

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год
Том 25, №3(91)
Июль - сентябрь 2022 г.

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

СОДЕРЖАНИЕ

Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением	5
Дурдиев Д. К., Меражова Ш. Б. Обратная задача для двумерного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в цилиндрической области	14
Иванов В. В. Притягивающий предельный цикл модели нечётномерной кольцевой генной сети	25
Имомназаров Б. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Худайназаров Б. Б. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении	33
Ковалёв М. Д. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике	41
Куликов И. М., Черных И. Г., Ульяничев И. С., Тутуков А. В. Математическое моделирование ядерного горения углерода в белых карликах с использованием 7-изотопной сети реакций	55
Купцова Е. В. Осциллятор Ван дер Поля под действием случайного шума	67
Лазарева Г. Г., Максимова А. Г. Численное моделирование распространения паров вольфрама над нагреваемой поверхностью	81
Мамажонов М., Шерматова Х. М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения	93
Минаков А. В., Лобасов А. С., Шебелев А. В., Зайцев Д. В., Кабов О. А. Режимы течения плёнки жидкости, увлекаемой потоком газа в плоском горизонтальном канале, в изотермических условиях	104
• Митрофанов Г. М., Карчевский А. Л. Математическое моделирование для тонкослоистых упругих сред в сейсморазведке	120
Перцев Н. В., Топчий В. А., Логинов К. К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций	135
Романов В. Г., Бугуева Т. В. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения	154
Старовойтов В. Н., Старовойтова Б. Н. Усреднённая математическая модель периодической упругой структуры, насыщенной жидкостью Максвелла	170

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 519.633.6:550.8.055

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ТОНКОСЛОИСТЫХ УПРУГИХ СРЕД В СЕЙСМОРАЗВЕДКЕ

© 2022 Г. М. Митрофанов^{1,3,4,a}, А. Л. Карчевский^{2,b}

¹*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 3, г. Новосибирск 630090, Россия,*

²*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*

³*Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,*

⁴*Новосибирский государственный технический университет,
просп. К. Маркса, 20, г. Новосибирск 630073, Россия*

E-mails: ^ageorgymitrofanov@rambler.ru, ^bkarchevs@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 13.05.2022 г.; после доработки 31.05.2022 г.;
принята к публикации 22.06.2022 г.

Рассматриваются некоторые вопросы математического моделирования волновых полей, связанных с тонкослоистыми объектами горизонтально-слоистой среды. При описании процессов распространения волн используются системы дифференциальных уравнений в частных производных, которые отвечают теории упругости. В результате получаются как вертикальные, так и горизонтальные компоненты смещений, что важно для постановки и анализа сейсмических полевых работ с трёхкомпонентными приборами. Кроме того, в математической постановке задачи используется заглублённый источник типа центра расширения, что приближает модельные результаты к реальному эксперименту. Анализируется решение задачи, записанное в спектральной форме, что может оказаться существенным при его использовании для решения обратных динамических задач сейсмологии. В работе представлены не только вычислительные особенности предлагаемой схемы решения задачи, но и проведено исследование получаемых волновых полей с точки зрения их использования в процессах обработки и интерпретации реальных сейсмических данных.

Ключевые слова: система уравнений теории упругости, вертикальное смещение, горизонтальное смещение, горизонтально-слоистая изотропная среда, временная частота, пространственная частота.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.311

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование волновых полей стало неотъемлемой частью современных обрабатывающих комплексов в сейсморазведке. Ещё большее значение оно имеет на этапах интерпретации сейсмических данных. Его активно используют при планировании сейсмических работ, идентификации и увязывании горизонтов, при сопоставлении окончательных результатов обработки с данными акустического каротажа и т. п. На нём основан метод псевдоакустического каротажа [1], представляющий собой одну из попыток решения обратной динамической задачи по реальным данным. В большинстве существующих и активно используемых в практике методов математического моделирования, как правило, лежат уравнения акустики. Это

связано с двумя фактами. Во-первых, математическое решение соответствующих задач хорошо проработано и не вызывает больших сложностей. Во-вторых, практическая сейсморазведка длительное время была направлена на регистрацию, выделение и интерпретацию отражённых P -волн, что позволяло достаточно хорошо приблизить окончательные результаты обработки реальных данных к решению задачи акустики [2].

Появившийся в последнее время интерес практической сейсморазведки к анализу нескольких компонент смещений и к способам обработки данных, которые направлены на выделение и интерпретацию обменных волн типа PS [3], требует развития более сложного аппарата математического моделирования, чем существующие. Очевидно, что уравнения акустики здесь совершенно неприемлемы и требуется использование уравнений, отвечающих теории упругости.

В настоящей работе рассматривается построение решений для таких уравнений в случае горизонтально-слоистых моделей сред, которые достаточно часто возникают при анализе месторождений углеводородов (УВ). В случае изотропной модели среды будем иметь дело с системой двух дифференциальных уравнений второго порядка. В качестве модели для источника берётся заглублённый точечный источник типа центра расширения, который может служить хорошим приближением для взрывных источников при наземных сейсмических работах или аэроганов, используемых при морских исследованиях. Заметим, что подобный источник не позволяет системе уравнений теории упругости распасться на отдельные уравнения.

Существует значительное число работ, направленных на решение указанной задачи. При этом наиболее распространёнными методами решения можно считать асимптотические [4–10], конечно-разностные [11, 12] схемы, метод послойного пересчёта для горизонтально слоистых сред [13–15]. В настоящей работе для решения прямой задачи будут использованы идеи и методы, изложенные в [16, 17]. Основным здесь является сведение решения системы дифференциальных уравнений теории упругости к решению дифференциального матричного уравнения Риккати. Замечательным оказывается тот факт, что уравнение Риккати для постоянных коэффициентов имеет решение, которое представляется в аналитическом виде. Оно может быть записано в таком виде, что при численной его реализации ошибка вычислений не накапливается. Используемый алгоритм в полной мере учитывает специфику модели среды — её горизонтальную слоистость. Используя идеи и методы указанных работ, нами был создан и реализован эффективный алгоритм решения прямой задачи, который позволяет успешно использовать его при решении обратной задачи. Фактически сам математический алгоритм для решения прямой задачи и его программная реализация были созданы именно для этой цели (см., например, [18–22]).

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем характеризовать модель среды тремя общепринятыми в сейсморазведке параметрами $v_p(z)$, $v_s(z)$ и ρ , которые связаны известными соотношениями с упругими коэффициентами Ламе λ и μ . В силу горизонтальной слоистости модели среды на границах слоёв z_k , $k = \overline{0, N}$, параметры модели могут скачкообразно изменяться, а внутри слоёв они имеют постоянные значения. Будем считать, что $z_0 = 0$ и последний $N + 1$ слой — это подстилающий слой ($z \in [z_N, \infty)$). Таким образом, любой из параметров модели представляет собой кусочно-постоянную функцию переменной z , $z \in (0, \infty)$. Поведение поля смещений на свободной поверхности будет определяться краевыми условиями.

