



СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год
Том 25, №3(91)
Июль - сентябрь 2022 г.

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

СОДЕРЖАНИЕ

Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением	5
Дурдиев Д. К., Меражова Ш. Б. Обратная задача для двумерного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в цилиндрической области	14
Иванов В. В. Притягивающий предельный цикл модели нечётномерной кольцевой генной сети	25
Имомназаров Б. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Худайназаров Б. Б. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении	33
Ковалёв М. Д. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике	41
Куликов И. М., Черных И. Г., Ульяничев И. С., Тутуков А. В. Математическое моделирование ядерного горения углерода в белых карликах с использованием 7-изотопной сети реакций	55
Купцова Е. В. Осциллятор Ван дер Поля под действием случайного шума	67
Лазарева Г. Г., Максимова А. Г. Численное моделирование распространения паров вольфрама над нагреваемой поверхностью	81
• Мамажонов М., Шерматова Х. М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения	93
Минаков А. В., Лобасов А. С., Шебелев А. В., Зайцев Д. В., Кабов О. А. Режимы течения плёнки жидкости, увлекаемой потоком газа в плоском горизонтальном канале, в изотермических условиях	104
Митрофанов Г. М., Карчевский А. Л. Математическое моделирование для тонкослоистых упругих сред в сейсморазведке	120
Перцев Н. В., Топчий В. А., Логинов К. К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций	135
Романов В. Г., Бугуева Т. В. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения	154
Старовойтов В. Н., Старовойтова Б. Н. Усреднённая математическая модель периодической упругой структуры, насыщенной жидкостью Максвелла	170

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА УРАВНЕНИЯ

© 2022 М. Мамажонов^{1а}, Х. М. Шерматова^{2б}¹ Кокандский государственный педагогический институт им. Мукамии,
ул. Турон, 23, г. Коканд 150700, Узбекистан,² Ферганский государственный университет,
ул. Мурабийлар, 19, г. Фергана 150100, УзбекистанE-mails: ^аmirzamamajonov@gmail.com, ^бhilola-1978@mail.ruПоступила в редакцию 13.01.2022 г.; после доработки 03.03.2022 г.;
принята к публикации 22.06.2022 г.

Рассматривается краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения, когда характеристика оператора первого порядка параллельна оси ординат. Доказывается теорема существования и единственности решения поставленной задачи.

Ключевые слова: дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, краевая задача, уравнение параболо-гиперболического типа, однозначная разрешимость.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.309

ВВЕДЕНИЕ

Начиная со второй половины XX века интенсивно развивается исследование неклассических уравнений математической физики, в частности уравнений смешанного, составного и смешанно-составного типов. Одной из основных причин этого процесса является появление прикладных применений краевых задач, поставленных для таких уравнений.

Известно, что первоначально изучались смешанные уравнения второго порядка эллиптико-гиперболического типа. Фундаментальные исследования по таким уравнениям начаты в 1920-е годы итальянским математиком Ф. Трикоми [1] и развиты в работах [2–8] и др.

Исследования уравнений эллиптико-параболического и параболо-гиперболического типов второго порядка начались в 50–60 годах прошлого века. В 1959 году И. М. Гельфанд [9] указал на необходимость совместного рассмотрения уравнений в одной части области параболического, а в другой части — гиперболического типов. Он приводит пример, связанный с движением газа в канале, окружённом пористой средой: в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его — уравнением диффузии. Затем в 70–80 годах двадцатого века начаты исследования по уравнениям третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа. Краевые задачи для таких уравнений поставлены и изучены впервые Т. Д. Джураевым [10] и его учениками [11].

