

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год
Том 25, №3(91)
Июль - сентябрь 2022 г.

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

СОДЕРЖАНИЕ

Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением	5
Дурдиев Д. К., Меражова Ш. Б. Обратная задача для двумерного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в цилиндрической области	14
Иванов В. В. Притягивающий предельный цикл модели нечётномерной кольцевой генной сети	25
Имомназаров Б. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Худайназаров Б. Б. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении	33
Ковалёв М. Д. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике	41
Куликов И. М., Черных И. Г., Ульяничев И. С., Тутуков А. В. Математическое моделирование ядерного горения углерода в белых карликах с использованием 7-изотопной сети реакций	55
Купцова Е. В. Осциллятор Ван дер Поля под действием случайного шума	67
• Лазарева Г. Г., Максимова А. Г. Численное моделирование распространения паров вольфрама над нагреваемой поверхностью	81
Мамажонов М., Шерматова Х. М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения	93
Минаков А. В., Лобасов А. С., Шебелев А. В., Зайцев Д. В., Кабов О. А. Режимы течения плёнки жидкости, увлекаемой потоком газа в плоском горизонтальном канале, в изотермических условиях	104
Митрофанов Г. М., Карчевский А. Л. Математическое моделирование для тонкослоистых упругих сред в сейсморазведке	120
Перцев Н. В., Топчий В. А., Логинов К. К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций	135
Романов В. Г., Бугуева Т. В. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения	154
Старовойтов В. Н., Старовойтова Б. Н. Усреднённая математическая модель периодической упругой структуры, насыщенной жидкостью Максвелла	170

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПАРОВ ВОЛЬФРАМА НАД НАГРЕВАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

© 2022 Г. Г. Лазарева^{1,2a}, А. Г. Максимова^{2,3b}

¹Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198, Россия,

²Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090, Россия,

³Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
просп. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: ^alazareva-gg@rudn.ru, ^bmaksimova@oapmg.sccc.ru

Поступила в редакцию 28.09.2021 г.; после доработки 29.05.2022 г.;
принята к публикации 22.06.2022 г.

Приведены результаты численного моделирования распространения паров вольфрама, испаряющегося с поверхности образца, разогреваемого высокоскоростным электронным пучком. Модель основана на решении системы уравнений газовой динамики, записанных в дивергентной форме. Система уравнений реализуется методом крупных частиц Белоцерковского — Давыдова. Получены распределения плотности и температуры паров над поверхностью, разогретой до 8000 К. Расчёты показали, что фронт выхода газа имеет ярко выраженную сферическую форму при нормальном распределении температуры на поверхности образца.

Ключевые слова: математическое моделирование, уравнения газовой динамики, метод крупных частиц, вычислительный эксперимент, эрозия вольфрама.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.308

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование динамики паров при нагреве вольфрамовой пластины высокоскоростным электронным пучком продолжительное время находится в фокусе исследований нашей группы. Параметры моделирования получены на экспериментальном стенде Beam of Electrons for Materials Test Applications (BETA), созданном в ИЯФ СО РАН [1]. Работа посвящена расчёту распространения паров вольфрама в процессе испарения, когда пластина быстро (за время порядка мкс) нагревается до 8000 К. Быстрый рост температуры приводит к необходимости проведения расчётов с малыми шагами по времени и пространству. Важной составляющей задачи является постановка корректных граничных условий для плотности и скорости выхода газа с нагретой поверхности. Анализ результатов расчёта при различных вариантах граничных условий с существующими оценками зависимости плотности и скорости истекающего газа от температуры проводился в [2]. Известные результаты не могут быть использованы из-за специфики постановки задачи (диапазон температур и давлений, пространственный и временной масштабы). Выбор метода численной реализации гиперболических систем уравнений в частных производных определяется характерными особенностями

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-31-90092).

моделируемого физического процесса [3]. Новизна и сложность решения задачи обусловлена необходимостью корректного описания нелинейных граничных условий, задающих нагрев и испарение материала на его поверхности. Целью исследования является моделирование эрозии поверхности образца в результате испарения и проникновения теплового потока в материал. Расчёт плотности и температуры паров вольфрама над образцом необходим для более подробного моделирования вклада сил Лоренца в динамику расплава [4].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Эксперимент состоит в нагреве образца вольфрама в результате мощного импульсного воздействия. Образец — закреплённая в установке пластинка размером 25×25 мм, толщиной около 3 мм. Из установки откачан воздух, эксперимент начинается при комнатной температуре. Пластика вольфрама нагревается под воздействием пучка электронов с нормальным распределением мощности, поэтому температура в центре пластины значительно выше, чем на её краях. На рис. 1 изображена область для расчёта распространения паров вольфрама над образцом.