В начальный момент времени $t = 0$ источником центр расширения

$$\rho_* \pi \nabla_{x,y,z} \delta(z, y, z - z_*) F(t) = -\rho_* \nabla_{r,\phi,z} \delta'(r) \delta(z - z_*) F(t) \quad (1)$$

в среде возбуждаются упругие колебания [23]. Здесь z_* , $z_* > 0$, $z_* \neq z_k$, $k = \overline{0, N}$, — глубина, на которой расположен источник, $F(t)$ — форма импульса возбуждаемого в источнике, $\delta(x, y, z)$ — дельта-функция Дирака, ρ_* — плотность среды, в которой произошёл взрыв.

Осесимметричность модели среды и источника колебаний позволяет нам рассматривать уравнения в цилиндрической системе координат. Вектор смещений не зависит от угловой координаты и имеет только две компоненты: радиальную (горизонтальную) $u(r, z, t)$ и вертикальную $w(r, z, t)$. Для изотропной среды система уравнений теории упругости может быть записано в виде системы из двух скалярных уравнений относительно компонент вектора смещений [24]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_* \delta''(r) \delta(z - z_*) F(t) \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (\mu w) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_* \delta'(r) \delta'(z - z_*) F(t) \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda u) \right). \end{aligned}$$

Для перехода к уравнениям, которые будут использованы при решении прямой задачи, применим преобразование Фурье — Бесселя по переменной r и Лапласа по переменной t (см. [4, 5])

$$\hat{u}(\nu, z, p) = \int_0^\infty e^{pt} \int_0^\infty u(r, z, t) r J_1(\nu r) dr dt, \quad \hat{w}(\nu, z, p) = \int_0^\infty e^{pt} \int_0^\infty w(r, z, t) r J_0(\nu r) dr dt.$$

Здесь $p = -\alpha + i\omega$ — параметр преобразования Лапласа (α — параметр затухания, $\omega = 2\pi f$ — круговая частота, f — временная частота (Гц)), ν — параметр преобразования Фурье — Бесселя, $J_0(r)$ и $J_1(r)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядков.

Верхняя система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} - \nu \mu \hat{w} \right) - \nu \lambda \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} - ((\lambda + 2\mu)\nu^2 + \rho p^2) \hat{u} &= \nu \rho_* \delta(z - z_*) \hat{F}(p), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} + \nu \lambda \hat{u} \right) + \nu \mu \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} - (\mu \nu^2 + \rho p^2) \hat{w} &= \rho_* \delta'(z - z_*) \hat{F}(p). \end{aligned}$$

Определим краевые условия. Считаем, что на поверхности напряжения отсутствуют, а на бесконечности смещения затухают:

$$\left(\mu \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} - \nu \mu \hat{w} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} + \nu \lambda \hat{u} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \hat{u}, \hat{w} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty).$$

Считаем, что на границах слоёв z_k , $k = \overline{1, N}$, поля смещений и напряжений не рвутся, т. е. имеют места следующие условия склейки:

$$\left[\mu \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} - \nu \mu \hat{w} \right]_{z_k} = 0, \quad \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} + \nu \lambda \hat{u} \right]_{z_k} = 0, \quad [\hat{u}]_{z_k} = 0, \quad [\hat{w}]_{z_k} = 0.$$

Здесь $[g]_z = g(z+0) - g(z-0)$ обозначает скачок функции g в точке z .

В работах [16, 17] изложен алгоритм решения прямой задачи, поставленной выше.

Общее решение задачи может быть представлено следующей схемой:

— переход от сейсмических данных $u(r, 0, z, t)$ и $w(r, 0, z, t)$ к частотным данным $\hat{u}(\nu, 0, p)$ и $\hat{w}(\nu, 0, p)$;

- решение прямой и обратной задач в спектральной области;
- обратный переход из спектральной области к данным, зависящим от переменных r и t .

На вход этой схемы подаются: описание модели, параметры расстановки сейсмоприёмников, глубина источника и вид сигнала возбуждаемого в нём, а на выходе получаем две сейсмограммы, отвечающие вертикальной и горизонтальной компонентам.

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Согласно общей схеме, решение задачи, построенное в спектральной области, может быть путём соответствующих обратных преобразований Фурье — Бесселя по пространственной частоте и Лапласа по временной частоте переведено в пространственно-временное представление функций $w(r, 0, t)$ и $u(r, 0, t)$. Такой переход обеспечивает получение двухкомпонентной модельной сейсмограммы. При этом возникает ряд особенностей, на которых остановимся ниже.

В качестве иллюстрации взята модель, содержащая относительно тонкий слой на глубине 500 м. Модель отвечает контрастному газонасыщенному песчанику, а её параметры приведены в табл. 1. Несмотря на свою простоту, модель позволяет детально исследовать вычислительные особенности решения задачи в спектральной области и требования к соответствующим обратным преобразованиям.

Таблица 1

Параметры модели тонкого слоя

Номер слоя	h (м)	v_p (м/с)	v_s (м/с)	ρ (г/см ³)
1	500	2000	800	2.2
2	550	1800	850	2.1
3	∞	2500	1100	2.3

При осуществлении обратного преобразования по пространственной частоте требуется вычислить два интеграла с функциями Бесселя нулевого и первого порядков, которые отвечают соответствующим прямым преобразованиям. При вычислении этих интегралов использовались квадратурные формулы Гаусса с 64 ординатами, что обеспечивало хорошее приближение даже для сильно изрезанных спектров [25]. Для построения обратного преобразования Лапласа использован метод Файлона при вычислении соответствующего тригонометрического интеграла, который также обладает повышенной точностью [26–28].

Важным моментом для правильного использования указанных вычислительных процедур являлось хорошее понимание структуры исходных спектров, которые получаются в процессе решения прямой задачи. Такое изучение было проведено на большом количестве различных правдоподобных моделей среды и для реальных расстановок приёмников. Полученные при этом характерные особенности в поведении двумерных спектров иллюстрируется рис. 1, где представлены значения действительной и мнимой составляющих спектра вертикальной компоненты $\hat{w}(\nu, 0, p)$, которые были рассчитаны для указанной выше модели при $\alpha = 0.01$. Заметим, что спектр горизонтальной компоненты имел аналогичную структуру и подобную же структуру имели спектры, которые рассчитывались для других моделей.

