r\varphi + s\theta + \chi_{rs}$ . Составим теперь с помощью переносчика из рычагов  $O'D'_{rs}$  (представляющих собой параллельно перенесённые рычаги  $OD_{rs}$ ) цепь с конечным шарниром  $D_K$ , как показано на рис. 5(b). Абсцисса шарнира  $D_K$  равна

$$\sum_{r,s} B_{rs} \cos(r\varphi + s\theta + \chi_{rs}) = f(x, y) - C.$$

Рис. 5. Шарнирный параллелограмм (а), цепь с конечным шарниром  $D_K$  (б)

Точка  $p$  лежит на нашей кривой тогда и только тогда, когда  $f(x, y) = 0$ , а следовательно, тогда и только тогда, когда конечный шарнир  $D_K$  цепи лежит на вертикальной прямой  $x = -C$ . Остаётся посадить шарнир  $D_K$  на шарнир инверсора Поселье, совершающий прямолинейное движение по этой прямой, и мы получим механизм, шарнир которого, совпадающий с вершиной  $p$  ромба, движется по нашей алгебраической кривой. О прямолинейно направляющем механизме — инверсоре Поселье можно прочесть в книгах [2, 5, 10].  $\square$

### 3. РАЗВИТИЕ И КРИТИКА КЕМПЕ

Целый век считалось, что теорема 1 была доказана Альфредом Кемпе. Однако в конце 1970-х крупный американский математик У. Тёрстон в ряде выступлений обратил внимание на проблематику теоремы Кемпе [6]. Он сформулировал запоминающееся утверждение: существует шарнирный механизм, подделывающий вапцу подпись. У. Тёрстон ничего не опубликовал на эту тему, но его выступления подвигли других передоказать и развить работу А. Кемпе с использованием современного аппарата. Первой появилась работа начинающих математиков Д. Джордана и М. Стейнера [8] с доказательством, как они пишут, средствами лишь базовой математики, т. е. без гротендиковского формализма алгебраической геометрии мало понятного большинству математиков. (Д. Джордан и М. Стейнер, кстати, считали граф  $G(V, E)$  механизма связным.)

**Теорема А.** Для любого компактного алгебраического множества  $X \subset \mathbb{R}^k$  найдётся КИШС, некоторая компонента конфигурационного пространства которой гомеоморфна  $X$ .

Вслед вышла заформализованная в гротендиковском духе статья [6] (в списке работ на домашней странице Милсона <http://www.math.umd.edu/millson/publications.html> она приведена как «Universality theorems for linkages and arrangements». Topology. 1996. N 35. А приданная ссылка ведёт к рукописи статьи [6], препринт которой появился в архиве 23 марта 1998 г.) читавших препринт работы [8] и уже работавших в этом направлении Д. Милсона и М. Каповича, содержащая сходный результат. Авторы работы [8] благодарят М. Каповича и Д. Милсона за двукратное чтение препринта их статьи, первый раз — весной 1997 г.

Алгебраическим множеством называют множество общих нулей совокупности многочленов. Аналитический изоморфизм подмножеств евклидовых пространств есть гомеоморфизм,

осуществляемый сужениями аналитических (т. е. представимых по координатам локально сходящимися степенными рядами) отображений.

**Теорема В.** *Для любого компактного алгебраического множества  $X \subset \mathbb{R}^k$  найдётся КШС, конфигурационное пространство которой аналитически изоморфно набору непересекающихся копий  $X$ .*

**Следствие.** *Для любого связного гладкого компактного многообразия  $X$  найдётся шарнирный механизм, конфигурационное пространство которого гладко гомеоморфно многообразию  $X$ .*

М. Капович и Д. Милсон утверждали в [6], что, по их мнению, в предыдущих работах (в частности, в [8]) затруднения в теореме Кемпе были проигнорированы или неверно разрешены. Причём к этим затруднениям, кроме возможности ветвления конфигурационного пространства, они причислили и наличие симметрии конфигурационного пространства КШС ( $F^{-1}(\mathbf{d})$ ) в случае закрепления конструкции всего в двух точках  $a$  и  $b$ . Эта симметрия порождена возможностью отражения конструкции относительно прямой  $ab$ . О ней не приходится говорить, если мы называем конфигурационным пространством механизма не всё  $F^{-1}(\mathbf{d})$ , а лишь его часть. Также в [6] получена теорема, обосновывающая утверждение Тёрстона.