За прошедшее время исследования по краевым задачам для уравнений третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа развивались в широком плане, а в настоящее время расширяются по направлениям усложнения уравнений и области их рассмотрения (см., например, [12–14] и др.).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе ставится и исследуется краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(b \frac{\partial}{\partial y} + c\right)(Lu) = 0 \quad (1)$$

в треугольной области G плоскости xOy , где $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3$. Здесь G_1 — прямоугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $B_0(1, 1)$, $A_0(0, 1)$; G_2 — треугольник с вершинами в точках A , B , $C(1/2, -1/2)$; G_3 — треугольник с вершинами в точках A , $D(-1, 1)$, A_0 ; G_4 — треугольник с вершинами в точках B , $E(2, 1)$, B_0 ; J_1 — открытый отрезок с вершинами в точках A , B ; J_2 — открытый отрезок с вершинами в точках A , A_0 ; J_3 — открытый отрезок с вершинами в точках B , B_0 ; $b, c \in \mathbb{R}$,

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x, y) \in G_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x, y) \in G_i, \quad i = 2, 3, 4. \end{cases}$$

Представим области G_i , $i = 3, 4$, в следующем виде (которым будем пользоваться в дальнейшем): $G_3 = G_{31} \cup G_{32} \cup A_0F_1$, $G_4 = G_{41} \cup G_{42} \cup B_0F_2$, где G_{31} — треугольник с вершинами в точках A , A_0 , $F_1(-1/2, 1/2)$; G_{32} — треугольник с вершинами в точках A_0 , D , F_1 ; G_{41} — треугольник с вершинами в точках B , B_0 , $F_2(3/2, 1/2)$; G_{42} — треугольник с вершинами в точках B_0 , E , F_2 ; A_0F_1 — открытый отрезок с вершинами в точках A_0 , F_1 ; B_0F_2 — открытый отрезок с вершинами в точках B_0 , F_2 .

Для уравнения (1) ставится следующая

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x, y)$, которая:

- 1) непрерывна в замкнутой области \bar{G} и в области $G \setminus J_1 \setminus J_2 \setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причём u_x и u_y непрерывны в G вплоть до части границы области G , указанной в краевых условиях;
- 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G \setminus J_1 \setminus J_2 \setminus J_3$;
- 3) удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{BC} = \psi_3(x), \quad 1/2 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

$$u|_{DF_1} = \psi_4(x), \quad -1 \leq x \leq -1/2, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{AD} = \psi_5(x), \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (6)$$

$$u|_{EF_2} = \psi_6(x), \quad 3/2 \leq x \leq 2, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{BE} = \psi_7(x), \quad 1 \leq x \leq 2, \quad (8)$$

$$u|_{A_0D} = f_1(x), \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (9)$$

$$u|_{B_0E} = f_2(x), \quad 1 \leq x \leq 2; \quad (10)$$

4) удовлетворяет условиям склеивания

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (11)$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = \nu_1(x), \quad 0 < x < 1, \quad (12)$$

$$u_{yy}(x, +0) = u_{yy}(x, -0) = \mu_1(x), \quad 0 < x < 1, \quad (13)$$

$$u(+0, y) = u(-0, y) = \tau_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (14)$$

$$u_x(+0, y) = u_x(-0, y) = \nu_2(y), \quad 0 < y < 1, \quad (15)$$

$$u(1-0, y) = u(1+0, y) = \tau_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (16)$$

$$u_x(1-0, y) = u_x(1+0, y) = \nu_3(y), \quad 0 < y < 1. \quad (17)$$

Здесь ψ_i , $i = \overline{1, 7}$, f_j , $j = \overline{1, 2}$, — заданные достаточно гладкие функции, τ_i , ν_i , $i = 1, 2, 3$, μ_1 — неизвестные пока достаточно гладкие функции, \mathbf{n} — внутренняя нормаль к прямой $x + y = 0$ или $x - y = 1$.

Докажем следующую теорему.