На рис. 1(а) представлены рассчитанные значения спектра $\hat{w}(\nu, 0, p)$ в интервале временных частот от 1 до 151 Гц с шагом 3 Гц. Отчётливо видно, что значения спектров носят существенно нерегулярный характер и могут быть выделены области как с плавным, так и с резким изменением значений. При этом области резких изменений в значениях спектров достаточно локализованы и смещаются по пространственной частоте ν при увеличении временной частоты f . При переходе к более узким интервалам временных частот (см. рис. 1(б)) можно

наиболее отчётливо наблюдать различие в характере вариаций значений спектра в зависимости от ν . Здесь же видны некоторые проявления неустойчивости, которые могут быть связаны с построенным решением. Отметим, что указанная неустойчивость носит случайный характер, а величина получаемых отклонений значительно меньше по сравнению с общими вариациями спектра.

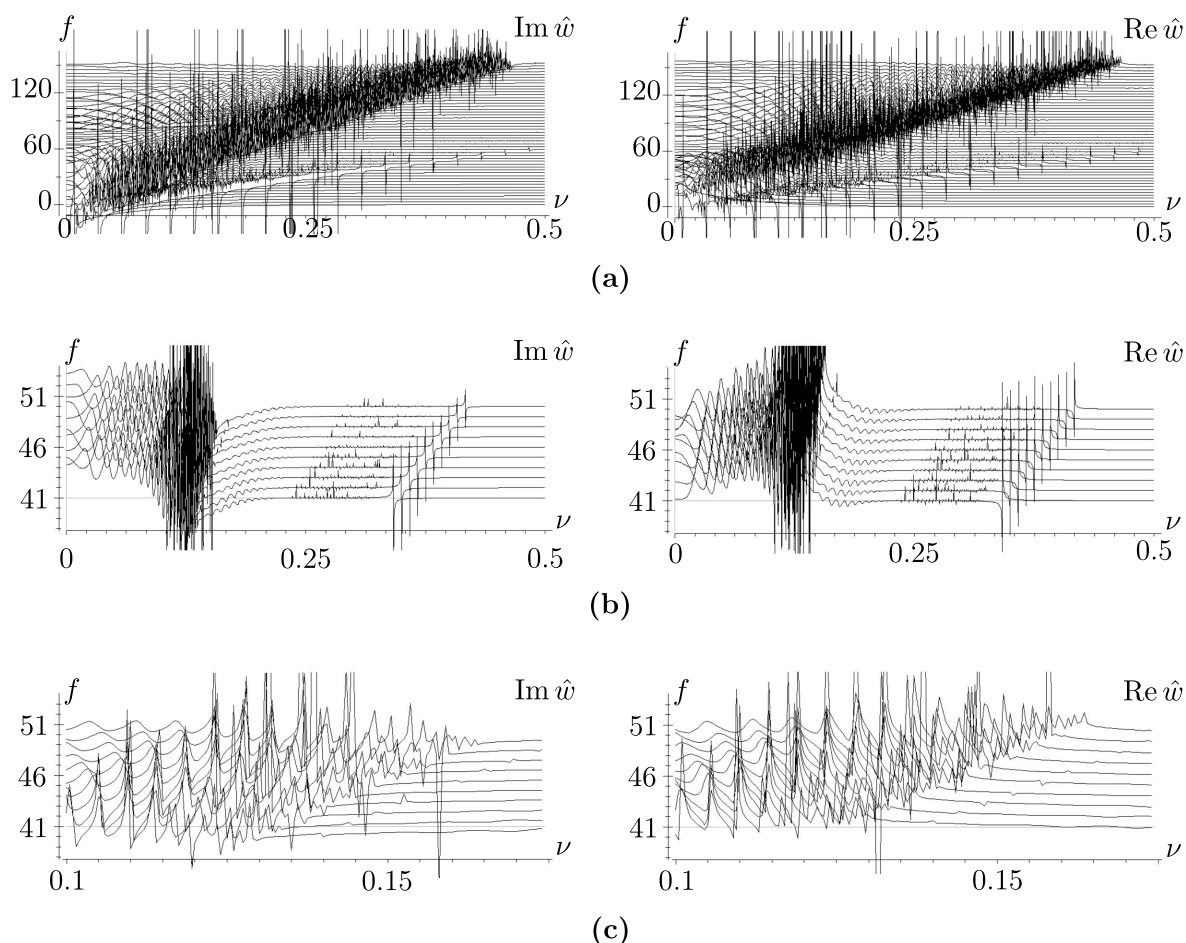


Рис. 1. Значения двумерного спектра (вертикальная компонента), полученные для различных интервалов пространственной и временной частот: (а) широкий интервал пространственной и временной частот; (б) более узкий интервал временной частоты; (с) узкие интервалы пространственной и временной частот

Укажем на одну важную особенность полученных значений двумерных спектров $\hat{w}(\nu, 0, p)$. Она связана с их поведением в областях с резкими изменениями значений спектров. Представление о структуре таких вариаций даёт рис. 1(с), где в увеличенном масштабе по оси ν показаны значения спектра рис. 1(б). Видно, что в этих областях структура спектра близка к разрывным или δ -функциям. Нам пока недостаточно ясна природа соответствующих различий в вариациях спектров. В то же время возможность выделения из получаемого решения определённых составляющих, относящихся к некоторым фиксированным границам (что отмечалось во введении), позволило показать следующее. Самая правая вариация разрывного вида (на рис. 1(б) она наблюдается при значениях $\nu > 0.3$) соответствует составляющей решения, связанной со свободной поверхностью.

Подробный анализ двумерных спектров позволил нам более осознанно подойти к решению вопроса об их дискретизации и вычислению интегралов, отвечающих обратному преобразованию Фурье — Бесселя по пространственной частоте. Например, исходя из формальных

соображений, аналогичных преобразованию Фурье, можно сделать оценку требуемого шага по пространственной частоте ν . Так, если нам требуется рассчитать сеймотрассы для расстановки с максимальным выносом $L = 2500$ м, то предполагаемый шаг $\Delta\nu$ должен быть порядка $1/L = 0.0004$. В то же время, согласно рис. 1(с), где имеется приблизительно такой же шаг, для областей с высокой вариацией значений спектров величина шага $\Delta\nu$ должна быть существенно уменьшена. Наши эксперименты показывают, что для указанных областей требуется почти стократное уменьшение величины шага $\Delta\nu$ для обеспечения достаточной вычислительной устойчивости при вычислении соответствующих интегралов по квадратурным формулам Гаусса. В случае недостаточной величины шага по ν в определяемом волновом поле появляются значительные артефакты.

