



СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор В. Л. Береснев
Зам. главного редактора А. Л. Карчевский
Отв. секретарь В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год
Том 25, №3(91)
Июль - сентябрь 2022 г.

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев
Б. Д. Аннин
В. С. Белоносов
В. Н. Белых
Ю. С. Волков
В. П. Ильин
С. И. Кабанихин
А. Н. Карапетянц
М. В. Клибанов
С. С. Кутателадзе
В. А. Левин
Н. И. Макаренко
С. Б. Медведев
Р. Г. Новиков
Д. Е. Пальчунов
П. И. Плотников
В. Г. Романов
Е. М. Рудой
В. М. Садовский
Д. И. Свириденко
А. С. Терсенов
В. С. Тимофеев
В. В. Шайдуров

СОДЕРЖАНИЕ

Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением	5
Дурдиев Д. К., Меражова Ш. Б. Обратная задача для двумерного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в цилиндрической области	14
Иванов В. В. Притягивающий предельный цикл модели нечётномерной кольцевой генной сети	25
Имомназаров Б. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Худайназаров Б. Б. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении	33
Ковалёв М. Д. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике	41
Куликов И. М., Черных И. Г., Ульяничев И. С., Тутуков А. В. Математическое моделирование ядерного горения углерода в белых карликах с использованием 7-изотопной сети реакций	55
• Купцова Е. В. Осциллятор Ван дер Поля под действием случайного шума	67
Лазарева Г. Г., Максимова А. Г. Численное моделирование распространения паров вольфрама над нагреваемой поверхностью	81
Мамажонов М., Шерматова Х. М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения	93
Минаков А. В., Лобасов А. С., Шебелев А. В., Зайцев Д. В., Кабов О. А. Режимы течения плёнки жидкости, увлекаемой потоком газа в плоском горизонтальном канале, в изотермических условиях	104
Митрофанов Г. М., Карчевский А. Л. Математическое моделирование для тонко-слоистых упругих сред в сейсморазведке	120
Перцев Н. В., Топчий В. А., Логинов К. К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций	135
Романов В. Г., Бугуева Т. В. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения	154
Старовойтов В. Н., Старовойтова Б. Н. Усреднённая математическая модель периодической упругой структуры, насыщенной жидкостью Максвелла	170

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 517.925:519.218

ОСЦИЛЛЯТОР ВАН ДЕР ПОЛЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
СЛУЧАЙНОГО ШУМА

© 2022 Е. В. Купцова

*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, г. Екатеринбург 620108, Россия*

E-mail: kkatjushav@gmail.com

Поступила в редакцию 01.06.2020 г.; после доработки 22.01.2022 г.;
принята к публикации 22.06.2022 г.

Для математической модели осциллятора в виде возмущённого случайным шумом дифференциального уравнения с малым параметром находятся первые приближения для математического ожидания и дисперсионной функции решения. Считается, что возмущения носят случайный характер, и не предполагается, что они порождены белым шумом. Получены условия резонанса математического ожидания решения при гармоническом среднем значении возмущающего случайного шума. Установлен новый факт: возрастание дисперсионной функции с возрастанием времени (дисперсионный резонанс), если не выполняются пять алгебраических равенств для моментных функций случайного возмущения.

Ключевые слова: электрический осциллятор, случайное возмущение, моментные функции, стохастическое дифференциальное уравнение, случайные колебания, резонанс, дисперсионный резонанс.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.307

Электрический колебательный контур используется для генерирования электрических волн и приёма электрических сигналов. Колебательный контур обстоятельно исследовал Б. Ван дер Поля [1, 2]. Математическая модель колебательного контура [3, с. 86; 4, с. 49; 5, с. 72; 6, с. 552; 7, с. 251]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt}$$

(t — время, x — искомая функция, μ — параметр) является нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка и не интегрируется в квадратурах. Б. Ван дер Поля разработал приближенный метод нахождения ограниченного решения уравнения. Этот метод был существенно усовершенствован и обобщён Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским для систем нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром [4, 5]. Разработанный ими метод усреднения позволяет доказывать существование и приближённо находить периодические и почти периодические решения систем дифференциальных уравнений и исследовать эти решения на устойчивость (без нахождения самих решений). Методы исследования ограниченных решений нелинейных обыкновенных систем дифференциальных уравнений с малым параметром изложены, например, в [3–5, 8, 9]. Возмущённый гармонической функцией осциллятор Ван дер Поля исследован, например, в работах [7, 9].

Реальный электрический генератор всегда подвержен влиянию различных факторов; свойства физических элементов зависят от температуры, силы протекающего тока, внешних электрических и магнитных полей и др. Эти изменения можно моделировать с привлечением теории случайных процессов. В. И. Тихонов [10, 11] получил формулы для математического ожидания решения скалярного линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, коэффициенты которого являются гауссовыми случайными

процессами. Дж. Адомиан [12] обобщил этот результат на случай произвольной правой части уравнения. Метод нахождения моментных функций решений линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами разработан В. Г. Задорожним [13]. Осциллятор Ван дер Поля, возмущённый белым шумом, рассматривали Ю. А. Митропольский, В. Г. Коломиец [5, с. 318]. Обстоятельный анализ возмущённого белым шумом осциллятора провёл Р. Л. Стратонович [14]. Численный анализ возмущённого осциллятора можно найти в работах [15–18]. В указанных работах и работах других авторов рассматриваются задачи при случайном возмущении белым шумом, осуществляется переход к полярной системе координат и находятся первые, иногда вторые моментные функции нулевого приближения.