Теорема. Если $\psi_1 \in C^3[0, 1/2]$, $\psi_2 \in C^2[0, 1/2]$, $\psi_3 \in C^2[1/2, 1]$, $\psi_4 \in C^3[-1, -1/2]$, $\psi_5 \in C^2[-1, 0]$, $\psi_6 \in C^3[3/2, 2]$, $\psi_7 \in C^2[1, 2]$, $f_1 \in C^3[-1, 0]$, $f_2 \in C^3[1, 2]$, причём выполняются условия согласования $f_1(-1) = \psi_4(-1)$, $f_2(2) = \psi_6(2)$, $\psi_5(0) = \psi_2(0)$, $\psi'_2(1/2) = -\psi'_3(1/2)$, то задача 1 имеет единственное решение.

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1(x) \exp(-(c/b)y), \quad (x, y) \in G_1, \quad (18)$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_i(x) \exp(-(c/b)y), \quad (x, y) \in G_i, \quad i = 2, 3, 4, \quad (19)$$

где введено обозначение $u_i(x, y) = u(x, y)$, $(x, y) \in G_i$, $i = \overline{1, 4}$, причём $\omega_i(x)$, $i = \overline{1, 4}$, — неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Учитывая виды областей G_i , $i = 3, 4$, заданных выше, уравнения (19) перепишем в виде

$$u_{ikxx} - u_{ikyy} = \omega_{ik}(x) \exp(-(c/b)y), \quad (x, y) \in G_{ik}, \quad i = 3, 4; \quad k = 1, 2, \quad (20)$$

где введены обозначения $u_{ik}(x, y) = u_i(x, y)$, $\omega_{ik}(x) = \omega_i(x)$, $(x, y) \in G_{ik}$, $i = 3, 4$, $k = 1, 2$.

Сначала исследование проведём в области G_2 . Запишем решение уравнения (19) при $i = 2$, удовлетворяющее условиям (11) и (12):

$$u_2(x, y) = \frac{\tau_1(x+y) + \tau_1(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \nu_1(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^y \exp(-(c/b)\eta) d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \omega_2(\xi) d\xi. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (3) и (4), находим соответственно

$$\omega_2(x) = \sqrt{2}\psi'_2(x) \exp(-(c/b)x), \quad 0 \leq x \leq 1/2, \quad (22)$$

$$\omega_2(x) = -\sqrt{2}\psi'_3(x) \exp((x-1)c/b), \quad 1/2 \leq x \leq 1. \quad (23)$$

Таким образом, мы определили функцию $\omega_2(x)$ в промежутке $0 \leq x \leq 1$. Из (22) и (23) следует $\psi'_2(1/2) = -\psi'_3(1/2)$.

Подставляя (21) в (2), после некоторых выкладок имеем первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau'_1(x) - \nu_1(x) = \alpha_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (24)$$

где

$$\alpha_1(x) = \psi'_1(x/2) - \int_0^{-x/2} \omega_{22}(x + \eta) \exp(-\eta c/b) d\eta.$$

Переходя в уравнении (1) (в G_1) и (19) при $i = 2$ к пределу при $y \rightarrow 0$, получим соотношения между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$b\nu_1''(x) - b\mu_1(x) + c\tau_1''(x) - c\nu_1(x) = 0, \quad (25)$$

$$\tau_1''(x) - \mu_1(x) = \omega_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (26)$$

Исключая из (24)–(26) функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$ и интегрируя полученное уравнение от 0 до x , приходим к уравнению

$$\tau_1''(x) - (1 - c/b)\tau_1'(x) - (c/b)\tau_1(x) = \alpha_2(x) + k_1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (27)$$

где

$$\alpha_2(x) = \alpha'_1(x) - \int_0^x [\omega_2(t) + (c/b)\alpha_1(t)] dt,$$

а k_1 — неизвестная пока постоянная.

При решении уравнения (27) могут быть три случая: 1) $c \neq -b$, $c \neq 0$; 2) $c = -b$; 3) $c = 0$. В случае 1 характеристическое уравнение уравнения (27) имеет два различных действительных корня: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -c/b$. В случае 2 характеристическое уравнение уравнения (27) имеет один двукратный действительный корень: $\lambda_{1,2} = 1$. В случае 3 характеристическое уравнение уравнения (27) имеет два различных действительных корня: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$.