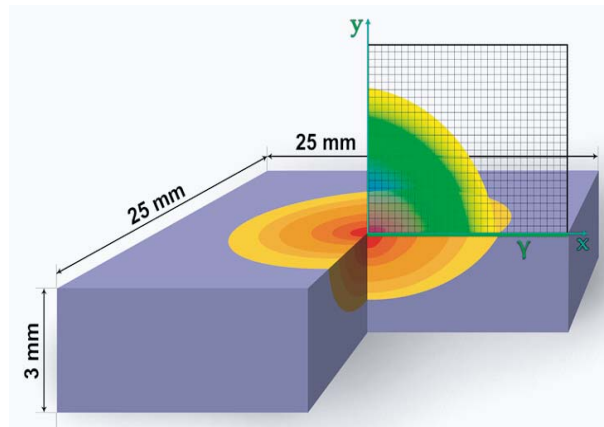


Рис. 1. Область для расчёта распространения паров вольфрама над нагреваемой поверхностью пластинки

В [5] показано, что потери энергии в центре пластины составляют около 20% от подаваемой энергии. Численное моделирование требуется для определения распределения скорости и плотности исходящего потока паров вольфрама. Математическая модель основана на системе уравнений газовой динамики [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{w}) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho \vec{w})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{w}^2 + P) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E \vec{w} + P \vec{w}) &= 0, \\ T &= (\gamma - 1) \frac{M}{R} \left(E - \frac{\vec{w}^2}{2} \right), \quad P = \frac{R}{M} \rho T, \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ — плотность газа, $\vec{w} = (u, v)$ — вектор скорости газа, P — давление газа, E — удельная полная энергия, $\gamma = 5/3$ — показатель адиабаты для одноатомного идеального газа, $R = 8,3145 \cdot 10^{-6} \text{ (мм}^2 \cdot \text{кг) / (мкс}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{К)}$ — универсальная газовая постоянная, $M = 0,18384 \text{ кг/моль}$ — молярная масса вольфрама, T — температура газа. В качестве уравнения состояния было выбрано уравнение состояния идеального газа.

На поверхности пластинки ставятся условия

$$T|_{y=0} = T_e(x, t), \quad \rho|_{y=0} = \rho_{\text{vac}} + \frac{1}{2} \frac{M}{R} \frac{1}{T|_{y=0}} \exp\left(a_1 - \frac{a_2}{T|_{y=0}}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y}|_{y=0} = 0, \quad (2)$$

$$v|_{y=0} = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{R}{M}} \sqrt{T|_{y=0} - T^0}, \quad E|_{y=0} = \frac{R}{M} \frac{T|_{y=0}}{(\gamma - 1)} + \frac{u^2|_{y=0} + v|_{y=0}}{2}$$

на границе $x = 0$, условие симметрии и однородное условие Неймана — на остальных границах. Здесь $T_e(x, t)$ — температура нагреваемой поверхности, $\rho_{\text{vac}} = \frac{P^0}{T^0} \frac{M}{R}$ — плотность технического вакуума, $P^0 = 10^{-13}$ кг/(мм·мкс²) — давление, поддерживаемое в установке, $T^0 = 300$ К — температура в установке до начала эксперимента, $a_1 = 26,191$, $a_2 = 8,39713 \cdot 10^4$ К — параметры, полученные из экспериментов. Функция $T_e(x, t)$ — распределение, близкое к нормальному, по оси x (рис. 2(a)), задаваемое полиномом, интерполирующим фиксируемую в эксперименте температуру нагреваемой поверхности. Рост температуры на поверхности задаётся постоянным: $\frac{\partial T_e(x, t)}{\partial y} = 370$ К/мкс, что равно максимально большому наблюдаемому росту температуры на поверхности. В то время как температура поверхности в расчёте растёт с постоянной скоростью, плотность испаряемого газа (2) растёт экспоненциально относительно растущей температуры (рис. 2(b)).

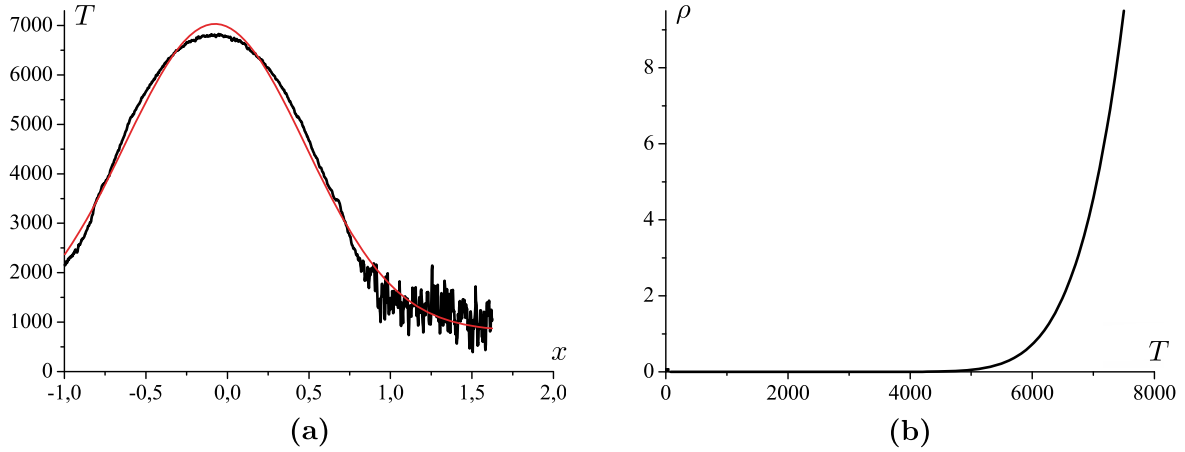


Рис. 2. Экспериментальные (чёрная линия) и расчётные (красная линия):