Возмущённое белым шумом уравнение Ван дер Поля изучается в [19] с помощью специальных разложений в бесконечные ряды. Поведение решений уравнения Ван дер Поля при гармонических возмущениях и возмущениях белым шумом рассматривается [20]. Возникновению хаотического поведения осциллятора при случайных возмущениях белым шумом и изменении параметров осциллятора посвящена работа [21]. Отметим работу [22], посвящённую бифуркации ограниченных решений уравнения Ван дер Поля с запаздыванием по времени, возмущённого белым шумом.

Мы выясняем влияние первого приближения на математическое ожидание и вторую моментную функцию решения возмущённого осциллятора Ван дер Поля без предположения о том, что возмущение является белым шумом. Исследование сопряжено с громоздкими вычислениями, поэтому в конце статьи приведена сводка основных результатов.

1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТЕПЕННОГО РЯДА

Рассмотрим колебания напряжения в электрическом осцилляторе, подверженном влиянию случайного возмущения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + \mu\varepsilon(t), \quad (1)$$

где t — время, $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — искомая функция, μ — малый параметр, $\omega_0 > 0$ — заданное число, ε — случайный процесс. Будем находить условия, при которых уравнение имеет решение с ограниченным математическим ожиданием $E[x(t)]$.

Пусть $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \mu^k$. Подставим это выражение в уравнение (1), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^2x_k}{dt^2} \mu^k + \sum_{k=0}^{\infty} x_k \mu^k = \mu \left(1 - \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k \mu^k \right)^2 \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{dx_k}{dt} \mu^k + \mu\varepsilon(t).$$

В этом равенстве стоят ряды по степеням переменной μ , тогда коэффициенты при одинаковых степенях μ^k должны быть равны. Приравниваем коэффициенты при $k = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega_0^2 x_0 &= 0, \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 &= (1 - x_0^2) \frac{dx_0}{dt} + \varepsilon(t), \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 &= (1 - x_0^2) \frac{dx_1}{dt} - 2x_0 x_1 \frac{dx_0}{dt}. \end{aligned} \quad (2)$$

В этой системе уравнения имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (3)$$

где f — заданная непрерывная функция. В дальнейшем требуется формула общего решения этого уравнения.

Общее решение однородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$. Частное решение неоднородного уравнения находим методом вариации произвольных постоянных Лагранжа [23, с. 147]. Выписываем вспомогательную систему уравнений относительно искомых функций $\frac{dC_1}{dt}$, $\frac{dC_2}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} \cos \omega_0 t + \frac{dC_2}{dt} \sin \omega_0 t &= 0, \\ -\omega_0 \frac{dC_1}{dt} \sin \omega_0 t + \omega_0 \frac{dC_2}{dt} \cos \omega_0 t &= f(t). \end{aligned}$$

Находим решение этой системы:

$$C_1(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(s) \sin \omega_0 s \, ds, \quad C_2(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(s) \cos \omega_0 s \, ds.$$

Выпишем частное решение уравнения (3):

$$-\frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t f(s) \sin \omega_0 s \, ds + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t f(s) \cos \omega_0 s \, ds.$$

Общее решение уравнения (3) запишется в виде

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t - \frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t f(s) \sin \omega_0 s \, ds + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t f(s) \cos \omega_0 s \, ds. \quad (4)$$

2. НАХОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Второе уравнение в системе (2) имеет вид (3). При этом

$$f(t) = (-C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t)(1 - C_1^2 \cos^2 \omega_0 t - C_1 C_2 \sin 2\omega_0 t - C_2^2 \sin^2 \omega_0 t) + \varepsilon(t).$$

Используя формулу (4), выпишем общее решение второго уравнения системы (2) и вычислим математическое ожидание полученного результата. Пусть $E[x(t)]$ обозначает матема-

тическое ожидание случайного процесса $x(t)$ по функции распределения процесса $\varepsilon(t)$, тогда

$$\begin{aligned}
E[x_1(t)] &= C_3 \cos \omega_0 t + C_4 \sin \omega_0 t - \frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t [(-C_1 \omega_0 \sin \omega_0 s + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 s) \\
&\quad \times (1 - C_1^2 \cos^2 \omega_0 s - C_1 C_2 \sin 2\omega_0 s - C_2^2 \sin^2 \omega_0 s) + E[\varepsilon(s)]] \sin \omega_0 s ds \\
&\quad + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t [(-C_1 \omega_0 \sin \omega_0 s + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 s) \\
&\quad (1 - C_1^2 \cos^2 \omega_0 s - C_1 C_2 \sin 2\omega_0 s - C_2^2 \sin^2 \omega_0 s) + E[\varepsilon(s)]] \cos \omega_0 s ds \\
&= C_3 \cos \omega_0 t + C_4 \sin \omega_0 t - \frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t [(-C_1 \omega_0 \sin \omega_0 s + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 s) \\
&\quad - \omega_0 C_1 \sin \omega_0 s \left[-C_1^2 \frac{1 + \cos 2\omega_0 s}{2} - C_1 C_2 \sin 2\omega_0 s - C_2^2 \frac{1 - \cos 2\omega_0 s}{2} \right] + E[\varepsilon(s)]] \sin \omega_0 s ds \\
&\quad + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t \left[\omega_0 C_2 \cos \omega_0 s \left[-C_1^2 \frac{1 + \cos 2\omega_0 s}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - C_1 C_2 \sin 2\omega_0 s - C_2^2 \frac{1 - \cos 2\omega_0 s}{2} \right] + E[\varepsilon(s)] \right] \cos \omega_0 s ds,
\end{aligned}$$

где C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Будем считать, что $E[\varepsilon(t)]$ является почти периодической функцией [24]. Тогда под знаками интегралов стоят почти периодические функции. Хорошо известно [24, с. 397], что необходимым условием почти периодичности интеграла с переменным верхним пределом от почти периодической функции является равенство нулю среднего значения функции, т. е. условие

$$M(g(t)) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt = 0$$

для почти периодической функции g .