Рассмотрим случай 1. Решая уравнение (27) при условиях

$$\tau_1(0) = \psi_1(0), \quad \tau_1'(0) = \frac{1}{2}\psi_1'(0) + \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0), \quad \tau_1''(0) = \frac{1}{2}\beta_1'(0) + \frac{1}{4}\psi_1''(0) + \frac{3\sqrt{2}}{4}\psi_2'(0), \quad (28)$$

находим

$$\begin{aligned} \tau_1(x) = & \frac{b}{b+c} \int_0^x [\exp(x-t) - \exp((c/b)(t-x))]\alpha_2(t) dt \\ & + \frac{b}{b+c} k_1 [\exp(x) - 1 - (b/c)(1 - \exp(-(c/b)x))] + k_2 \exp(x) + k_3 \exp(-(c/b)x), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} k_3 = & \frac{b}{b+c} \left[\psi_1(0) - \frac{1}{2}\psi_1'(0) - \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0) \right], \\ k_2 = & \frac{b}{b+c} \left[\frac{c}{b}\psi_1(0) + \frac{1}{2}\psi_1'(0) + \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0) \right], \\ k_1 = & \frac{1}{2}\beta_1'(0) + \frac{1}{4}\psi_1''(0) + \frac{3\sqrt{2}}{4}\psi_2'(0) - \alpha'_1(0) - k_2 - \frac{c^2}{b^2}k_3, \end{aligned}$$

а функция $\beta_1(y)$ определяется ниже (см. (36)).

Рассмотрим случай 2. Решая уравнение (27) при условиях (28), имеем

$$\tau_1(x) = \int_0^x (x-t) \exp(x-t) \alpha_2(t) dt + k_1 [1 - (1-x) \exp(x)] + (k_2 + k_3 x) \exp(x), \quad (30)$$

где

$$k_2 = \psi_1(0), k_3 = \frac{1}{2}\psi_1'(0) + \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0) - \psi_1(0),$$

$$k_1 = \frac{1}{2}\beta_1'(0) + \frac{1}{4}\psi_1''(0) + \frac{3\sqrt{2}}{4}\psi_2'(0) - \alpha_1'(0) + \psi_1(0) - \psi_1'(0) - \sqrt{2}\psi_2(0).$$

Рассмотрим случай 3. В этом случае уравнение (27) имеет вид

$$\tau_1''(x) - \tau_1'(x) = \alpha_2(x) + k_1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Интегрируя это уравнение от 0 до x , имеем

$$\tau_1'(x) - \tau_1(x) = \alpha_3(x) + k_1x + k_2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $\alpha_3(x) = \int_0^x \alpha_2(t) dt$, а k_2 — неизвестная пока постоянная.

Решая последнее уравнение при условиях (28), находим

$$\tau_1(x) = \int_0^x \exp(x-t)\alpha_3(t) dt + k_1[\exp(x) - x - 1] + k_2(\exp(x) - 1) + k_3 \exp(x),$$

где

$$k_3 = \psi_1(0), \quad k_2 = \frac{1}{2}\psi_1'(0) + \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0) - \psi_1(0),$$

$$k_1 = \frac{1}{2}\beta_1'(0) + \frac{1}{4}\psi_1''(0) + \frac{3\sqrt{2}}{4}\psi_2'(0) - \alpha_1'(0) - \frac{1}{2}\psi_1'(0) - \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0).$$

Теперь переходим к области G_{32} . Записываем решение уравнения (20) при $i = 3$, $k=2$, удовлетворяющее условиям (9), и $u_{32y}(x, 1) = \nu_4(x)$ ($\nu_4(x)$ — неизвестная пока достаточно гладкая функция, подлежащая определению):

$$u_{32}(x, y) = \frac{f_1(x+y-1) + f_1(x-y+1)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y+1}^{x+y-1} \nu_4(t) dt - \frac{1}{2} \int_1^y \exp(-(c/b)\eta) d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \omega_{32}(\xi) d\xi. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (6), находим

$$\omega_{32}(x) = \sqrt{2}\psi_5'(x) \exp(-(c/b)x), \quad -1 \leq x \leq -1/2. \quad (32)$$