(a) распределение температуры на поверхности пластинки (К),

(b) плотность испаряемого с поверхности газа (кг/м³)

Рассматривается испарение вольфрама без учёта цепочки фазовых переходов твёрдое состояние-жидкость-газ. На данном этапе развития модели испарения вольфрама достаточно учесть граничные условия на нагреваемой поверхности (2). На следующем этапе планируется учёт динамики частично ионизированного газа с мгновенным локальным установлением ионизационного равновесия. Существуют работы, где описываются инварианты для конструирования уравнения состояния материалов от твёрдого состояния до газообразного и характерные времена фазовых переходов [7]. Логичным продолжением развития модели будет описание испарения как непрерывного процесса с двумя фазовыми переходами.

Высокая скорость роста обеспечивает небольшое время счёта, что позволяет проводить вычислительный эксперимент для получения высоких температур без использования суперкомпьютера. Для получения более точных результатов необходимо дополнительно численно решать задачу Стефана в нагреваемом образце с привлечением экспериментально полученных значений плотности мощности падающей на поверхность энергии лазера. Более точная

постановка задачи потребует для решения использование суперкомпьютера не только за счёт расширения алгоритма, но в первую очередь за счёт существенного увеличения числа шагов по времени, необходимых для разогрева образца до 8000 К.

В начальный момент времени задаются следующие значения:

$$\rho|_{t=0} = \rho_{\text{vac}}, \quad u|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad T|_{t=0} = T^0, \quad P|_{t=0} = P^0, \quad E|_{t=0} = \frac{3}{2} \frac{R}{M} T^0.$$

Для проведения расчётов выполнена процедура обезразмеривания параметров:

$$x^* = \frac{x}{x_0}, \quad y^* = \frac{y}{y_0}, \quad t^* = \frac{t}{t_0}, \quad u^* = \frac{u}{u_0}, \quad v^* = \frac{v}{v_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}, \quad P^* = \frac{P}{P_0}$$

с использованием характерных величин (см. табл. 1).

Таблица 1

Характерные величины

Параметр	Характерное значение	Единицы измерения
x, y	10	мм
t	10	мкс
u, v	1	мм/мкс
ρ	10^{-9}	кг/мм ³
T	10^4	К
P	10^{-9}	кг/(мм·мкс ²)

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Далее поставленная задача будет использована в модели слабо ионизированной плазмы паров для расчёта теплопотоков, поэтому был выбран метод крупных частиц, допускающий различные модификации, (см., например, [8]).

Перейдём к дискретной задаче. Расчётная область покрывается фиксированной в пространстве равномерной прямоугольной сеткой со сторонами ячеек h_x, h_y . Внутри ячеек определены следующие функции:

$$\rho_{ij}^n, \quad u_{ij}^n, \quad v_{ij}^n, \quad E_{ij}^n, \quad \tilde{\rho}_{ij}^n, \quad \tilde{u}_{ij}^n, \quad \tilde{v}_{ij}^n, \quad \tilde{E}_{ij}^n, \quad P_{ij}^n, \quad T_{ij}^n, \quad \text{где} \quad f_{ij}^n = f(x_i, y_j, t^n).$$

Здесь $i = 1 \dots N_x$ — номер ячейки по оси x и $j = 1 \dots N_y$ — по оси y . Шаг по времени τ .

После обезразмеривания начальное приближение функций принимает следующие значения:

$$P_{i,j}^0 = P^0 = 10^{-4}, \quad T_{i,j}^0 = T^0 = 0.03, \quad \rho_{i,j}^0 = \frac{M}{R} \frac{P^0}{T^0}, \quad u_{i,j}^0 = 0, \quad v_{i,j}^0 = 0, \quad E_{i,j}^0 = \frac{3}{2} \frac{R}{M} T^0.$$

Основная идея метода крупных частиц заключается в расщеплении исходной системы дифференциальных уравнений по физическим процессам. Каждый временной шаг разделяется на три этапа:

1. Эйлеров этап. На этом этапе пренебрегают всеми эффектами, связанными с перемещением вещества, т. е. нет потока массы через границы ячеек. Вычисленные параметры обозначаются символом с волной ($\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{E}$).

2. Лагранжев этап. На втором этапе вычисляется плотность потока массы при движении газа через границы эйлеровых ячеек.

3. Заключительный этап. Производится перерасчёт параметров газа на основе законов сохранения массы, импульса и энергии для каждой ячейки.

Таким образом, сначала происходит изменение внутреннего состояния вещества в ячейках (крупных частицах) в предположении их фиксированности, а затем производится смещение частиц вещества пропорционально их скорости и шага по времени с последующим пересчётом сетки в начальное состояние.