Отметим, что

$$\begin{aligned}
M(\sin^2 \omega_0 s) &= \frac{1}{2}, \quad M\left(\frac{1 - \cos^2 2\omega_0 s}{4}\right) = \frac{1}{8}, \\
M\left(\frac{1 - 2 \cos 2\omega_0 s + \cos^2 2\omega_0 s}{4}\right) &= \frac{3}{8}, \quad M\left(\frac{1 - \cos 2\omega_0 s}{2} \sin 2\omega_0 s\right) = 0.
\end{aligned}$$

Используя эти равенства, находим средние значения подынтегральных функций и приравниваем их нулям, получаем

$$-\frac{C_1 \omega_0}{2} + \frac{C_1^3 \omega_0}{8} + \frac{3C_1 C_2^2}{8} + M(E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{3C_1^2 C_2 \omega_0}{8} + \frac{3\omega_0 C_2^3}{8} + M(E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s) = 0. \quad (6)$$

Если C_1, C_2 удовлетворяют равенствам (5), (6), то среднее значение $E[x_1(t)]$ имеет вид

$$\begin{aligned}
E[x_1(t)] &= C_3 \cos \omega_0 t + C_4 \sin \omega_0 t - \frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t \left[\frac{C_1 \omega_0 \cos 2\omega_0 s}{2} + C_2 \omega_0 \sin 2\omega_0 s \right. \\
&\quad + C_1^3 \omega_0 \frac{\cos 4\omega_0 s}{8} + C_1^2 C_2 \omega_0 \frac{\sin 2\omega_0 s}{2} - C_1^2 C_2 \omega_0 \frac{\sin 4\omega_0 s}{4} - \omega_0 \frac{\cos 2\omega_0 s}{2} \\
&\quad \left. + C_1 C_2^2 \omega_0 \frac{\cos 4\omega_0 s}{8} + E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s - M(E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s) \right] ds \\
&\quad + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t \left[-\frac{C_2 C_1^2 \omega_0 \cos 2\omega_0 s}{2} - \frac{C_2 C_1^2 \omega_0 \cos 4\omega_0 s}{8} - \frac{C_1 C_2^2 \sin 2\omega_0 s}{2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{C_1 C_2^2 \omega_0 \sin 4\omega_0 s}{4} + \frac{C_2^3 \omega_0 \cos 4\omega_0 s}{8} + E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s - M(E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s) \right] ds \\
&= C_3 \cos \omega_0 t + C_4 \sin \omega_0 t - \cos \omega_0 t \left[\frac{C_1 \sin 2\omega_0 s}{4\omega_0} - \frac{C_2 \cos 2\omega_0 s}{2\omega_0} + \frac{C_1^3 \sin 4\omega_0 s}{32\omega_0} \right. \\
&\quad \left. - \frac{C_1^2 C_2 \cos 2\omega_0 s}{4\omega_0} + \frac{C_1^2 C_2 \cos 4\omega_0 s}{16\omega_0} - \frac{C_1 C_2^2 \sin 2\omega_0 s}{4\omega_0} + \frac{C_1 C_2^2 \sin 4\omega_0 s}{32\omega_0} \right] \Big|_0^t \\
&\quad - \cos \omega_0 t \int_0^t (E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s - M(E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s)) ds \\
&\quad + \sin \omega_0 t \left[-\frac{C_2 C_1^2 \sin 2\omega_0 s}{4\omega_0} - \frac{C_2 C_1^2 \sin 4\omega_0 s}{32\omega_0} + \frac{C_1 C_2^2 \cos 2\omega_0 s}{4\omega_0} + \frac{C_1 C_2^2 \cos 4\omega_0 s}{16\omega_0} \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_2^3 \sin 4\omega_0 s}{32\omega_0} \right] \Big|_0^t + \sin \omega_0 t \int_0^t (E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s - M(E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s)) ds \\
&= B(t) - \cos \omega_0 t \int_0^t (E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s - M(E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s)) ds \\
&\quad + \sin \omega_0 t \int_0^t (E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s - M(E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s)) ds,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
B(t) &= C_3 \cos \omega_0 t + C_4 \sin \omega_0 t - \cos \omega_0 t \left[\frac{C_1 \sin 2\omega_0 t}{4\omega_0} - \frac{C_2 (\cos 2\omega_0 t - 1)}{2\omega_0} + \frac{C_1^3 \sin 4\omega_0 t}{32\omega_0} \right. \\
&\quad \left. - \frac{C_1^2 C_2 (\cos 2\omega_0 t - 1)}{4\omega_0} + \frac{C_1^2 C_2 (\cos 4\omega_0 t - 1)}{16\omega_0} - \frac{C_1 C_2^2 \sin 2\omega_0 t}{4\omega_0} + \frac{C_1 C_2^2 \sin 4\omega_0 t}{32\omega_0} \right] \\
&\quad + \sin \omega_0 t \left[-\frac{C_1^2 C_2 \sin 2\omega_0 t}{4\omega_0} - \frac{C_1^2 C_2 \sin 4\omega_0 t}{32\omega_0} + \frac{C_1 C_2^2 (\cos 2\omega_0 t - 1)}{4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_1 C_2^2 (\cos 4\omega_0 t - 1)}{16\omega_0} + \frac{C_2^3 \sin 4\omega_0 t}{32\omega_0} \right]. \quad (7)
\end{aligned}$$