Теперь переходим к области G_{31} . Записываем решение уравнения (20) при $i = 3$, $k = 1$, удовлетворяющее условиям (14), (15):

$$u_{31}(x, y) = \frac{\tau_2(y+x) + \tau_2(y-x)}{2} + \frac{1}{2} \int_{y-x}^{y+x} \nu_2(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x \omega_{31}(\eta) d\eta \int_{y-x+\eta}^{y+x-\eta} \exp(-(c/b)\xi) d\xi. \quad (33)$$

Подставляя (33) в условие (6), находим

$$\omega_{31}(x) = \sqrt{2}\psi_5'(x) \exp(-(c/b)x), \quad -1/2 \leq x \leq 0. \quad (34)$$

Воспользуемся равенством

$$\left(\frac{\partial u_{32}}{\partial x} - \frac{\partial u_{32}}{\partial y} \right) \Big|_{y=x+1} = \left(\frac{\partial u_{31}}{\partial x} - \frac{\partial u_{31}}{\partial y} \right) \Big|_{y=x+1}.$$

Тогда имеем

$$\omega_{32}(x) = \omega_{31}(x) = \sqrt{2}\psi'_5(x) \exp(-(c/b)x), \quad -1/2 \leq x \leq 0.$$

Из последнего равенства и (32) следует

$$\omega_{32}(x) = \sqrt{2}\psi'_5(x) \exp(-(c/b)x), \quad -1 \leq x \leq 0.$$

Подставляя (31) в (5), находим функцию $\nu_4(x)$:

$$\nu_4(x) = f'_1(x) - \psi'_4\left(\frac{x-1}{2}\right) + \int_1^{(1-x)/2} \exp(-(c/b)\eta) \omega_{32}(x-1+\eta) d\eta, \quad -1 \leq x \leq 0.$$

Таким образом, мы определили функцию $u_{32}(x, y)$. Введя обозначение $h_1(x) = u_{32}(x, x+1)$, для нахождения функции $u_{31}(x, y)$ получим условие

$$u_{31}(x, y)|_{y=x+1} = h_1(x). \quad (35)$$

Подставляя (33) в (35), получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_2(y)$ и $\nu_2(y)$:

$$\nu_2(y) = \beta_1(y) - \tau'_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (36)$$

где

$$\beta_1(y) = h'_1\left(\frac{y-1}{2}\right) - \int_0^{(y-1)/2} \exp(-(c/b)(y-\eta)) \omega_{31}(\eta) d\eta.$$

Переходим в область G_{42} . Запишем решение уравнения (20) при $i = 4, k = 2$, удовлетворяющего условиям (10), и $u_{42}(x, 2-x) = \nu_5(x)$, где $\nu_5(x)$ — неизвестная пока достаточно гладкая функция, подлежащая определению:

$$u_{42}(x, y) = \frac{f_2(x+y-1) + f_2(x-y+1)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y+1}^{x+y-1} \nu_5(t) dt - \frac{1}{2} \int_1^y \exp(-(c/b)\eta) d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \omega_{42}(\xi) d\xi. \quad (37)$$

Подставляя (37) в (8), получим

$$\omega_{42}(x) = -\sqrt{2}\psi'_7(x) \exp[(c/b)(x-1)], \quad 3/2 \leq x \leq 2. \quad (38)$$