На первом этапе зафиксируем газ в ячейках:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (Pu)}{\partial x} + \frac{\partial (Pv)}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

Запишем для полученной системы уравнений разностный аналог первого порядка точности по времени и второго по пространству. Условия устойчивости схемы $\left|u \frac{\tau}{h_x}\right| < 1$ и $\left|v \frac{\tau}{h_y}\right| < 1$ следующие (см. [9]):

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{i,j}^n &= \rho_{i,j}^n, \\ \rho_{i,j}^n \frac{\tilde{u}_{i,j}^n - u_{i,j}^n}{\tau} + \frac{P_{i+1/2,j}^n - P_{i-1/2,j}^n}{h_x} &= 0, \\ \rho_{i,j}^n \frac{\tilde{v}_{i,j}^n - v_{i,j}^n}{\tau} + \frac{P_{i,j+1/2}^n - P_{i,j-1/2}^n}{h_y} &= 0, \\ \rho_{i,j}^n \frac{\tilde{E}_{i,j}^n - E_{i,j}^n}{\tau} + \frac{P_{i+1/2,j}^n u_{i+1/2,j}^n - P_{i-1/2,j}^n u_{i-1/2,j}^n}{h_x} + \frac{P_{i,j+1/2}^n v_{i,j+1/2}^n - P_{i,j-1/2}^n v_{i,j-1/2}^n}{h_y} &= 0.\end{aligned}$$

Здесь $f_{i+1/2,j} = (f_{i,j} + f_{i+1,j})/2$ — значение параметров на границах ячеек.

На лагранжем этапе происходит адвективный перенос консервативных величин (плотность, импульс, полная энергия). Предполагаем, что масса переносится только за счёт нормальной к границе ячейки составляющей скорости. Поток массы зависит от значения плотности и скорости на границе. Выбор этих значений сильно влияет на устойчивость и точность вычислений [10]. Для расчёта было выбрано следующее приближение первого порядка точности:

$$\begin{aligned}\Delta M_{i+1/2,j}^n &= \begin{cases} \rho_{i,j}^n \frac{\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n}{2} h_y \tau, & \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n \geq 0, \\ \rho_{i+1,j}^n \frac{\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n}{2} h_y \tau, & \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n < 0, \end{cases} \\ \Delta M_{i,j+1/2}^n &= \begin{cases} \rho_{i,j}^n \frac{\tilde{v}_{i,j}^n + \tilde{v}_{i,j+1}^n}{2} h_x \tau, & \tilde{v}_{i,j}^n + \tilde{v}_{i,j+1}^n \geq 0, \\ \rho_{i,j+1}^n \frac{\tilde{v}_{i,j}^n + \tilde{v}_{i,j+1}^n}{2} h_x \tau, & \tilde{v}_{i,j}^n + \tilde{v}_{i,j+1}^n < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Выбранные формулы для приближения газодинамических уравнений на эйлеровом этапе и вычисления потока массы на лагранжем этапе удобны тем, что позволяют проводить устойчивый счёт без введения явных членов искусственной вязкости [11].

На заключительном этапе производится регуляризация сетки и перерасчёт массы, импульса и энергии по пространству, основанные на законах сохранения, а также замыкание системы. Для определения направления потока на границах ячеек введём функцию $D_{i,j}^n(k)$, где $k = 1$ соответствует стороне ячейки (i, j) при $i - 1/2$, $k = 2$ при $j - 1/2$, $k = 3$ при $i + 1/2$, $k = 4$ при $j + 1/2$:

$$D_{i,j}^n(k) = \begin{cases} 1, & \text{если жидкость втекает в ячейку } (i, j) \text{ через сторону } k; \\ 0, & \text{если жидкость вытекает из ячейки } (i, j) \text{ через сторону } k. \end{cases}$$

Окончательные значения параметров вычисляются по следующим формулам:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \tilde{\rho}_{i,1}^n + \frac{\Delta M_{i-1/2,j}^n + \Delta M_{i,j-1/2}^n - \Delta M_{i+1/2,j}^n - \Delta M_{i,j+1/2}^n}{h_x h_y},$$

$$\begin{aligned} X_{i,j}^{n+1} = & [D_{i,j}^n(1)\tilde{X}_{i-1,j}^n\Delta M_{i-1/2,j}^n + D_{i,j}^n(2)\tilde{X}_{i,j-1}^n\Delta M_{i,j-1/2}^n + D_{i,j}^n(3)\tilde{X}_{i+1,j}^n\Delta M_{i+1/2,j}^n \\ & + D_{i,j}^n(4)\tilde{X}_{i,j+1}^n\Delta M_{i,j+1/2}^n + \tilde{X}_{i,j}^n[\rho_{i,j}^n h_x h_y - (1 - D_{i,j}^n(1))\Delta M_{i-1/2,j}^n - (1 - D_{i,j}^n(2))\Delta M_{i,j-1/2}^n \\ & - (1 - D_{i,j}^n(3))\Delta M_{i+1/2,j}^n - (1 - D_{i,j}^n(4))\Delta M_{i,j+1/2}^n]] / (\rho_{i,j}^{n+1} h_x h_y), \end{aligned}$$

где $X = (u, v, E)$.