Отметим, что при почти периодической функции $E[\varepsilon(t)]$ и ограниченности интегралов в формуле (7) $E[x_1(t)]$ является почти периодической функцией.

3. ГАРМОНИЧЕСКОЕ В СРЕДНЕМ ВОЗМУЩЕНИЕ

Рассмотрим вариант задачи при условии, что математическое ожидание возмущения является гармонической функцией $E[\varepsilon(t)] = K \cos \lambda t$, где $K > 0$ и λ — действительное число. При этом возможны два варианта.

1. Нерезонансный случай $\lambda \neq \pm\omega_0$. Тогда

$$M(E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s) = 0, M(E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s) = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_0^t (E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s - M(E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s)) ds &= K \int_0^t \cos \lambda s \cos \omega_0 s ds \\ &= \frac{K}{2} \int_0^t (\cos(\lambda - \omega_0)s + \cos(\lambda + \omega_0)s) ds = \frac{K}{2(\lambda - \omega_0)} \sin(\lambda - \omega_0)t + \frac{K}{2(\lambda + \omega_0)} \sin(\lambda + \omega_0)t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t (E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s - M(E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s)) ds &= K \int_0^t \cos \lambda s \sin \omega_0 s ds \\ &= \frac{K}{2} \int_0^t (\sin(\omega_0 - \lambda)s + \sin(\omega_0 + \lambda)s) ds \\ &= \frac{K}{2(\omega_0 - \lambda)} (-\cos(\omega_0 - \lambda)t + 1) + \frac{K}{2(\omega_0 + \lambda)} (-\cos(\omega_0 + \lambda)t + 1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E[x_1(t)] &= B(t) - \cos \omega_0 t \left(\frac{K}{2(\lambda - \omega_0)} \sin(\lambda - \omega_0)t + \frac{K}{2(\lambda + \omega_0)} \sin(\lambda + \omega_0)t \right) \\ &\quad + \sin \omega_0 t \left(\frac{K}{2(\omega_0 - \lambda)} (-\cos(\omega_0 - \lambda)t + 1) + \frac{K}{2(\omega_0 + \lambda)} (-\cos(\omega_0 + \lambda)t + 1) \right) \quad (8) \end{aligned}$$

является почти периодической функцией.

2. Резонансный случай $\lambda = \omega_0$. При этом

$$\begin{aligned} M(E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s) &= M(K \cos^2 \omega_0 s) = \frac{K}{2} M(1 + \cos 2\omega_0 s) = \frac{K}{2}, \\ M(E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s) &= M(K \cos \omega_0 s \sin \omega_0 s) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t (E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s - M(E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s)) ds &= \int_0^t \left(K \cos^2 \omega_0 s - \frac{K}{2} \cos \omega_0 s \right) ds \\ &= \frac{K}{2} \int_0^t (1 + \cos 2\omega_0 s - \cos \omega_0 s) ds = \frac{K}{2} \left(t + \frac{\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0} - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t (E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s - M(E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s)) ds \\
&= \int_0^t K \cos \omega_0 s \sin \omega_0 s ds = \frac{K}{2} \int_0^t \sin 2\omega_0 s ds = \frac{K}{4\omega_0} (-\cos 2\omega_0 t + 1).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$E[x_1(t)] = B(t) - \cos \omega_0 t \frac{K}{2} \left(t + \frac{\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0} - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right) + \frac{K \sin \omega_0 t}{4\omega_0} (-\cos 2\omega_0 t + 1) \quad (9)$$

и возрастает с ростом t .

4. ДИСПЕРСИОННАЯ ФУНКЦИЯ

Выясним, какое влияние оказывает случайное возмущение на дисперсионную функцию $D[x(t)]$ решения уравнения (1). Запишем $x(t)$ в виде $x(t) = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + o(\mu^2)$, тогда

$$\begin{aligned}
D[x(t)] &= E[x^2(t)] - E^2[x(t)] = E[x_0^2] + 2\mu x_0 E[x_1] + 2\mu^2 x_0 E[x_2] + \mu^2 E[x_1^2] \\
&\quad - E^2[x_0] - 2\mu E[x_0 x_1] - 2\mu^2 x_0 E[x_2] - \mu^2 E^2[x_1] + o(\mu^2) \\
&\quad + \mu^2 (E[x_1^2] - E^2[x_1]) + o(\mu^2) = \mu^2 D[x_1(t)] + o(\mu^2).
\end{aligned}$$

Следовательно, при ограниченной дисперсионной функции $D[x_1(t)]$ дисперсионная функция $D[x(t)]$ является бесконечно малой второго порядка.