Теперь обратимся к обратному преобразованию Лапласа. Здесь также можно находиться на формальных позициях и не получить хорошего результата. Так, исходя из хорошо известных связей между дискретизацией во временной и частотной областях для преобразования Фурье, несложно сделать грубые оценки для соответствующих шагов и интервалов дискретизации в нашем случае. Например, если мы хотим получить модельную запись до 2.5 с с шагом 2 мс, то нам необходимо взять интервал частот до 250 Гц с шагом по частоте 0.4 Гц. В то же время проведенный анализ как двумерных спектров, так и обычных одномерных, полученных в результате интегрирования по ν (см. рис. 2), показывает, что спектр по временной частоте будет иметь существенно более изрезанный характер, чем предполагалось, особенно для горизонтальной компоненты. Последнее связано с тем, что построенное решение задачи имеет в своей структуре информацию о значительном количестве волн, наблюдаемых на различных временных интервалах. Очевидно, что вклад таких составляющих может быть существенно уменьшен путём выбора параметра α в преобразовании Лапласа, о чем свидетельствуют результаты рис. 2.

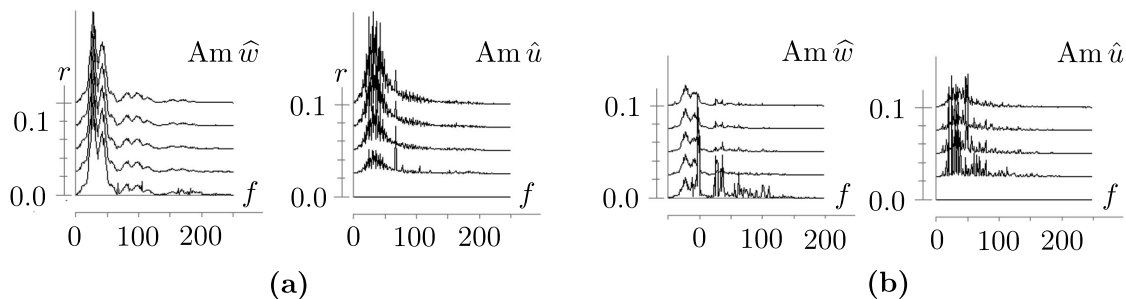


Рис. 2. Амплитуды спектра трасс, полученные для различных значений параметра α : (a) 0.01; (b) 0.1

Отметим, что приведённые на рис. 2 спектры рассчитаны по решению задачи, из которого были исключены составляющие, связанные с поверхностью наблюдений. Это сделано с целью последующего детального анализа различных типов отражённых волн.

На рис. 3 и 4 приведены результаты общего решения задачи, построенного для рассматриваемой модели среды. Они отвечали параметрам: $\alpha = 0.1$, $\Delta\nu = 0.0005$, $\Delta f = 0.15$ при интервалах $\nu \in [0, 0.5]$ (1/м) и $f \in [0.001, 150]$ Гц, которые использовались при определении спектров рис. 2(б).

На рис. 3 показаны пять трасс, которые относятся к различным точкам приёма, расположенным на линии профиля, совпадающей с координатой r . При этом источник помещён в точку $r = 0$ и имеет заглубление 15 м. Точки приёма обладают небольшим удалением от источника, и из решений были исключены составляющие, отвечающие поверхности наблюдений. Полученные трассы хорошо интерпретируются и на них отчётливо видны не только основные волны, включая и обменную, но и кратные. Уровень мешающих компонент, вызван-

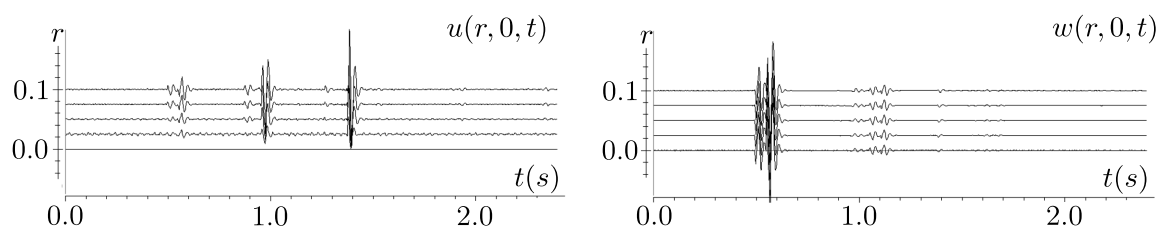


Рис. 3. Ближние трассы для горизонтальной $u(r, 0, t)$ и вертикальной $w(r, 0, t)$ компонент, полученные на основе значений двумерных спектров, рассчитанных с применением предлагаемого алгоритма

ных особенностями построенного решения и переходом во временную область, достаточно мал и уменьшается с удалением от источника. Подобное поведение решения можно наблюдать и по спектрам, изображённым на рис. 2(b). Отметим, что на сейсмограммах, которые получались по спектрам, отвечающим рис. 2(a), уровень помех на ближних каналах сопоставим с уровнем основных отражённых волн.

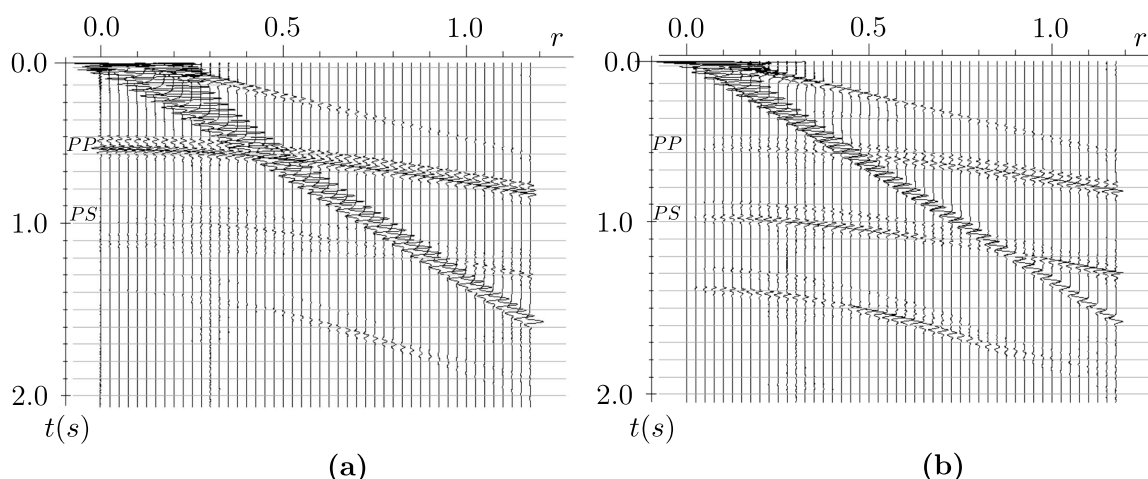


Рис. 4. Результирующие сейсмограммы вертикальной (а) и горизонтальной (б) компонент, полученные для модели слоя

Двухкомпонентная сейсмограмма рис. 4 представляет полное волновое поле, рассчитанное для модели, приведённой в табл. 1. При построении сейсмограммы использовались параметры, указанные выше и относящиеся к рис. 3. Показанная сейсмограмма позволяет проанализировать особенности формирования волн на вертикальной и горизонтальной компонентах приёма, в частности, проследить изменение динамики различных составляющих волнового поля в точках приёма, которые отвечают различным удалениям от источника. Так, например, отчётливо видно изменение амплитуды и динамики обменной и поперечной волн с удалением от источника на горизонтальной компоненте. При этом обменная волна медленнее затухает с удалением, чем поперечная, что является хорошо известным теоретическим фактом. Одновременно можно наблюдать присутствие составляющих обменных и поперечных волн на вертикальной компоненте. Этот факт также хорошо известен в практической сейсморазведке. Кроме указанных фактов важным для последующей обработки и интерпретации являются получаемые различия в амплитудах сигналов, относящихся к различным типам волн и наблюдаемых на горизонтальной и вертикальной компонентах.