Этап завершается замыканием системы газодинамических уравнений с помощью построения термодинамически согласованного набора физических и консервативных переменных и уравнения состояния идеального газа:

$$T_{i,j}^{n+1} = (\gamma - 1) \frac{M}{R} \left(E_{i,j}^{n+1} - \frac{(u_{i,j}^{n+1})^2 + (v_{i,j}^{n+1})^2}{2} \right), \quad P_{i,j}^{n+1} = \frac{R}{M} \rho_{i,j}^{n+1} T_{i,j}^{n+1}.$$

Полученная разностная схема для решения системы (1) требует достаточно мелкой сетки как в пространстве, так и во времени. Это связано не только с использованием явной схемы. Поскольку массовый расход при низких температурах очень мал (рис. 2(b)), необходимо точно передавать плотность потока с поверхности пластины во время испарения.

3. ВЕРИФИКАЦИЯ

Численный метод был проверен на задаче об ударной трубе. Перегородка между двумя состояниями газа была размещена при $x_0 = 0.5$. Время проведения теста 0.2, $\tau = 10^{-4}$. Начальные параметры газа: слева $\rho_L = 1$, $u_L = 0$, $P_L = 1$; справа $\rho_R = 0.125$, $u_R = 0$, $P_R = 0.1$.

Результаты тестов на сгущающихся сетках представлены на рис. 3. Численный расчёт хорошо приближает все компоненты решения. Незначительные осцилляции возникают на ударной волне, которые сглаживаются при уменьшении сетки. Модель приближает ударную волну с диссипацией на четыре ячейки.

Для оценки сходимости численного метода была вычислена погрешность в норме L_1 (табл. 2). Порядок сходимости вычислений при моделировании разрывного решения существенно меньше единицы, что согласуется с теорией разностных схем. В дальнейшем предполагается провести модификацию метода, что улучшит порядок сходимости, как, например, в работе [8].

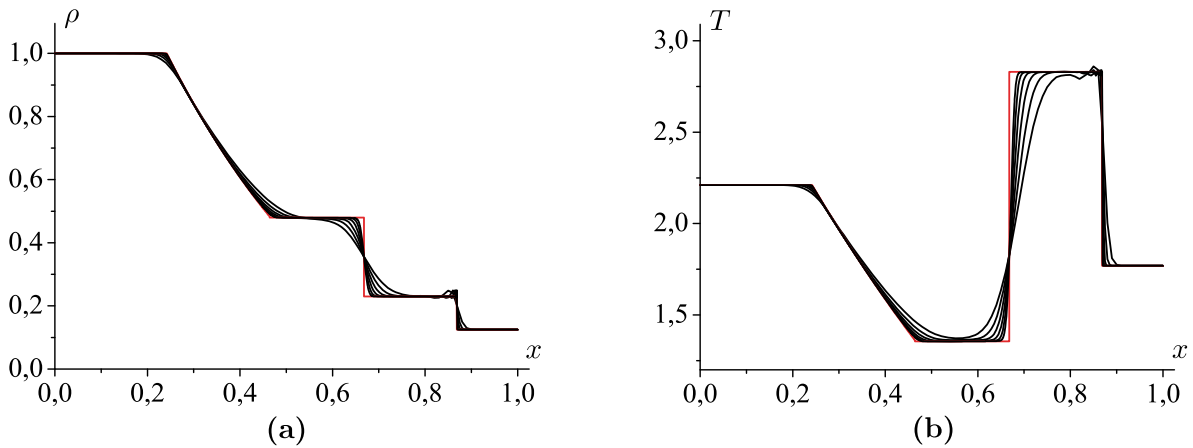


Рис. 3. Результаты расчётов при $h = 0.01/2^k$, $k = 0, \dots, 5$ (чёрные линии) и точное решение (красная линия) для плотности (а) и температуры (б)

Таблица 2

Порядок сходимости

Количество узлов	100	200	400	800	1600	3200
Плотность	0.5894	0.5943	0.6105	0.6032	0.5735	0.5391
Скорость	0.8046	0.7798	0.7665	0.764	0.4353	0.4441
Давление	0.7853	0.7718	0.8017	0.7752	0.6177	0.573
Энергия	0.5939	0.573	0.5627	0.5432	0.4845	0.4699
Температура	0.5892	0.5819	0.5495	0.5439	0.5167	0.4808

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Расчёты проводились в прямоугольной области 60×70 мм с шагом по пространству $h = 0.05$, шагом по времени $\tau = 0.005$. Температура на границе определена функцией $T_e = \exp\left(\frac{-x^2}{2 \cdot 0.3^2}\right)$. За 208 мкс температура поверхности достигала 8000 К и расчёт заканчивался. В моделируемых экспериментах температура поверхности не превышала 8000 К. Дальнейшему нагреву препятствуют большие потери энергии при испарении, поскольку они увеличиваются с ростом температуры поверхности [5]. В проводимых численных экспериментах температура увеличивается линейно, масса испаряющегося вещества увеличивается экспоненциально, следовательно, температура поверхности не может подниматься выше определённого предела.