Выясним, при каких условиях функция $D[x_1(t)]$ ограничена. Решение $x_1(t)$ имеет вид

$$x_1(t) = A(t) - \frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t \varepsilon(s) \sin \omega_0 s ds + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t \varepsilon(s) \cos \omega_0 s ds,$$

где

$$\begin{aligned}
A(t) &= C_3 \sin \omega_0 t + C_4 \cos \omega_0 t \\
&\quad - \frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t \frac{dx_0}{ds} (1 - x_0^2) \sin \omega_0 s ds + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t \frac{dx_0}{ds} (1 - x_0^2) \cos \omega_0 s ds
\end{aligned}$$

— детерминированная функция. При этом

$$\begin{aligned}
E[x_1^2(t)] &= A^2(t) - \frac{2A(t) \cos \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s ds - \frac{2A(t) \sin \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s ds \\
&\quad + \frac{\cos^2 \omega_0 t}{\omega_0^2} E \left[\int_0^t \int_0^t \varepsilon(s_1) \varepsilon(s_2) \sin \omega_0 s_1 \sin \omega_0 s_2 ds_1 ds_2 \right] \\
&\quad - \frac{\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0^2} E \left[\int_0^t \int_0^t \varepsilon(s_1) \varepsilon(s_2) \sin \omega_0 s_1 \cos \omega_0 s_2 ds_1 ds_2 \right] \\
&\quad + \frac{\sin^2 \omega_0 t}{\omega_0^2} E \left[\int_0^t \int_0^t \varepsilon(s_1) \varepsilon(s_2) \cos \omega_0 s_1 \cos \omega_0 s_2 ds_1 ds_2 \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, для ограниченности $E[x_1^2(t)]$ (следовательно, и для ограниченности $D[x(t)]$) необходимо выполнение условий: средние значения функций

$$\begin{aligned} E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s, \quad E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s, \quad E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)] \sin \omega_0 s_1 \sin \omega_0 s_2, \\ E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)] \sin \omega_0 s_1 \cos \omega_0 s_2, \quad E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)] \cos \omega_0 s_1 \cos \omega_0 s_2 \end{aligned}$$

должны быть равны нулю.

Пример. Пусть

$$\begin{aligned} E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)] &= a \cos^2 \lambda(s_1 - s_2) \\ &= \frac{a}{2}(1 + \cos 2\lambda(s_1 - s_2)) = \frac{a}{2}(1 + \cos 2\lambda s_1 \cos 2\lambda s_2 + \sin 2\lambda s_1 \sin 2\lambda s_2), \end{aligned}$$

$a > 0$, $0 \neq \lambda \neq \omega_0/2$. Тогда

$$\begin{aligned} M(E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)] \sin \omega_0 s_1 \sin \omega_0 s_2) \\ = \frac{a}{2} M((1 + \cos 2\lambda s_1 \cos 2\lambda s_2 + \sin 2\lambda s_1 \sin 2\lambda s_2) \sin \omega_0 s_1 \sin \omega_0 s_2) = 0. \end{aligned}$$

Точно так же находим

$$M(E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)] \sin \omega_0 s_1 \cos \omega_0 s_2) = M(E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)] \cos \omega_0 s_1 \cos \omega_0 s_2) = 0.$$

Следовательно, необходимые условия ограниченности дисперсионной функции $D[x(t)]$ выполняются.

Пусть теперь $0 \neq \lambda = \omega_0/2$. Тогда

$$\begin{aligned} M(E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)] \sin \omega_0 s_1 \sin \omega_0 s_2) &= \frac{a}{2} M(\sin^2 \omega_0 s_1 \sin^2 \omega_0 s_2) \\ &= \frac{a}{8} M((1 - \cos 2\omega_0 s_1)(1 - \cos 2\omega_0 s_2)) = \frac{5a}{8} \neq 0. \end{aligned}$$

При этом дисперсионная функция $D[x(t)]$ неограниченно возрастает при возрастании t .

Таким образом, рост амплитуды колебаний дисперсии связан со свойствами вторых моментных функций возмущения ε . Это явление будем называть дисперсионным резонансом.

5. ЖЁСТКОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

Рассмотрим осциллятор с жёстким возмущением

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + \varepsilon(t). \quad (10)$$

Подставляя разложение x по степеням μ в уравнение (10) и приравнявая коэффициенты при μ^0 , μ^1 , μ^2 , получаем

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + \omega_0^2 x_0 = \varepsilon(t), \quad (11)$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = (1 - x_0^2) \frac{dx_0}{dt}, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 = (1 - x_0^2) \frac{dx_1}{dt} - 2x_0 x_1 \frac{dx_0}{dt}. \quad (13)$$

Общее решение уравнения (11) находим по формуле (4):

$$x_0(t) = \varphi(t) - \frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t \varepsilon(s) \sin \omega_0 s ds + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t \varepsilon(s) \cos \omega_0 s ds,$$

где $\varphi(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$. При этом

$$E[x_0(t)] = \varphi(t) - \frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s ds + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s ds. \quad (14)$$

Для ограниченности $E[x_0(t)]$ необходимо, чтобы выполнялись условия

$$M(E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s) = M(E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s) = 0.$$

Если $M(E[\varepsilon(s)])$ почти периодическая функция и интегралы в (14) ограничены, то $E[x_0(t)]$ является почти периодической функцией.