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ МОДЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

В рамках подготовленной работы такой анализ был выполнен путём сравнения модельных данных, полученных различными способами. В качестве альтернативных способов решения прямой задачи, с которыми сопоставлялся предлагаемый алгоритм, выступали: решение соответствующей задачи на основе метода потенциалов [4], лучевого метода [29] и конечно-разностных схем [11]. Преимущества и недостатки каждого из указанных способов хорошо известны. Поэтому в рамках данной работы не предполагалось анализировать их особенности и преимущества. Нашей целью являлась проверка работоспособности предлагаемого нами алгоритма, а также оценка его возможностей в сопоставлении с хорошо известными методами.

Перейдём к анализу результатов, которые были получены на этом уровне исследований.

1. Воспользовавшись методом потенциалов, аналогично работе [5] несложно построить решение задачи в спектральной области для тонкого слоя (соответствующие построения и вычисления были выполнены В. В. Бузлуковым). При этом могут быть получены отдельно спектральные характеристики для отражённых волн: PP (вертикальная компонента) и PS (горизонтальная компонента). Теперь можно воспользоваться построенным на основе рассматриваемого алгоритма волновым полем и выделить из его структуры соответствующие волновые объекты. Затем рассчитать по ним спектральные характеристики и сопоставить их с полученным по методу потенциалов решением. На рис. 5 представлены как рассчитанные значения спектральных характеристик отражения, так и соответствующие разности. Видно, что максимальное различие в спектральной области не превышает 2% и его максимум отвечает наблюдениям с наибольшим удалением источник-приёмник. Отметим, что для обеспечения более высокого совпадения результатов в данном эксперименте использовалось волновое поле, из которого были исключены составляющие, отвечающие поверхности наблюдений. Также для получения сопоставляемых коэффициентов отражения спектры отражённых сигналов были разделены на спектр исходного импульса.

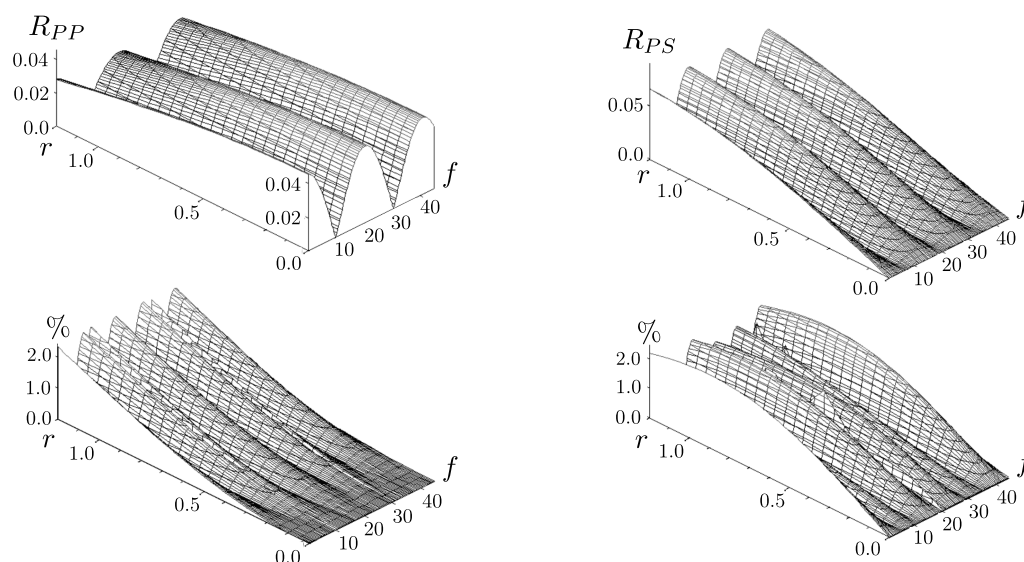


Рис. 5. Частотно-зависимые коэффициенты отражения, рассчитанные по сигналам отражённой (слева) и обменной (справа) волн. Внизу показана величина разности между рассчитанными и полученными на основе метода потенциалов коэффициентами

2. Имевшиеся в нашем распоряжении программы позволяли рассчитывать лучевым методом только значения вертикальной компоненты волнового поля. Поэтому на рис. 6(а) приведены фрагменты волнового поля только данной компоненты (как и в предыдущем эксперименте, здесь исключены составляющие отвечающие поверхности наблюдений). Видно, что