Предварительные результаты [12] показали, что в начальные моменты времени пары вольфрама распространяются в области, близкой к полусфере. Расчёты при высоких температурах показывают, что эта тенденция сохраняется (рис. 4). С повышением температуры начинает формироваться ударная волна. Фронт выхода газа имеет ярко выраженную сферическую форму с нормальным распределением падающей мощности теплового потока по пространству. Температура газа плавно распространяется в технический вакуум вместе с массой газа. При этом испарённое вещество за фронтом ударной волны достаточно равномерно прогрето.

Наибольший интерес вызывает распределение плотности, которое в основном определяет экспоненциальный рост массы паров на нагреваемой поверхности (рис. 5(a)). Плотность паров можно зафиксировать в эксперименте только в результате косвенных измерений.

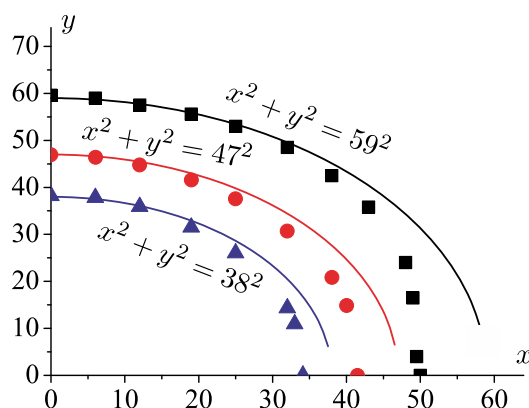


Рис. 4. Приближение вычисленного фронта волны плотности (линии) в моменты времени: 14 мкс (треугольники), 17 мкс (круги) и 20 мкс (квадраты)

Для выбора области постановки датчиков очень полезна предварительная оценка динамики распространения вещества в пространстве над пластинкой. Скорость движения паров от поверхности в течение всего процесса испарения приблизительно равна 0.3 мм/мкс. В центре пластинки наблюдается сферический фронт плотности с характерными значениями плотности до $4.5 \cdot 10^{-11}$ кг/мм³. Температура нагреваемой поверхности по условиям численного эксперимента линейно растёт со временем, следовательно, на поверхности плотность испаряемого вещества растёт по времени экспоненциально. Начиная с 12 мкс масса испаряемого вещества в центре пластинки у поверхности начинает превышать плотность фронта распространяемой волны. При приближении максимума температуры поверхности к 5000 К характерная картина распространения паров в пространстве изменяется. При 8000 К плотность на поверхности в центре образца около $9 \cdot 10^{-9}$ кг/мм³ (рис. 5(а)). Полученное распределение давления имеет схожий вид (рис. 5(б)): значение на поверхности достигает $3.3 \cdot 10^{-9}$ кг/(мм·мкс²), на фронте волны $6 \cdot 10^{-12}$ кг/(мм·мкс²).

Полученные значения плотности подтверждают обоснованность выбора модели в предположении сплошности среды. Степень разрежённости газового потока выражается через число Кнудсена:

$$\text{Kn} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 P L} \approx 0,54 \cdot 10^{-7} \ll 10^{-3},$$

где k_B — постоянная Больцмана, σ — поперечный размер частицы, L — характерный размер течения. В области технического вакуума число Кнудсена менее 10^{-4} , что позволяет исключить возможность режимов течения разрежённого газа, промежуточных между свободно-молекулярным и континуальным.

В ИЯФ СО РАН предложена теоретическая модель слабо ионизованной плазмы испарённого вольфрама, которая может объяснить возникновение тока на неравномерно нагретой границе газа и расплава. Дальнейшее развитие модели предполагает включение расчетов тепмоток в испаряемом веществе на основе вычисления электрического сопротивления и термоэдс в модифицированных уравнениях Максвелла. Удельная электропроводность и термоэдс получен через интеграл по энергии электронов. Влияние силы ампера на возникающие токи с учетом внешнего магнитного поле позволит качественно объяснить наблюдавшееся вращение расплава на установке ВЕТА. Соответствующая математическая модель должна отражать динамику частично ионизованного газа с мгновенным установлением ионизационного равновесия. В таком случае возможен расчёт проводимости и термоэдс испаряемого вещества в релаксационном приближении в модели слабо неидеальной трёхкомпонентной плазмы. Результаты моделирования позволят объяснить механизмы возникновения новых особенностей движения и эрозии тугоплавких металлов, наблюдаемых в эксперименте.