**Теорема С.** *Полиномиально параметризованная кривая  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  может быть прочерчена шарниром подходящим образом выбранного плоского шарнирного механизма.*

Поскольку любую непрерывную на отрезке  $[a, b]$  функцию можно сколь угодно точно приблизить многочленом, то утверждение Тёрстона о подписи сводится к этой теореме.

Почти одновременно с препринтом М. Каповича и Д. Милсона интенсивно консультировавший их в это время по вещественной алгебраической геометрии Г. Кинг выкладывает в архив три написанных без излишнего формализма статьи [7, 12, 13], передоказывающие, развивающие и распространяющие эти результаты на случай механизмов в  $\mathbb{R}^d$  при  $d > 2$ . Доказательства всех этих результатов используют идею Кемпе о построении «функционального» механизма из простейших, но применяется укрепление простейших механизмов и используется намного более громоздкая современная техника.

Претензии к Кемпе разберём по обстоятельной, с историческим экскурсом, часто цитируемой статье [6], в которой было заявлено о неустранимых простыми средствами пробелах в рассуждениях Кемпе. Её авторы утверждают, что «основное затруднение с доказательством Кемпе состоит в том, что оно хорошо работает лишь в определённых частях конфигурационного пространства, но вблизи определённых «вырожденных» положений конфигурационное пространство распадается на несколько компонент, и механизм перестаёт описывать нужную полиномиальную функцию». Это может произойти, если используемый в рассуждениях Кемпе антипараллелограмм в ходе движения распрямится и далее будет двигаться как параллелограмм (по-видимому, первыми заметили это авторы работы [14]). Или, наоборот, параллелограмм перейдёт в антипараллелограмм (рис. 4(с)).

Обычно приписывают Кемпе следующее кажущееся наиболее естественным утверждение [10]. Пусть  $\pi$  — проекция пространства  $\mathbb{R}^{2m}$  на плоскость положений шарнира  $p_j$ .

**Теорема 2.** *Для плоской алгебраической кривой  $A$  и точки  $p \in A$  найдутся КШС с конфигурационным пространством  $K \subset \mathbb{R}^{2m}$  и круговая окрестность  $U$  точки  $p$ , для замыкания которой  $\pi K \cap \bar{U} = A \cap \bar{U}$ .*

И указывают на недостаточность аргументов Кемпе для его доказательства. Причина в том, что в точку  $p$  могут проектироваться и далёкие от начального положения  $\mathbf{p}$  точки конфигурационного пространства  $K$  шарнирного механизма (рис. 6). То есть при большом движении механизм попадает в новое положение, в котором шарнир  $p_j$  опять оказывается в точке  $p$ . Усовершенствуя метод Кемпе, исключают такие возможности, получая доказательство этой теоремы. Авторы позднейших работ [15, 16] делают это без утомительной современной техники,

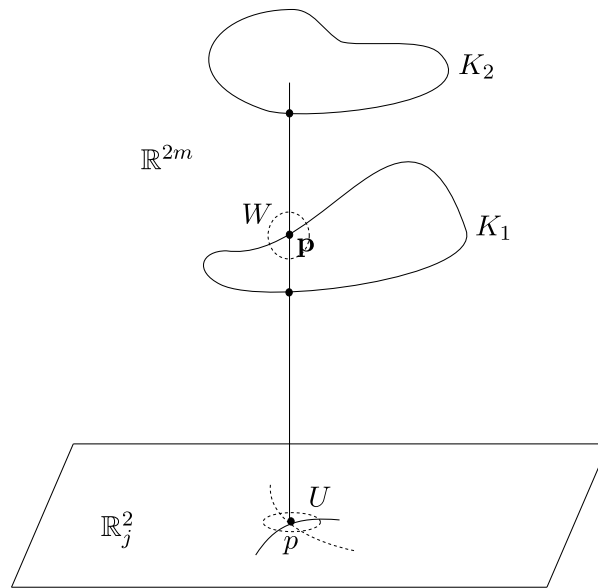


Рис. 6. Положению  $p$  шарнира  $p_j$  отвечают два положения шарнирного механизма  $K_1$  и одно положение механизма  $K_2$

лишь подправляя рассуждения Кемпе. Исправления заключаются в укреплении параллелограммов и антипараллелограммов добавлением дополнительных рычагов, препятствующих переходам параллелограмма в антипараллелограмм и наоборот. Для укрепления параллелограмма достаточно (рис. 4(a, b)) соединить рычагом шарниры, помещённые в середины его противоположных сторон. В результате получается КШС, конфигурационное пространство которой, возможно, состоит из нескольких компонент связности, но каждая компонента связности имеет нужную проекцию  $A \cap \bar{U}$ . Несколько компонент связности конфигурационного пространства появляется по следующей причине. Хотя, скажем, параллелограммы укреплённого переносчика (рис. 4(b)) не могут перейти в антипараллелограммы, и он всегда правильно выполняет перенос вектора, как правило, имеется два его положения, отвечающих одному положению перенесённого вектора.