6. ГАРМОНИЧЕСКОЕ В СРЕДНЕМ ВОЗМУЩЕНИЕ

Пусть $E[\varepsilon(t)] = K \cos \lambda t$ и $0 \neq \lambda \neq \pm \omega_0$, тогда

$$\begin{aligned} E[x_0(t)] = \varphi(t) + \frac{K \cos \omega_0 t}{2\omega_0(\omega_0 - \lambda)}(1 - \cos(\omega_0 - \lambda)t) - \frac{K \cos \omega_0 t}{2\omega_0(\omega_0 + \lambda)}(\cos(\omega_0 + \lambda)t - 1) \\ + \frac{K \sin \omega_0 t}{2\omega_0(\lambda - \omega_0)} \sin(\lambda - \omega_0)t + \frac{K \sin \omega_0 t}{2\omega_0(\lambda + \omega_0)} \sin(\lambda + \omega_0)t \end{aligned}$$

является почти периодической функцией.

Пусть $\lambda = \omega_0$, тогда

$$E[x_0(t)] = \varphi(t) + \frac{K \sin \omega_0 t}{2\omega_0} \left(t + \frac{\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0} - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right) - \frac{K \cos \omega_0 t}{4\omega_0} (1 - \cos 2\omega_0 t)$$

неограниченно возрастает при $t \rightarrow +\infty$.

Аналогично находим математическое ожидание $E[x_1(t)]$ решения уравнения (12):

$$\begin{aligned} E[x_1(t)] = C_3 \cos \omega_0 t + C_4 \sin \omega_0 t - \frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t E \left[(1 - x_0^2(s)) \frac{dx_0(s)}{dt} \right] \sin \omega_0 s ds \\ + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \int_0^t E \left[(1 - x_0^2(s)) \frac{dx_0(s)}{dt} \right] \cos \omega_0 s ds. \end{aligned}$$

Учитывая вид функции $x_0(t)$, можно сделать вывод, что $E[x_1(t)]$ зависит от первых трёх моментных функций случайного процесса ε . Для нахождения $E[x_1(t)]$ приходится вычислить 37 слагаемых. Для ограниченности $E[x_1(t)]$ требуется равенство нулю средних значений подынтегральных выражений.

Формула для $E[x_2(t)]$ имеет более громоздкий вид и поэтому не приводится.

7. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведём формулировки основных утверждений в виде теорем. Рассматривается осциллятор (1), возмущённый случайным процессом $\varepsilon(t)$. Традиционно исследуются два варианта: мягкое возмущение (возмущение пропорционально малому параметру) и жёсткое возмущение. Мы рассматриваем возмущение с почти периодическим средним значением $E[\varepsilon(t)]$ (частный случай — среднее значение гармоническая функция $K \cos \lambda t$).

Теорема 1. При мягком возмущении процесс описывается уравнением (1), и приближение математического ожидания решения имеет вид

$$\begin{aligned} E[x(t)] = & C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \mu(B(t) \\ & - \cos \omega_0 t \int_0^t (E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s - M(E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s)) ds \\ & + \sin \omega_0 t \int_0^t (E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s - M(E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s)) ds) + o(\mu^2), \end{aligned}$$

где C_1, C_2 удовлетворяют системе уравнений (5), (6), а $B(t)$ вычисляется по формуле (7). При ограниченности интегралов, входящих в (15), $E[x(t)]$ является почти периодической функцией.

Если среднее значение случайного возмущения является гармонической функцией $E[\varepsilon(t)] = K \cos \lambda t$, то находится явное выражение для $E[x(t)]$. При этом возможны два случая.

1. Нерезонансный $\lambda \neq \pm \omega_0$, тогда

$$\begin{aligned} E[x(t)] = & C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \\ & + \mu \left[B(t) - \cos \omega_0 t \left(\frac{K}{2(\lambda - \omega_0)} \sin(\lambda - \omega_0)t + \frac{K}{2(\lambda + \omega_0)} \sin(\lambda + \omega_0)t \right) \right. \\ & \left. + \sin \omega_0 t \left(\frac{K}{2(\omega_0 - \lambda)} (-\cos(\omega_0 - \lambda)t + 1) + \frac{K}{2(\omega_0 + \lambda)} (\cos(\omega_0 + \lambda)t - 1) \right) \right] + o(\mu^2) \end{aligned}$$

является почти периодической функцией.

При приближении λ к $\pm \omega_0$ амплитуда колебаний возрастает.

2. Резонансный случай $\lambda = \omega_0$, тогда

$$\begin{aligned} E[x(t)] \approx & C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \\ & + \mu(B(t) - \cos \omega_0 t \frac{K}{2} \left(t + \frac{\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0} - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right) + \frac{K \sin \omega_0 t}{4\omega_0} (-\cos 2\omega_0 t + 1)) \end{aligned}$$

и амплитуда колебаний неограниченно возрастает при $t \rightarrow +\infty$.

Отклонение колебаний от среднего значения характеризует дисперсионная функция. Оказывается, что при ограниченной дисперсионной функции первого приближения $D[x_1(t)]$, дисперсионная функция решения $D[x(t)]$ является бесконечно малой второго порядка малости относительно малого параметра $D[x(t)] = \mu^2 D[x_1(t)] + o(\mu^2)$. При ограниченном среднем значении $E[x_1]$, для ограниченности $D[x_1(t)]$ необходимо выполнение условий: средние значения функций

$$\begin{aligned} E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s, \quad E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s, \quad E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)] \sin \omega_0 s_1 \sin \omega_0 s_2, \\ E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)] \sin \omega_0 s_1 \cos \omega_0 s_2, \quad E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)] \cos \omega_0 s_1 \cos \omega_0 s_2 \end{aligned}$$

должны быть равны нулю.