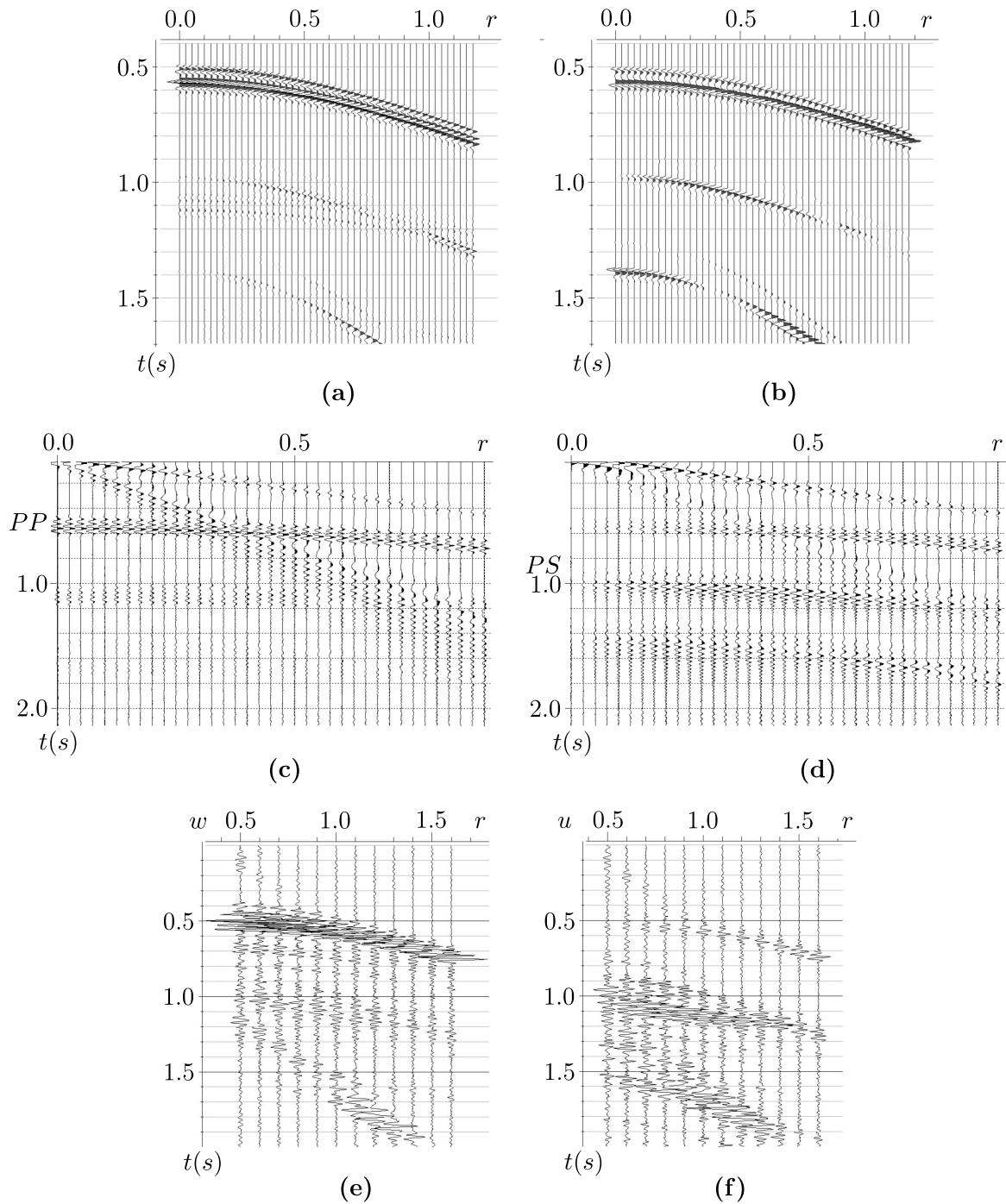


Рис. 6. Сопоставление различных методов моделирования:

- (а) сейсмограмма вертикальной компоненты, рассчитанная для модели тонкого слоя предложенным алгоритмом; (б) та же сейсмограмма, рассчитанная лучевым методом;
- (с, d) сейсмограммы вертикальной и горизонтальной компонент, рассчитанные для модели тонкого слоя на основе разностных схем;
- (е, f) сейсмограммы вертикальной и горизонтальной компонент, рассчитанные для модели тонкослоистого объекта предложенным алгоритмом

в целом основные составляющие поля совпадают для обоих способов. Но в тоже время видно и их существенное различие в плане динамики формируемых волн. Следует отметить, что

при построении обеих сейсмограмм использовался один и тот же исходный импульс типа затухающей синусоиды. (Его структуру можно видеть в прямой волне на рис. 4(а).) Как видно, структура исходного импульса изменяется при распространении продольной волны в упругой среде (см. рис. 6(а)). Это проявляется в изменении формы импульса на дальних каналах. Подобный эффект отсутствует при лучевом моделировании (см. рис. 6(б)). Ещё большее различие наблюдается в динамике обменных и поперечных волн, наблюдаемых на вертикальной компоненте. Даже если пренебречь соотношением получаемых составляющих волнового поля, видно, что для указанных волн получаем различную структуру их формирования в зависимости от удаления приёмника от источника. С учётом того, что источник колебаний представлял собой заглублённый центр расширения, решение, полученное по предлагаемой методике, более интерпретируемо, чем решение, построенное по лучевому методу. В последнем случае коэффициенты отражения носят явно формальный характер (особенно для поперечной волны).

3. При сопоставлении результатов, полученных на основе разностной схемы и предлагаемого алгоритма, сравнивались результаты, представленные на рис. 4 и 6(с, d). Наиболее значимое различие заключается в размытии исходного импульса для модельных сигналов в случае применения разностной схемы. Это известный факт. Его можно корректировать через существенное уменьшение шага сетки. Но более существенным моментом, по нашему мнению, является отсутствие выразительных динамических особенностей, которые должны проявляться в форме сигналов обменной волны. Из результатов рис. 4(б) следует, что оптимальная база выделения сигналов PS -волны находится в пределах удалений 100–700 м. По результатам моделирования с применением разностных схем выделение такого интервала не удалось выделить.

Приведённые результаты продемонстрировали высокую точность предлагаемого алгоритма при моделировании волнового поля для простой модели среды. Поэтому следующим шагом в проводимом исследовании было использование алгоритма для модели среды, близкой к реальной. В качестве последней взята модель тонкослоистого объекта, содержащая 30 слоёв (см. табл. 2).

Таблица 2

Параметры модели тонкослоистого объекта

№ слоя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_k (м)	20	400	470	480	487	493	490	497	504	512
v_p (км/с)	2.200	2.300	2.509	2.014	2.568	2.200	1.879	2.706	2.907	3.245
v_s (км/с)	0.750	0.800	0.906	1.001	0.820	0.845	1.136	1.279	1.493	1.356
ρ (г/см ³)	2.070	2.170	2.250	2.170	2.260	2.200	2.140	2.280	2.310	2.370
№ слоя	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
z_k (м)	517	523	530	535	544	550	557	564	571	582
v_p (км/с)	3.015	2.057	2.500	2.060	2.518	2.284	2.440	2.500	3.050	2.700
v_s (км/с)	0.679	0.975	0.679	0.679	0.982	0.821	0.927	0.975	1.373	1.107
ρ (г/см ³)	2.330	2.170	2.250	2.170	2.250	2.210	2.240	2.250	2.330	2.280
№ слоя	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
z_k (м)	590	594	609	616	621	640	680	800	9000	∞
v_p (км/с)	2.630	2.570	2.560	3.230	2.320	2.800	3.300	3.500	3.640	3.800
v_s (км/с)	1.052	1.002	0.998	1.485	0.824	1.120	1.500	1.800	1.900	2.000
ρ (г/см ³)	2.270	2.260	2.226	2.370	2.220	2.300	2.390	2.400	2.480	2.500

Нашей целью на данном уровне исследования не являлось обеспечить наилучшее совпаде-

ние реальной и модельной сейсмограмм. Для нас было важно обеспечить проверку работоспособности предлагаемого алгоритма на уровне построения сейсмограмм для моделей высокой сложности.