Переходим в область G_{41} . Запишем решение уравнения (20) при $i = 4, k = 1$, удовлетворяющее условиям (16), (17):

$$u_{41}(x, y) = \frac{\tau_3(y+x-1) + \tau_3(y-x+1)}{2} + \frac{1}{2} \int_{y-x+1}^{y+x-1} \nu_3(t) dt + \frac{1}{2} \int_1^x \omega_{41}(\eta) d\eta \int_{y-x+\eta}^{y+x-\eta} \exp(-(c/b)\xi) d\xi. \quad (39)$$

Подставляя (39) в (8), находим

$$\omega_{41}(x) = -\sqrt{2}\psi'_7(x) \exp[(c/b)(x-1)], \quad 1 \leq x \leq 3/2. \quad (40)$$

Теперь будем пользоваться равенством

$$\left(\frac{\partial u_{42}}{\partial x} + \frac{\partial u_{42}}{\partial y} \right) \Big|_{y=2-x} = \left(\frac{\partial u_{41}}{\partial x} + \frac{\partial u_{41}}{\partial y} \right) \Big|_{y=2-x}.$$

Тогда после некоторых преобразований, в силу (40), имеем

$$\omega_{42}(x) = \omega_{41}(x) = -\sqrt{2}\psi'_7(x) \exp[(c/b)(x-1)], \quad 1 \leq x \leq 3/2.$$

Из последнего равенства и (38) следует

$$\omega_{42}(x) = -\sqrt{2}\psi'_7(x) \exp[(c/b)(x-1)], \quad 1 \leq x \leq 2.$$

Подставляя (37) в (7), находим

$$\nu_5(x) = \psi'_6\left(\frac{x+2}{2}\right) - f'_2(x) + \int_1^{x/2} \omega_{41}(x+1-\eta) \exp(-(c/b)\eta) d\eta, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

Таким образом, мы определили функцию $u_{42}(x, y)$. Введя обозначение $h_2(x) = u_{42}(x, 2-x)$, для определения функции $u_{41}(x, y)$ имеем условие

$$u_{41}(x, y)|_{y=2-x} = h_2(x). \quad (41)$$

Подставляя (39) в (41), имеем соотношение между неизвестными функциями $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$:

$$\nu_3(y) = \beta_2(y) + \tau'_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (42)$$

где

$$\beta_2(y) = h'_2\left(\frac{3-y}{2}\right) - \int_1^{(3-y)/2} \omega_{41}(\eta) \exp(-(c/b)(\eta-1+y)) d\eta.$$

Переходим в область G_1 . Переходя в уравнении (18) к пределу при $y \rightarrow 0$, находим $\omega_1(x) = \tau''_1(x) - \nu_1(x)$.

Далее, запишем решение уравнения (18), удовлетворяющее условиям (11), (14), (16):

$$\begin{aligned} u_1(x, y) = & \int_0^y \tau_2(\eta) G_\xi(x, y; 0, \eta) d\eta - \int_0^y \tau_3(\eta) G_\xi(x, y; 1, \eta) d\eta \\ & + \int_0^1 \tau_1(\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi - \int_0^y \exp(-(c/b)\eta) d\eta \int_0^1 \omega_1(\xi) G(x, y; \xi, \eta) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\}, \\ N(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\} \end{aligned}$$

— функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения (18).

Дифференцируя это решение по x и устремляя x к нулю и к единице, с учётом (36) и (42) после некоторых вычислений и преобразований получим систему двух интегральных уравнений типа Абеля относительно $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$. Применяя к этим уравнениям обращение Абеля, после некоторых вычислений приходим к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно неизвестных функций $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$:

$$\tau_2''(y) + \int_0^y K_1(y, \eta) \tau_2''(\eta) d\eta + \int_0^y K_2(y, \eta) \tau_3'(\eta) d\eta = g_1(y), \quad (43)$$

$$\tau_3'(y) + \int_0^y K_3(y, \eta) \tau_3'(\eta) d\eta + \int_0^y K_4(y, \eta) \tau_2''(\eta) d\eta = g_2(y), \quad (44)$$