После работы Каповича и Милсона стало общим местом указывать на некорректность (flawed) рассуждений Кемпе. Популяризаторы начали обвинять Кемпе в грубой ошибке. Мол, он не заметил, что параллелограмм распрямившись может перейти в антипараллелограмм. Автор считает эти утверждения слишком сильными и несправедливыми. Чего только не услышишь от некоторых популяризаторов. Один заявлял, что Кемпе дал ошибочное доказательство теоремы Тёрстона о подписи ([http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option\\_lang=rus&presentid=18251](http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=18251)).

#### 4. ГРУБАЯ ОШИБКА ИЛИ НЕДОЧЁТ?

Отталкиваясь от кинематического смысла и используя нашу формализацию, можно дать [5, 17] следующую точную формулировку сделанного Кемпе как теоремы «в малом».

**Теорема 1'** (Кемпе). Для плоской алгебраической кривой  $A$  и точки  $p \in A$  найдётся механизм с конфигурационным пространством  $K \subset \mathbb{R}^{2m}$  и такая круговая окрестность  $U \subset \mathbb{R}^2$  точки  $p$ , а также шаровая окрестность  $W \subset \mathbb{R}^{2m}$  точки  $\mathbf{p} \in K$ ,  $\pi \mathbf{p} = p$ , что для их замыканий  $\pi(K \cap \bar{W}) = A \cap \bar{U}$ .

Мы опираемся на следующее свойство алгебраической кривой  $A \subset \mathbb{R}^2$ : для любой точки  $p \in A$  найдётся такая её круговая окрестность  $U$ , что  $\bar{U} \cap A$  связно. Именно такую окрестность  $U$  мы и рассматриваем. Для доказательства теоремы достаточно удостовериться, что

при достаточно малых движениях механизма Кемпе ни один из входящих в него параллелограммов или антипараллелограммов не распрямится. Назовём это свойством Н. Механизмы опрокидывателя и умножителя, очевидно, обладают свойством Н для угла  $0 < \theta < \pi/4$ . Числа  $r$  и  $s$  в уравнении (1) по абсолютной величине не превосходят порядка  $N$  рисуемой кривой  $A$ . Выбрав начало координат  $O$  достаточно далеко от окрестности  $U$ , можно добиться для любой точки  $p \in \bar{U}$  выполнения неравенств  $0 < N\theta < \pi/4$  и  $0 < N\varphi < \pi/4$ . Это позволит нам построить с помощью двух умножителей и опрокидывателей все углы  $r\varphi$  и  $s\theta$ , входящие в аргументы косинусов уравнения (1), без каких-либо ветвлений и неоднозначности.

Недосмотр у Кемпе действительно есть! Затруднение может возникнуть при применении накопителя для построения суммы  $r\varphi + s\theta$ . Если случайно совпадут углы  $r\varphi$  и  $s\theta$ , то антипараллелограммы накопителя распрямятся и возникнет ветвление. Однако этой возможности легко избежать. Надо лишь так выбрать начало  $O$ , чтобы для любой точки  $p \in \bar{U}$  угол  $\theta$  был много меньше угла  $\varphi$ , например  $\varphi > N\theta$ . Несложно уяснить, что это возможно. Действительно, можно так нарисовать параллелограмм, чтобы для него выписанные неравенства выполнялись с запасом, скажем, в два раза. Тогда вследствие непрерывной зависимости углов от положения его вершины  $p$  найдётся её окрестность, в замыкании  $\bar{U}$  которой неравенства выполняются. Подобно увеличивая параллелограмм, можно сделать окрестность сколь угодно большой. Боковые стороны длины  $\rho$  параллелограммов механизма переносчика всегда можно взять достаточно длинными, чтобы для любой точки  $p \in \bar{U}$  переносчик обладал свойством Н. И, наконец, инверсор Поселье также можно взять столь большим, чтобы он удовлетворял свойству Н. В работе Пауэра [16] содержатся эти рассуждения и замечание, что Кемпе был ближе к доказательству «теоремы», чем ранее думали. Однако Пауэр почему-то настаивает на применении укрепленных параллелограммов в переносчиках. Не потому ли, что он принимает определение конфигурационного пространства шарнирного механизма как  $F^{-1}(\mathbf{d})$  и опасается противостоять общему мнению?