Таким образом, установлен новый факт: если приведённые выше условия (в разд. 2) не выполняются, то наступает дисперсионный резонанс: дисперсионная функция решения неограниченно возрастает при $t \rightarrow +\infty$.

При жёстком возмущении (уравнение (10)) вычисления оказываются более громоздкими.

Теорема 2. При жёстком возмущении (уравнение (10)) математическое ожидание нулевого приближения имеет вид (14) и для ограниченности $E[x_0(t)]$ необходимо выполнение условий: средние значения функций $E[\varepsilon(s)] \sin \omega_0 s$, $E[\varepsilon(s)] \cos \omega_0 s$ должны равняться нулю.

Если математическое ожидание возмущения является гармонической функцией $K \cos \lambda t$, то при $\lambda \neq \pm \omega_0$ функция

$$E[x_0(t)] = \varphi(t) + \frac{K \cos \omega_0 t}{2\omega_0(\omega_0 - \lambda)}(1 - \cos(\omega_0 - \lambda)t) - \frac{K \cos \omega_0 t}{2\omega_0(\omega_0 + \lambda)}(\cos(\omega_0 + \lambda)t - 1) \\ + \frac{K \sin \omega_0 t}{2\omega_0(\lambda - \omega_0)} \sin(\lambda - \omega_0)t + \frac{K \sin \omega_0 t}{2\omega_0(\lambda + \omega_0)} \sin(\lambda + \omega_0)t$$

является почти периодической функцией; а при $\lambda = \omega_0$ наступает резонанс; функция

$$E[x_0(t)] = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{K \sin \omega_0 t}{2\omega_0} \left(t + \frac{\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0} - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right) - \frac{K \cos \omega_0 t}{4\omega_0} (1 - \cos 2\omega_0 t)$$

неограниченно возрастает при $t \rightarrow +\infty$.

Автор выражает признательность профессору В. Г. Задорожному, предсказавшему явление дисперсионного резонанса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Van der Pol B. On a type of oscillation hysteresis in a simple triode generator // Philos. Mag. 1922. N 43. P. 177–193.
2. Van der Pol B. On oscillation hysteresis in a simple triode generator // Philos. Mag. 1926. N 43. P. 700–719.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Москва: Физматлит, 1959.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974.
5. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971.
6. Boyce W., Boyce E., Richard E., Diprima C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. J. Wiley and Sons, 2005.
7. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
8. Ланда П.С. Автоколебательные системы с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
9. Найфе А. Методы возмущений. Москва: Мир, 1976.
10. Тихонов В.И. Воздействие флуктуаций на простейшие параметрические системы // Автоматика и телемеханика. 1958. Т. 19. С. 717–723.
11. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966.
12. Adomian G. Stochastic systems. N. Y.: Acad. Press, 1983.
13. Задорожный В.Г. Методы вариационного анализа. Ижевск: изд. РХД, 2006.
14. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
15. Якунин М.А. Численный анализ стохастического осциллятора Ван дер Поля // Марчуковские чтения–2019. Труды межд. конф. «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики». Новосибирск 2019. С. 564–570.
16. Guo S.S., Er G.K. The probability solution of stochastic oscillators with even nonlinearity under poisson excitation // Central Europ. J. Phys. 2012. V. 10, N 3. P. 702–707.
17. Er G.K., Zhu H.T., In V.P., Kon K.P. PDF solution of nonlinear oscillators subjekt to multiplicative poisson pulse excitation on displacement // Nonlinear Dinamics. 2009. V. 55, N 4. P. 337–348.

18. *Артемьев С.С., Якунин М.А.* Параметрический анализ осциллирующих решений СДУ с винеровской и пуассоновской составляющими методом Монте-Карло // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 3–14.
19. *Maha Hamed, El-Kalla I. L. , El-Beltagy M.A. , El-desouky B.S.* Solution of stochastic Van der Pol equation using spectral decomposition techniques // Appl. Math. 2020, V. 11, N 3. P. 87–95.
20. *Anh N.D., Zakovorotny V. L., Hao D.N.* Response analysis of Van der Pol oscillator subjected to harmonic and random excitations // Probab. Engrg. Mech. 2014. V. 37. P. 51–59.
21. *Zhou L., Chen F.* Chaotic motions of the duffing-van der pol oscillator with external and parametric excitations // Shock and Vibration. 2014. V. 1. P. 143–148.
22. *Li Y., Wu Z., Guoqi Z., Feng W., Yuancen W.* Stochastic P -bifurcation in bistable Van der Pol oscillator with fractional time-delay feedback under Gaussian white noise excitation // Adv. Diff. Equ. 2019. N 448. P. 53–69.
23. *Боровских А.В., Перов А.И.* Дифференциальные уравнения. Ч. 1. М: Юрайт, 2016.
24. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

UDC 517.925:519.218

VAN DER POL OSCILLATOR UNDER RANDOM NOISE

© 2022 E. V. Kuptsova

*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,
ul. S.Kovalevskaya 16, Yekaterinburg 620108, Russia*

E-mail: kkatjushav@gmail.com

Received 01.06.2020, revised 22.01.2022, accepted 22.06.2022

Abstract. It is believed that the perturbations are of random nature. For a mathematical model of an oscillator, the first approximations for the mathematical expectation and the dispersion function of the solution are found in the form of a differential equation with a small parameter perturbed by random noise. It is assumed that the disturbances are random and it is not assumed that they are generated by white noise. The conditions for the resonance of the mathematical expectation of the solution for the harmonic average value of the disturbing random noise are obtained. A new fact has been established: the increase of the dispersion function with increasing time (dispersion resonance), if five algebraic equalities for the moment functions of a random perturbation are not fulfilled.