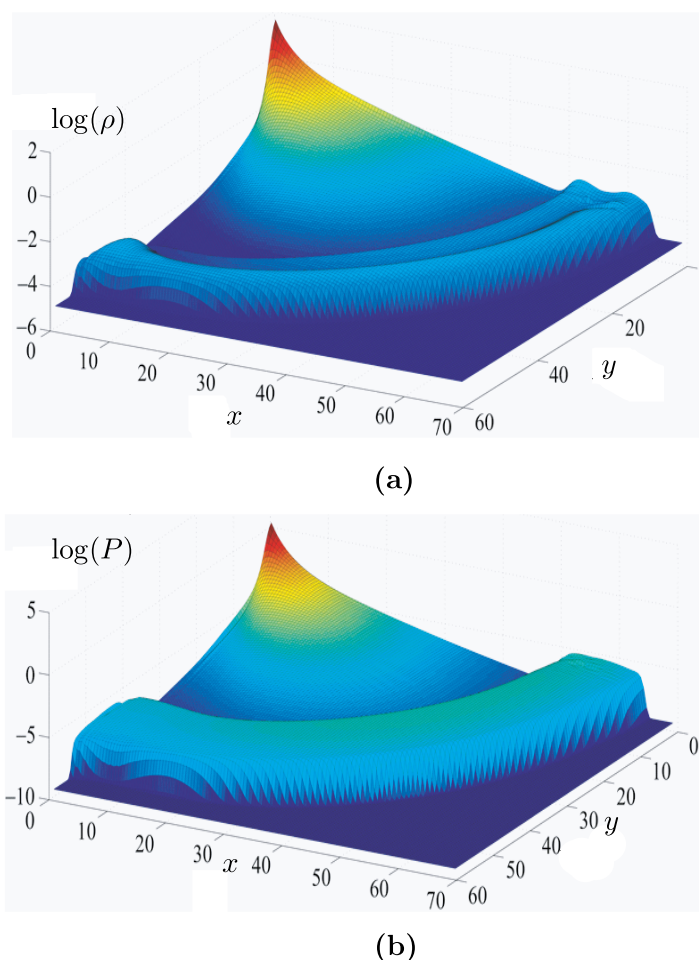


Рис. 5. Вычисленные значения плотности (а) и давления (б) в логарифмической шкале. Дальняя плоскость графика отражает значения на поверхности пластинки, правая поверхность — в центре пластинки

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализована модель распространения паров вольфрама, испаряющегося с поверхности образца, разогреваемого высокоскоростным электронным пучком. Система уравнений газовой динамики, записанных в дивергентной форме, реализована методом крупных частиц Белоцерковского — Давыдова. Задано нормальное распределение температуры на поверхности образца вольфрама, близкое к данным экспериментов. Получены распределения плотности и температуры паров над поверхностью, разогретой в центре образца до 8000 К. Расчёты показали, что фронт выхода газа имеет ярко выраженную сферическую форму. Показано, что при максимуме температуры поверхности выше 5000 К над центром пластинки формируется купол радиуса 65 мм паров высокой плотности. Полученные значения плотности подтверждают обоснованность выбора модели в предположении сплошности среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vyacheslavov L., Arakcheev A., Burdakov A., Kandaurov I., Kasatov A., Kurkuchekov V., Mekler K., Popov V., Shoshin A., Skovorodin D., Trunев Y., Vasilyev A. Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1771, N 060004; DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4964212>

2. Lazareva G.G., Arakcheev A.S., Popov V.A., Maksimova A.G. Estimation of the change in the gas flow rate from the surface of a tungsten plate under pulsed heat load // J. Phys. Conf. Ser. (IOP). 2019. V. 1336, N 012011; DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1336/1/012011>
3. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М: Физматлит, 2001.
4. Лазарева Г.Г., Попов В.А., Аракчеев А.С., Бурдаков А.В., Шваб И.В., Васкевич В.Л., Максимова А.Г., Ивашин Н.Е., Оксогоева И.П. Математическое моделирование распределения тока электронного пучка при импульсном нагреве металлической мишени // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 2(86). С. 97–108; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.207
5. Arakcheev A.S., Apushkinskaya D.E., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Lazareva G.G., Maksimova A.G., Popov V.A., Snytnikov A.V., Truneev Yu.A., Vasilyev A.A., Vyacheslavov L.N. Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam // Fusion Engrg. Design. 2018. V. 132. P. 13–17; DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2018.05.008>
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003.
7. Годунов С.К., Киселев С.П., Куликов И.М., Мали В.И. Моделирование ударно-волновых процессов в упругопластических материалах на различных (атомный, мезо- и термодинамический) структурных уровнях. Ижевск: изд. Ин-та компьютерных исследований, 2014.
8. Куликов И.М. Математическое моделирование трёхмерных гидродинамических процессов в самосогласованном гравитационном поле на суперЭВМ: Дис. докт. физ.-мат. наук: 05.13.18. Новосибирск, 2016.
9. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1982.
10. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод «крупных частиц» (схемы и приложения). М.: Ротапринт МФТИ, 1978.
11. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Нестационарный метод «крупных частиц» для решения задач внешней аэродинамики. М.: изд. ВЦ АН СССР, 1970.
12. Arakcheev A.S., Lazareva G.G., Maksimova A.G., Popov V.A., Ivashin N.E. Calculation of the expansion dynamics of evaporated tungsten under the action of a laser pulse // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1640, N 012007. P. 1–8; DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1640/1/012007>