Эти уточнения не изменяют рассуждений теоремы 1 и строения получающегося в их результате механизма, а касаются лишь размеров его звеньев и расположения закреплённых шарниров. С ними первоначальные рассуждения Кемпе представляют собой полное доказательство теоремы 1'. Или, простыми словами, того, что произвольную ограниченную и связную часть алгебраической кривой можно без лишних точек вычертить шарниром шарнирного механизма при непрерывном движении механизма. Если эта часть кривой имеет точку ветвления, то чертящему шарниру придётся возвращаться в неё.

Схожий случай произошёл со знаменитой теоремой Коши (справедливее называть её теоремой Лежандра — Коши, о чём в книге [5]) об определённости выпуклого многогранника его гранями. В доказательстве Коши более чем через сто лет после опубликования обнаружили недочёт. Хотя его исправление оказалось более трудным, чем в нашем случае, но, насколько нам известно, никто не обвинял Коши в грубой ошибке или некорректном доказательстве. Наверное, потому, что содержащиеся в работе Коши прозрения перевешивают не так уж сложно исправимый недосмотр. То же можно сказать и о работе Кемпе.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ. О ПЕРЕЗРЕЛОЙ МАТЕМАТИКЕ

Напрашивается несколько критических замечаний относительно подхода отвлечённых математиков к исследованию геометрии шарнирных механизмов.

Неоправданное стремление к общности при введении структурного графа  $G(V, E)$  приводит к тому, что на него не накладывается естественных условий, например связности. Это приводит к таким утверждениям: если граф  $G(V, E)$  состоит из  $k$  компонент связности, то конфигурационное пространство соответствующей КИПС есть прямое произведение конфигурационных пространств  $k$  штук кинематических схем, отвечающих этим компонентам (теорема 1.3 работы [13]). Автор считает подобные теоремы ничего, кроме наукообразия, в исследование шарнирных механизмов не добавляющими.

Принятие определения конфигурационного пространства шарнирного механизма как полного прообраза  $F^{-1}(\mathbf{d})$  КШС  $\mathbf{d}$  при рычажном отображении противоречит кинематической природе механизмов. Хотя это и удобно с точки зрения математики, поскольку  $F^{-1}(\mathbf{d})$  — алгебраическое множество, тогда как его компонента связности — не всегда. При таком определении шарнирный механизм оказывается содержащим все устройства, отвечающие КШС  $\mathbf{d}$ . Среди них могут оказаться механизмы, непрерывно не переводимые друг в друга, а также фермы. Эти непрерывно не переводимые один в другой механизмы считаем разными механизмами, хотя и с одной и той же кинематической схемой  $\mathbf{d}$ . В задаче рисования кривой шарниром механизма рассматривать эти разные механизмы, как один, бессмысленно. Ибо мы не можем получить положений рисующего шарнира из другого механизма, не разобрав и пересобрав исходный механизм.

В работе [6] содержится ещё ряд претензий к рассуждениям Кемпе. А именно, в начале приведено целых три обстоятельства, по которым «методами Кемпе» нельзя получить доказательство теорем типа теоремы В. В конце работы [6] приведена предполагаемая формулировка «теоремы Кемпе», по-видимому, подобная теореме 2, но формулируемая более сложно и с включением технических моментов применяемого авторами аппарата. Она предполагает рассмотрение в качестве конфигурационного пространства механизма алгебраического подмножества  $C \subset F^{-1}(\mathbf{d})$  и требование к проекции  $C$  быть тривиальным накрытием. Авторы указывают на недостаточность аргументов Кемпе для её доказательства. Они молчаливо предполагают, что Кемпе допускал несвязность конфигурационного пространства механизма, как это делают они. Таким образом, эти претензии не имеют прямого отношения к теореме 1' Кемпе и обусловлены забвением кинематического смысла задачи. Их источником являются попытки истолковать сделанное Кемпе исходя из собственного нетрадиционного понимания шарнирных механизмов и применяемого аппарата, а не из существа задачи, решавшейся Кемпе.