Keywords: electric oscillator, random perturbation, moment functions, stochastic differential equation. random fluctuations, resonance, dispersive resonance.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.307

REFERENCES

1. Van der Pol B. On a type of oscillation hysteresis in a simple triode generator. *Philos. Mag.*, 1922, Vol. 43, pp. 177–193.
2. Van der Pol B. On oscillation hysteresis in a simple triode generator. *Philos. Mag.*, 1926, No. 43, pp. 700–719.
3. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaykin S.E. *Teoriya kolebaniy* [Oscillation Theory]. Moscow: Fizmatlit, 1959 (in Russian).
4. Bogolyubov N.N., Mitropolskiy Y.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).
5. Mitropolskiy Y.A. *Metod usredneniya v nelineinoi mekhanike* [Averaging method in nonlinear mechanics]. Kiev: Naukova dumka, 1971 (in Russian).
6. Boyce W., Boyce E., Richard E., Diprima C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley and Sons, 2005.
7. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. *Vvedenie v teoriyu kolebaniy i voln* [Introduction to the theory of oscillations and waves]. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
8. Landa P.S. *Avtokolebatel'nye sistemy s konechnym chislom stepenei svobody* [Self-oscillatory systems with a finite number of degrees of freedom]. Moscow: Nauka, 1980 (in Russian).
9. Naife A. *Perturbation Methods*. John Wiley and Sons, Inc., 1973.
10. Tikhonov V.I. *Vozdeistvie fluktuatsii na prosteishie parametricheskie sistemy* [Impact of fluctuations on the simplest parametric systems]. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1958, Vol. 19, pp. 717–723 (in Russian).
11. Tikhonov V.I. *Statisticheskaya radiotekhnika* [Statistical radio engineering]. Moscow: Sov. Radio, 1966.

12. Adomian G. Stochastic Systems. New York: Acad. Press, 1983.
13. Zadoroznii V.G. Metody variatsionnogo analiza [Variational Analysis Methods]. Izhesk: Publ. RKhD, 2006 (in Russian).
14. Stratonovich R.L. Izbrannye voprosy teorii flyuktuatsii v radiotekhnike [Selected questions of the theory of fluctuations in radio engineering]. Moscow: Sov. Radio, 1961 (in Russian).
15. Yakunin M.A. Chislennyi analiz stokhasticheskogo ostsillyatora Van der Polya [Numerical analysis of the stochastic Van der Pol oscillator]. Proc. Internat. Conf. «Actual Problems of Computational and Applied Mathematics». Novosibirsk, 2019, pp. 564-570 (in Russian).
16. Guo S.S., Er G.K. The probability solution of stochastic oscillators with even nonlinearity under poisson excitation. *Central Eur. J. Phys.*, 2012, Vol. 10, No. 3, pp. 702–707.
17. Er G.K., Zhu H.T., In V.P., Kon K.P. PDF solution of nonlinear oscillators subjekt to multiplicative poisson pulse excitation on displacement. *Nonlinear Dinamics*, 2009, Vol. 55, No. 4, pp. 337–348.
18. Artemev S.S., Yakunin M.A. Parametricheskii analiz ostsilliruyushchikh reshenii SDU s vinerovskoi i puassonovskoi sostavlyayushchimi metodom Monte-Karlo [Parametric analysis of oscillating solutions of SDE with Wiener and Poisson components by the Monte Carlo method]. *Sibir. Zhurn. Indust. Mat.*, 2017, Vol. 20, No. 2, pp. 3–14 (in Russian).
19. Hamed M., El-Kalla I.L., El-Beltagy M.A., El-desouky B.S. Solution of stochastic Van der Pol equation using spectral decomposition techniques. *Appl. Math.*, 2020, Vol. 11, No. 3, pp. 87–95.
20. Anh N.D., Zakovorotny V.L., Hao D.N. Response analysis of Van der Pol oscillator subjected to harmonic and random excitations. *Probab. Engrg. Mech.*, 2014, Vol. 37, pp. 51–59.
21. Zhou L., Chen F. Chaotic motions of the duffing-van der pol oscillator with external and parametric excitations. *Shock and Vibration*, 2014, Vol. 1, ID 131637, pp. 143–148.
22. Li Y., Wu Z., Guoqi Z., Feng W., Yuancen W. Stochastic P-bifurcation in bistable Van der Pol oscillator with fractional time-delay feedback under Gaussian white noise excitation. *Adv. Differ. Equ.*, 2019, No. 448, pp. 53–69.
23. Borovskikh A.V., Perov A.I. Differentsial'nye uravneniya [Differential equations]. V. 2, Ch. 1. Moscow: Yurait, 2016 (in Russian).
24. Demidovich B.P. Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti [Lectures on the mathematical theory of stability]. Moscow: Nauka, 1967 (in Russian).