где $K_1(y, \eta)$, $K_2(y, \eta)$, $K_3(y, \eta)$, $K_4(y, \eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ — известные функции, причём ядра $K_1(y, \eta)$ и $K_3(y, \eta)$ имеют слабую особенность $(1/2)$, а остальные функции непрерывны. Поэтому система уравнений (43), (44) допускает единственное решение в классе непрерывных функций. Решая эту систему, находим функции $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$ и тем самым функции $\nu_2(y)$, $\nu_3(y)$, $u_1(x, y)$, $u_{31}(x, y)$, $u_{41}(x, y)$. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены новые корректные краевые задачи для парабола-гиперболического уравнения третьего порядка в треугольной области, состоящей из одного прямоугольника и трёх треугольников. В прямоугольной области уравнение является параболическим. Прямые $x = 0$, $x = 1$ и $y = 0$ являются линиями изменения типа уравнения. В нижних треугольниках (левом и правом) уравнение принадлежит гиперболическому типу. При построении решения в нижнем характеристическом треугольнике, записывая решение уравнения (19) при $i = 2$, удовлетворяющее условиям (11), (12), и подставляя это решение в условия (3) и (4), находим функцию $\omega_2(x)$. Затем подставляя это решение в условие (2), получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$. Далее, переходя в уравнениях (1) (в G_1) и (19) при $i = 2$ к пределу при $y \rightarrow 0$, получим ещё два соотношения между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$. Исключая из этих трёх соотношений функции $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно $\tau_1(x)$, в правой части которого участвует одна неизвестная постоянная. Решая это уравнение при известных трёх условиях, находим функцию $\tau_1(x)$ и тем самым функцию $\nu_1(x)$. Аналогично, в левом и правом треугольниках с помощью записанных решений, устремляя x к нулю и к единице, получим два соотношения между неизвестными функциями $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$ и $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$ соответственно. Далее, переходя в уравнении (18) к пределу при $y \rightarrow 0$, находим неизвестную функцию $\omega_1(x)$. В параболической части прямоугольной области записано представление решения через известную функцию Грина первой краевой задачи. Дифференцируя это решение по x и полагая $x \rightarrow +0$ и $x \rightarrow 1 - 0$, получим ещё два соотношения между неизвестными функциями $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$ и $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$ соответственно. Исключая из этих четырёх соотношений функции $\nu_2(y)$ и $\nu_3(y)$, мы приходим к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$. Однозначная разрешимость этой системы следует из теории интегральных уравнений. Решая эту систему, находим следы решения $\tau_2''(y)$, $\tau_3'(y)$. Тем самым мы доказали однозначную разрешимость поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.; Л.: Гостехиздат, 1947.

2. *Gellerstedt S.* Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte: These pour le doctorat. Uppsala, 1935.
3. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М., 1959. (Итоги науки. Физ.-мат. науки).
4. *Бабенко К.И.* К теории уравнений смешанного типа: Дис. докт. физ.-мат. наук. М., 1952.
5. *Кароль И.Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптического-гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 2. С. 197–200.
6. *Франкль Ф. И.* О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1945. Т. 9, № 2. С. 126–142.
7. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
8. *Салахитдинов М.С.* Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974.
9. *Гельфанд И.М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, вып. 3(87). С. 3–19.
10. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979.
11. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986.
12. *Джураев Т.Д., Мамажанов М.* Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 25–31.
13. *Тахиров Ж.О.* Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения с известной и неизвестной линиями раздела: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 1988.
14. *Бердышев А.С.* Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов. Алматы, 2015.

UDC 517.956.6

**ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER
EQUATION OF PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE
IN A TRIANGULAR DOMAIN WITH THREE LINES
OF CHANGE OF THE EQUATION TYPE**

© 2022 M. Mamajonov^{1a}, H. M. Shermatova^{2b}

¹*Kokand State Pedagogical Institute named Mukimi,
ul. Turon 23, Kokand 150700, Uzbekistan,*

²*Fergana State University, ul. Murabbiylar 19, Fergana 150100, Uzbekistan*

E-mails: ^amirzamamajonov@gmail.com, ^bhilola-1978@mail.ru

Received 13.01.2022, revised 03.03.2022, accepted 22.06.2022

Abstract. We consider one boundary value problem for a parabolic-hyperbolic type equation in a triangular domain with three lines of type change, when the characteristic of the first-order operator is parallel to the axis y . The theorem of existence and uniqueness of the solution of the formulated problem is proved.