Если позволить себе сравнение с растительной природой, то работы Кемпе, Коши, Чебышёва подобны созревающему плоду, таящему в себе энергию роста и развития. А некоторые современные пухлые, перегруженные техническими деталями, со спрятанными пружинами доказательств работы напоминают перезрелый плод на пороге распада.

Черты перезрелой математики:

1. Источник задач и вдохновения находится исключительно внутри математики.
2. Стремление к общности, воспринимаемое как самоцель.
3. Математика начинает выступать не как орудие исследования природы, а как некий божок, призванный предписывать ей законы.
4. Написание текста без учёта законов его восприятия. Единственный ориентир — скрупулёзность, определённая понятий, иной раз мнимая. Бросается в глаза неудобоваримость и заформализованность текста. Дж. Литлвуд [18] называл такой стиль вдохновлённым дьяволом.
5. Отсутствие стремления донести результаты своей деятельности до непосвящённых в секреты своей математической кухни. Некоторые пишут намеренно непонятно для посторонних. Даже если результаты могут иметь прикладной смысл, они изложены так, что необходим их перевод на более простой язык.
6. Снобизм. Желание считать недозрелую математику недоматематикой или даже нематематикой.

Классики Эйлер, Лагранж, Гаусс решая задачи разных наук олицетворяли единство науки своего времени. Не пренебрегавшие задачами физики Пуанкаре и Гильберт ратовали за единство математики и завещали его нам. Не грозит ли перезрелость математики утратой её единства и размножением схоластики?

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Kempe A.B.* On a general method of describing plane curves of the  $n^{th}$  degree by Linkwork // *Proc. London Math. Soc.* 1876. V. 7, N 102. P. 213–216.
2. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.
3. *Ковалёв М.Д.* Геометрическая теория шарнирных устройств // *Изв. РАН. Сер. математическая.* 1994. Т. 58, N 1. С. 45–70.
4. *Ковалёв М.Д.* Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем // *Вестн. МГТУ. Сер. Машиностроение.* 2001. № 4. С. 33–51.
5. *Ковалёв М.Д.* Геометрические вопросы кинематики и статики. М.: Ленанд, 2019.
6. *Karovich M., Millson J.J.* Universality theorems for configurations of planar linkages // *Topology.* 2002. V. 41, N 6. P. 1051–1107.
7. *King Henry C.* Planar linkages and algebraic sets. Preprint, 1998; [arXiv.org:math/9807023](https://arxiv.org/math/9807023)
8. *Jordan D., Steiner M.* Configuration spaces of mechanical linkages // *Discrete Comput. Geom.* 1999. V. 22. P. 297–315.
9. *Demain E., O'Rourke J.* Geometric Folding Algorithms. Linkages, Origami, Polyhedra. N. Y.: Cambridge Univ. Press, 2007.
10. *Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И.* Курс наглядной геометрии и топологии, М.: Ленанд, 2015.
11. *Левитский Н.И.* Теория механизмов и машин. Терминология. М.: Наука, 1984.
12. *King Henry C.* Semiconfiguration spaces of planar linkages; [arXiv.org:math/9810130](https://arxiv.org/math/9810130)
13. *King H.C.* Configuration spaces of linkages in  $\mathbb{R}^n$ . Preprint, 1998; [arXiv.org:math/9811138](https://arxiv.org/math/9811138)
14. *Hopcroft J., Joseph D., Whitesides S.* Movement problems for 2-dimensional linkages // *SIAM J. Comput.* 1984. V. 13. P. 610–629.
15. *Abbott T.* Generalizations of Kempe's Universality Theorem: MS Thesis. Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, 2008; URL: <http://web.mit.edu/tabbott/www/papers/mthesis.pdf>
16. *Power S.* Elementary proofs of Kempe universality; [arXiv:1511.09002v2](https://arxiv.org/1511.09002v2) [math.MG].
17. *Ковалёв М.Д.* Что такое шарнирный механизм? И что же доказал Кемпе? // *Итоги науки и техники.* М.: ВИНТИ, 2020. Т. 179. С. 16–28.
18. *Литлвуд Дж.Е.* Математическая смесь. М.: Наука, 1990.