На рис. 6(е, f) показаны вертикальная и горизонтальная сейсмограммы, рассчитанные на основе предлагаемого алгоритма. Из них для повышения детальности анализа полученного волнового поля исключены составляющие, отвечающие поверхности наблюдений. Видно, что полученные волновые поля обладают сложной структурой. Но в то же время эта структура (за исключением ближних каналов) не содержит мешающих составляющих, которые могли бы выступать в роли помех по отношению к моделируемым сигналам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый алгоритм решения прямой задачи может рассматриваться как альтернативный разностным схемам при моделировании волнового поля для горизонтальнослоистых сред. Продолжительность его работы не определяется шагом дискретизации модели среды, поэтому настоящий способ может быть достаточно эффективен в случае тонкослоистых моделей, когда в пачке слоёв могут появляться очень тонкие пропластки, которые сильно влияют на волновую картину. В дальнейшем предполагается продолжить начатые исследования, сделав акцент на интерпретационных возможностях алгоритма при обработке реальных материалов. Здесь интересными являются два момента. Первый состоит в том, что модельные сейсмограммы могут служить основой для оценки возможностей существующих методов, в частности полноволновой инверсии при оценивании параметров тонкослоистых пачек пород. Второй момент непосредственно связан с возможностями использования построенных решений прямой задачи для получения решения обратной задачи в спектральной области по наблюденным сейсмограммам как однокомпонентным, так и многокомпонентным.

Кроме того, предполагается сделать данный алгоритм базовым при развитии алгоритмов моделирования, основанных на лучевом трассировании для волн различных типов, в частности, обменных. В этом случае алгоритм может применяться для контроля результатов лучевого трассирования, а также путём его объединения с указанным методом. Последнее возможно при рассмотрении локально-плоских задач.

Авторы выражают свою благодарность В. В. Бузлукову и О. В. Вашутину за их помощь при сопоставлении результатов, получаемых на основе метода потенциалов и лучевого метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогоненков Г.Н. Изучение детального строения осадочных толщ сейсморазведкой. М.: Недра, 1987.
2. Yilmaz O. Seismic data analysis: processing, inversion and interpretation of seismic data. V. 1, 2. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, 2001.
3. Stewart R.R., Gaiser J.E., Brown R.J., Lawton D.C. Tutorial converted-wave seismic exploration: Methods // *Geophysics*. 2002. V. 67, N 5. P. 1348–1363.
4. Петрошень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 18. Л.: Наука, 1978. С. 1–246.
5. Петрошень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В. Волны в слоисто-однородных изотропных средах. Л.: Наука, 1982.
6. Haskell N.A. Radiation pattern of surface waves from point sources in a multi-layered medium // *Bull. Seismological Soc. America*. 1964. T. 54, N 1. С. 377–393.
7. Haskell N.A. Crustal reflection of plane *P* and *SV* waves // *J. Geophys. Research*. 1962. V. 67, N 12. P. 4751–4768.
8. Hudson J.A. A quantitative evaluation of seismic signals at teleseismic distances-I radiation from point sources // *Geophys. J. Internat*. 1969. V. 18, № 3. P. 233–249.

9. Thomson W.T. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // J. Appl. Phys. 1950. V. 21, N 2. P. 89–93.
10. Knopoff L. A matrix method for elastic wave problems // Bull. Seismological Soc. America. 1964. V. 54, N 1. P. 431–438.
11. Фатьянов А.Г., Михайленко Б.Г. Метод расчёта нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 4. С. 834–839.
12. Фатьянов А.Г. Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310, № 2. С. 323–327.
13. Дмитриев В.И. Общий метод расчёта электромагнитного поля в слоистой среде. Вычислительные методы и программирование. 1968. Вып. 10. М.: Изд-во МГУ. С. 55–65.
14. Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И. Метод расчёта поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 2. С. 272–286.
15. Pavlov V.M. A convenient technique for calculating synthetic seismograms in layered half-space // Proc. Intern. Conf. «Problems of Geocosmos». St. Peteburg, 2002. P. 320–323.
16. Карчевский А.Л. Прямая динамическая задача сейсмики для горизонтально-слоистых сред // Сиб. электрон. мат. изв. 2005. Т. 2. С. 23–61; <http://semr.math.nsc.ru/v2/p23-61.pdf>
17. Карчевский А.Л. Метод численного решения системы упругости для горизонтально слоистой анизотропной среды // Геология и геофизика. 2005. Т. 46, № 3. С. 339–351.
18. Карчевский А.Л. Численное решение одномерной обратной задачи для системы упругости // Докл. АН. 2000. Т. 375, № 2. С. 235–238.
19. Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г. Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды // Сиб. журн. вычисл. математики. 2001. Т. 4, № 3. С. 259–269.
20. Kurpinar E., Karchevsky A.L. Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media // Inverse Problems. 2004. V. 20, N 3. P. 953–976.
21. Karchevsky A.L. Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. V. 12, N 5, P. 519–634.
22. Kurpinar E., Karchevsky A.L. Finding of the elastic parameters of a horizontal (thinly stratified) anisotropic layer // Appl. Anal. 2008. V. 87, N 10–11. P. 1179–1212.
23. Ban-Menahem A., Singh S. J. Seismic Waves and Sources. N. Y.: Springer-Verl., 1981.
24. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
25. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970.
26. Митрофанов Г.М. Использование сглаживающих окон при спектральном анализе сейсмических трасс // Геология и геофизика. 1979. № 1. С. 110–123.
27. Митрофанов Г.М. Обработка фазовых спектров многоканальных сейсмограмм // Геология и геофизика. 1986. № 10. С. 99–109.
28. Крылов В.И. Приближённое вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.
29. Алексеев А.С., Бабич В.М., Гельчинский Б.Я. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 5. Л.: Наука, 1961. С. 3–24.

UDC 519.633.6:550.8.055

**MATHEMATICAL MODELING FOR THIN-LAYERED ELASTIC MEDIA
IN SEISMIC EXPLORATION**© 2022 G. M. Mitrofanov^{1,3,4}, A. L. Karchevsky²¹*Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS,
pr. Acad. Koptiyuga 3, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptiyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,*³*Novosibirsk State University,
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia,*⁴*Novosibirsk State Technical University,
pr. Karla Marksa, 20, Novosibirsk 630073, Russia*E-mails: ^ageorgymitrofanov@rambler.ru, ^bkarchevs@math.nsc.ru

Received 13.05.2022, revised 31.05.2022, accepted 22.06.2022

Abstract. Some issues of mathematical modeling of wave fields associated with thin-layered objects of a horizontally-layered medium are considered. When describing the processes of wave propagation, systems of differential equations in partial derivatives are used, which correspond to the theory of elasticity. As a result, both vertical and horizontal displacement components are obtained, which is important for setting up and analyzing seismic field work with three-component instruments. In addition, in the mathematical formulation of the problem, a buried source of the expansion center type is used, which brings the model results closer to the real experiment. The solution of the problem written in the spectral form is analyzed, which may turn out to be significant when it is used to solve inverse dynamic seismic problems. The paper presents not only the computational features of the proposed scheme for solving the problem, but also the study of the resulting wave fields from the point of view of their use in the processing and interpretation of real seismic data.