Keywords: differential and integral equations, solution construction method, boundary value problem, parabolic-hyperbolic type equation, unique solvability.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.309

REFERENCES

1. Tricomi F. O lineinykh uravneniyakh v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka smeshannogo tipa [On linear second-order partial differential equations of mixed type]. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1947 (in Russian).
2. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte: These pour le doctorat. Uppsala, 1935.
3. Bitsadze A.V. Uravneniya smeshannogo tipa [Mixed type equations]. Moscow, 1959. (Itogi nauki. Fiz.-mat. nauki [Results of science. Physical and mathematical sciences]) (in Russian).
4. Babenko K.I. K teorii uravnenii smeshannogo tipa [On the theory of equations of mixed type]. Dis. Dokt. Fiz.-Mat. Nauk [Thesis Doc. Phys.-Math. Sciences]. Moscow, 1952.
5. Karol' I.L. Ob odnoi kraevoi zadache dlya uravneniya smeshannogo elliptiko-giperbolicheskogo tipa [On a boundary value problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type]. *Dokl. AN SSSR*, 1953, Vol. 88, No. 2, pp. 197–200 (in Russian).
6. Frankl' F. I. O zadachakh Chaplygina dlya smeshannykh do- i sverkhzvukovykh techenii [On Chaplygin's problems for mixed subsonic and supersonic flows], *Izv. AN SSSR. Ser. Matematika*, 1945, Vol. 9, No. 2, pp. 126–142 (in Russian).
7. Smirnov M. M. Uravneniya smeshannogo tipa [Equations of mixed type]. Moscow: Nauka, 1970 (in Russian).
8. Salakhitdinov M.S. Uravneniya smeshanno-sostavnogo tipa [Equations of mixed-composite type]. Tashkent: Fan, 1974 (in Russian).
9. Gel'fand I.M. Nekotorye voprosy analiza i differentsial'nykh uravnenii [Some questions of analysis and differential equations]. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1959, Vol. 14, vyp. 3(87), pp. 3–19 (in Russian).

10. Dzhuraev T.D. Kraevye zadachi dlya uravnenii smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov [Boundary value problems for equations of mixed and mixed composite types]. Tashkent: Fan, 1979 (in Russian).
11. Dzhuraev T.D., Sopuev A., Mamazhanov M. Kraevye zadachi dlya uravnenii parabolo-giperbolicheskogo tipa [Boundary value problems for equations of parabolic-hyperbolic type]. Tashkent: Fan, 1986 (in Russian).
12. Dzhuraev T.D., Mamazhanov M. Kraevye zadachi dlya odnogo klassa uravnenii chetvertogo poryadka smeshannogo tipa [Boundary value problems for a class of fourth-order mixed-type equations]. *Diff. Uravn.*, 1986, Vol. 22, No. 1, pp. 25–31 (in Russian).
13. Takhirov Zh.O. Kraevye zadachi dlya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo uravneniya s izvestnoi i neizvestnoi liniyami razdela [Boundary value problems for a mixed parabolic-hyperbolic equation with known and unknown separation lines]: Avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk [Abstract dis. cand. phys.-math. sci.]. Tashkent, 1988 (in Russian).
14. Berdyshev A.S. Kraevye zadachi i ikh spektral'nye svoistva dlya uravneniya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo i smeshanno-sostavnogo tipov [Boundary value problems and their spectral properties for an equation of mixed parabolic-hyperbolic and mixed-composite types]. Almaty, 2015 (in Russian).