UDC 514.8:531.1:531.8

**ON THE GEOMETRIC DEFINITION OF THE HINGE MECHANISM,  
KEMPE'S THEOREM AND OVERRIPE MATHEMATICS**

© 2022 M. D. Kovalev

*Lomonosov Moscow State University,  
Leninskie gory 1, Moscow 119991, Russia*

E-mail: kovalev.math@mtu-net.ru

Received 12.04.2022, revised 20.04.2022, accepted 22.06.2022

**Abstract.** The paper provides a definition of the hinge mechanism, taking into account its kinematic nature. This definition differs significantly from that adopted by a number of mathematicians in recent works. If we use the definition accepted today, which does not take into account the kinematic background, then the classical result of A. B. Kempe about the possibility of drawing by parts of an arbitrary plane algebraic curve with hinges of suitably chosen plane hinge mechanisms cannot be considered sufficiently substantiated by Kempe himself. This has been noted in the modern literature, and even led to accusations of Kempe in error. The development and modern substantiation of Kempe's result proposed in the works is, in essence, a modification of Kempe's method for constructing the required mechanism from brick mechanisms performing algebraic actions. However, it is based on the use of a complex language of modern algebraic geometry, which leads to the replacement of Kempe's short and transparent reasoning by an order of magnitude longer and difficult to understand texts. In our definition of the hinge mechanism, we can give a rigorous formulation of Kempe's theorem, for the proof of which Kempe's arguments with minimal refinements are sufficient. This updated proof is provided in the paper. The paper discusses the modern development of Kempe's result, and the claims against Kempe's reasoning. It also gives general ideas about mathematics that the author has in connection with the Kempe theorem and its modern development.

**Keywords:** hinge mechanisms, drawing algebraic curves, Kempe's theorem, configuration space, overripe mathematics.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.305

## REFERENCES

1. Kempe A.B. On a general method of describing plane curves of the  $n^{th}$  degree by Linkwork. *Proc. London Math. Soc.*, 1876, Vol. 7, No. 102, pp. 213–216.
2. Gil'bert D., Kon-Fossen S. Naglyadnaya geometriya [Visual Geometry]. Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).
3. Kovalev M.D. Geometricheskaya teoriya sharnirnykh ustroystv [Geometric theory of hinged devices]. *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 1994, Vol. 58, No. 1, pp. 45–70 (in Russian).
4. Kovalev M.D. Voprosy geometrii sharnirnykh ustroystv i skhem [Questions of geometry of hinge devices and schemes]. *Vestn. TSTU. Ser. Mech. Engrg.*, 2001, No. 4, pp. 33–51 (in Russian).
5. Ковалёв М.Д. Geometricheskie voprosy kinematiki i statiki [Geometric questions of kinematics and statics]. Moscow: Lenand, 2019 (in Russian).
6. Kapovich M., Millson J.J. Universality theorems for configurations of planar linkages. *Topology*, 2002, Vol. 41, No. 6, pp. 1051–1107.
7. King H.C. Planar linkages and algebraic sets. Preprint, 1998; arXiv.org:math/9807023

8. Jordan D., Steiner M. Configuration spaces of mechanical linkages. *Discrete Comput. Geom.*, 1999, Vol. 22, pp. 297–315.
9. Demain E., O’Rourke J. Geometric Folding Algorithms. Linkages, Origami, Polyhedra. N. Y.: Cambridge Univ. Press, 2007.
10. Oshemkov A.A., Popelenskii F.Yu., Tuzhilin A.A., Fomenko A.T., Shafarevich A.I. Kurs naglyadnoi geometrii i topologii [Course of visual geometry and topology]. 2015. Moscow: Lenand (in Russian).
11. Levitskii N.I. Teoriya mekhanizmov i mashin. Terminologiya. [Theory of mechanisms and machines. Terminology]. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
12. King H.C. Semiconfiguration Spaces of Planar Linkages; arXiv.org:math/9810130
13. King H.C. Configuration spaces of linkages in  $\mathbb{R}^n$ . Preprint, 1998; arXiv.org:math/9811138
14. Hopcroft J., Joseph D., Whitesides S. Movement problems for 2-dimensional linkages. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1984, Vol. 13, pp. 610–629.
15. Abbott T. Generalizations of Kempe’s Universality Theorem: MS Thesis. Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, 2008; URL: <http://web.mit.edu/tabbott/www/papers/mthesis.pdf>
16. Power S. Elementary proofs of Kempe universality; arXiv:1511.09002v2 [math.MG] 26 April 2017.
17. Kovalev M.D. Chto takoe sharnirnyi mekhanizm? I chto zhe dokazal Kempe? [What is a hinge mechanism? And what did Kempe prove?]. *Itogi Nauki i Tekhniki*. M.: VINITI, 2020, Vol. 179, pp. 16–28 (in Russian).
18. Littlewood J.E. Littlewood’s Miscellany. Cambridge: Univ. Press, 1986.