UDC 519.63

NUMERICAL SIMULATION OF THE PROPAGATION OF TUNGSTEN VAPOR ABOVE A HEATED SURFACE

© 2022 G. G. Lazareva^{1,2a}, A. G. Maksimova^{2,3b}¹People's Friendship University of Russia,

ul. Miklukho-Maklaya 6, Moscow 117198, Russia,

²Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia,³Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 6, Novosibirsk 630090, RussiaE-mails: ^alazareva-gg@rudn.ru, ^bmaksimova@oapmg.ssc.ru

Received 28.09.2021, revised 29.05.2022, accepted 22.06.2022

Abstract. The article presents numerical simulation results for the problem of tungsten vapor propagation after its evaporating from a surface heated with a high-speed electron beam. The model is based on solving a system of gas dynamics equations written in a divergent form. The resulting system of equations is implemented via the Belotserkovsky large particle method. The distributions of density and temperature of vapors are obtained for a surface heated up to temperature of 8000 K. Calculations show that normal temperature distribution on the sample surface leads to a noticeably spherical shape of the gas exit front.

Keywords: mathematical modeling, gas dynamics equations, large particle method, computational experiment, tungsten erosion.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.308

REFERENCES

1. Vyacheslavov L., Arakcheev A., Burdakov A., Kandaurov I., Kasatov A., Kurkuchekov V., Mekler K., Popov V., Shoshin A., Skovorodin D., Trunev Y., Vasilyev A. Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads. *AIP Conf. Proc.*, 2016, Vol. 1771, No. 060004; DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4964212>
2. Lazareva G.G., Arakcheev A.S., Popov V.A., Maksimova A.G. Estimation of the change in the gas flow rate from the surface of a tungsten plate under pulsed heat load. *J. Phys. Conf. Ser. (IOP)*, 2019, Vol. 1336, No. 012011; DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1336/1/012011>
3. Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravnenij [Mathematical questions of numerical solution of hyperbolic systems of equations]. Moscow: Fizmatlit, 2001 (in Russian).
4. Lazareva G.G., Oksogoeva I.P., Popov V.A., Schwab I.V., Vaskevich V.L., Maksimova A.G., Ivashin N.E., Arakcheev A.S., Burdakov A.V. Mathematical simulation of the distribution of the electron beam current during pulsed heating of a metal target. *J. Appl. Indust. Math.*, 2021, Vol. 15, No. 2, pp. 292–301; DOI: 10.1134/S1990478921020101
5. Arakcheev A.S., Apushkinskaya D.E., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Lazareva G.G., Maksimova A.G., Popov V.A., Snytnikov A.V., Trunev Yu.A., Vasilyev A.A., Vyacheslavov L.N. Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam. *Fusion Engng. Design.*, 2018, Vol. 132, pp. 13–17; DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2018.05.008>

6. Loitsyansky L.G. Mexanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]. Moscow: Drofa, 2003 (in Russian).
7. Godunov S.K., Kiselev S.P., Kulikov I.M., Mali V.I. Modelirovanie udarno-volnovykh processov v uprugoplasticheskix materialax na razlichnykh (atomnyj, mezo- i termodinamicheskij) strukturnykh urovnjax [Modeling of shock-wave processes in elastoplastic materials at various (atomic, meso- and thermodynamic) structural levels]. Izhevsk: Publ. Institute of Computer Research, 2014 (in Russian).
8. Kulikov I.M. Matematicheskoe Modelirovanie Trjkhmernykh Gidrodinamicheskix Processov v Samosoglasovannom Gravitacionnom Pole na SuperEVM. [Mathematical modeling of three-dimensional hydrodynamic processes in a self-consistent gravitational field on a supercomputer]. Dokt. Diss. Novosibirsk, 2016.
9. Belotserkovsky O.M., Davydov Yu.M. Metod krupnykh chasticz v gazovoj dinamike. Vychislitel'nyj eksperiment [Method of large particles in gas dynamics. Computational experiment]. Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
10. Belotserkovsky O.M., Davydov Yu.M. Metod «krupnykh chasticz» (skhemy i prilozheniya) [Method of «large particles» (schemes and applications)]. Moscow: Rotaprint MIPT, 1978 (in Russian).
11. Belotserkovsky O.M., Davydov Yu.M. Nestacionarnyj metod «krupnykh chasticz» dlya resheniya zadach vneshnej aerodinamiki [Non-stationary method of «large particles» for solving problems of external aerodynamics]. Moscow: Publ. Comput. Center Acad. Sci. USSR, 1970 (in Russian).
12. Arakcheev A.S., Lazareva G.G., Maksimova A.G., Popov V.A., Ivashin N.E. Calculation of the expansion dynamics of evaporated tungsten under the action of a laser pulse. *J. Physics: Conf. Ser.*, 2020, Vol. 1640, No. 012007, pp. 1–8; DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1640/1/012007>