Keywords: system of elasticity equations, vertical displacement, horizontal displacement, horizontally layered isotropic medium, time frequency, spatial frequency.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.311

REFERENCES

1. Gogonenkov G.N. Izuchenie detal'nogo stroeniya osadochnykh tolshch seismorazvedkoi [Study of the detailed structure of sedimentary strata by seismic exploration]. Moscow: Nedra, 1987 (in Russian).
2. Yilmaz O. Seismic Data Analysis: Processing, Inversion and Interpretation of Seismic Data. V. 1–2. Soc. Exploration Geoph., Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, 2001.
3. Stewart R.R., Gaiser J.E., Brown R.J., Lawton D.C. Tutorial converted-wave seismic exploration: Methods. *Geophysics*, 2002, Vol. 67, No. 5, pp. 1348–1363.
4. Petrashen G.I. Osnovy matematicheskoi teorii rasprostraneniya uprugikh voln [Fundamentals of the mathematical theory of elastic wave propagation]. Voprosy dinamicheskoi teorii rasprostraneniya seismicheskikh voln [Questions of the dynamic theory of seismic wave propagation]. Issue 18. Leningrad: Nauka, 1978, pp. 1–246 (in Russian).
5. Petrashen G.I., Molotkov L.A., Krauklis P.V. Volny v sloisto-odnorodnykh izotropnykh sredakh [Waves in layered homogeneous isotropic media]. Leningrad: Nauka, 1982 (in Russian).

6. Haskell N.A. Radiation pattern of surface waves from point sources in a multi-layered medium. *Bull. Seismological Soc. America*, 1964, Vol. 54, No. 1, pp. 377–393.
7. Haskell N.A. Crustal reflection of plane P and SV waves. *J. Geoph. Research*, 1962, Vol. 67, No. 12, pp. 4751–4768.
8. Hudson J.A. A quantitative evaluation of seismic signals at teleseismic distances-I Radiation from point sources. *Geoph. J. Internat.*, 1969, Vol. 18, No. 3, pp. 233–249.
9. Thomson W.T. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *J. Appl. Phys.*, 1950, Vol. 21, No. 2, pp. 89–93.
10. Knopoff L. A matrix method for elastic wave problems. *Bull. Seismological Soc. America*, 1964, Vol. 54, No. 1, pp. 431–438.
11. Fatianov A.G., Mikhailenko B.G. Metod rascheta nestatsionarnykh volnovykh polei v neuprugikh sloistoneodnorodnykh sredakh [A method of computing non stationary wave fields in non elastic stratified-inhomogeneous media]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1988, Vol. 301, No. 4, pp. 834–839 (in Russian).
12. Fatianov A.G. Poluanaliticheskiy metod resheniya pryamykh dinamicheskikh zadach v sloistyykh sredakh [A semi-analytic method for solving direct dynamical problems in layered media]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 310, No. 2, pp. 323–327 (in Russian).
13. Dmitriev V.I. Obshchiiy metod rascheta elektromagnitnogo polya v sloistoi srede. V knige: Vychislitel'nye metody i programmirovaniye [General Method for Calculating an Electromagnetic Field in a Layered Medium. Computational methods and programming]. Issue 10. Moscow: Publ. MGU, 1968, pp. 55–65 (in Russian).
14. Akkuratov G. V., Dmitriev V. I. Method of calculation of a field of steady elastic vibrations in a layered medium. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1984, Vol. 24, No. 1, pp. 166–176.
15. Pavlov V.M. A convenient technique for calculating synthetic seismograms in layered half-space. *Proc. Intern. Conf. «Problems of Geocosmos»*. St. Peteburg, 2002, pp. 320–323.
16. Karchevsky A.L. The direct dynamical problem of seismics for horizontally stratified media. *Siber. Electronic Math. Reports*, 2005, Vol. 2, pp. 23–61 (in Russian); <http://semr.math.nsc.ru/v2/p23-61.pdf>
17. Karchevsky A.L. A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media. *Russian Geology and Geophysics*, 2005, Vol. 46, No. 3, pp. 339–351.
18. Karchevsky A.L. Chislennoe reshenie odnomernoi obratnoi zadachi dlya sistemy uprugosti [Numerical Solution to the One-Dimensional Inverse Problem for an Elastic System]. *Dokl. Akad. Nauk*, 2000, Vol. 375, No. 8, pp. 1325–1328 (in Russian).
19. Karchevsky A.L., Fatianov A.G. Chislennoe reshenie obratnoi zadachi dlya sistemy uprugosti s posledeystviem dlya vertikal'no neodnorodnoi sredy [Numerical solution of the inverse problem for a system of elasticity with the aftereffect for a vertically inhomogeneous medium]. *Sibir. Zh. Vychisl. Mat.*, 2001, Vol. 4, No. 3, pp. 259–268 (in Russian).
20. Kurpinar E., Karchevsky A.L. Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media. *Inverse Probl.*, 2004, Vol. 20, No. 3, pp. 953–976.
21. Karchevsky A.L. Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers // *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2004, Vol. 12, No. 5, pp. 519–634.
22. Kurpinar E., Karchevsky A.L. Finding of the elastic parameters of a horizontal (thinly stratified) anisotropic layer. *Appl. Anal.*, 2008, Vol. 87, No. 10, 11, pp. 1179–1212.
23. Ban-Menahem A., Singh S. J. Seismic Waves and Sources. N. Y.: Springer-Verl., 1981.
24. Nowacki V. Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970.
25. Demidovich B.P., Mapon I.A. Osnovy vychislitel'noi matematiki [Fundamentals of computational mathematics]. Moscow: Nauka, 1970 (in Russian).
26. Mitrofanov G.M. Ispol'zovanie sglazhivayushchikh okon pri spektral'nom analize seismicheskikh trass [Use of smoothing windows in the spectral analysis of seismic traces]. *Geology and Geophysics*, 1979, No. 1, pp. 110–123 (in Russian).
27. Mitrofanov G.M. Obrabotka fazovykh spektrov mnogokanal'nykh seismogramm [Processing of phase spectra of multichannel seismograms]. *Geology and Geophysics*, 1986, No. 10, pp. 99–109 (in Russian).

28. Krylov V.I. Priblizhennoe vychislenie integralov [Approximate calculation of integrals]. Moscow: Nauka, 1967 (in Russian).
29. Alekseev A.S., Babich V.M., Gel'chinskii B.Ya. Luchevoi metod vychisleniya intensivnosti volnovykh frontov [Ray Method for Calculating the Intensity of Wave Fronts]. Voprosy dinamicheskoi teorii rasprostraneniya seismicheskikh voln [Questions of the dynamic theory of seismic wave propagation]. Leningrad, 1961, No. 5., pp. 3–24 (in Russian).