

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год
Том 25, №3(91)
Июль - сентябрь 2022 г.

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

СОДЕРЖАНИЕ

Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением	5
Дурдиев Д. К., Меражова Ш. Б. Обратная задача для двумерного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в цилиндрической области	14
Иванов В. В. Притягивающий предельный цикл модели нечётномерной кольцевой генной сети	25
Имомназаров Б. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Худайназаров Б. Б. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении	33
Ковалёв М. Д. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике	41
Куликов И. М., Черных И. Г., Ульяничев И. С., Тутуков А. В. Математическое моделирование ядерного горения углерода в белых карликах с использованием 7-изотопной сети реакций	55
Купцова Е. В. Осциллятор Ван дер Поля под действием случайного шума	67
Лазарева Г. Г., Максимова А. Г. Численное моделирование распространения паров вольфрама над нагреваемой поверхностью	81
Мамажонов М., Шерматова Х. М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения	93
Минаков А. В., Лобасов А. С., Шебелев А. В., Зайцев Д. В., Кабов О. А. Режимы течения плёнки жидкости, увлекаемой потоком газа в плоском горизонтальном канале, в изотермических условиях	104
Митрофанов Г. М., Карчевский А. Л. Математическое моделирование для тонко-слоистых упругих сред в сейсморазведке	120
Перцев Н. В., Топчий В. А., Логинов К. К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций	135
• Романов В. Г., Бугуева Т. В. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения	154
Старовойтов В. Н., Старовойтова Б. Н. Усреднённая математическая модель периодической упругой структуры, насыщенной жидкостью Максвелла	170

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 539.3:517.95

ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ЧЛЕНЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2022 В. Г. Романов^{1a}, Т. В. Бугуева^{1,2b}

¹*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*

²*Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: ^aromanov@math.nsc.ru, ^bbugueva@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 09.02.2022 г.; после доработки 09.02.2022 г.;
принята к публикации 22.06.2022 г.

Для нелинейного дифференциального уравнения, главная часть которого представляет собой волновой оператор, рассматривается обратная задача об определении коэффициента при нелинейном члене уравнения. Предполагается, что искомый коэффициент представляет собой непрерывную и финитную в \mathbb{R}^3 функцию. Для исходного уравнения рассматриваются плоские волны, падающие на неоднородность под разными углами. В обратной задаче предполагается, что решения, отвечающие этим волнам, могут быть измерены в точках границы некоторого шара, содержащего неоднородность, в моменты времени близкие к приходу в эти точки фронта волны, и для некоторого диапазона углов падения плоских волн на неоднородность. Показано, что решения соответствующих прямых задач для дифференциального уравнения ограничены в некоторой окрестности фронта волны, найдено асимптотическое разложение решения в этой окрестности. На основе этого разложения установлено, что задаваемая в обратной задаче информация позволяет свести проблему отыскания искомой функции к задаче рентгеновской томографии с неполными данными. Сформулирована и доказана теорема об однозначности решения обратной задачи. Показано, что в алгоритмическом отношении эта задача редуцируется к хорошо известной проблеме моментов.

Ключевые слова: нелинейное волновое уравнение, обратная задача, томография.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.313

Обратные задачи для нелинейных гиперболических уравнений и систем начали изучаться сравнительно недавно, но уже достигнут значительный прогресс в их решении. В работах рассмотрены различные постановки обратных задач, связанных с определением метрики Лоренца или коэффициентов, входящих в эти уравнения. Так, в работе [1] изучаются обратные задачи для нелинейных гиперболических уравнений на глобально гиперболическом лоренцевом многообразии (M, g) , в частности, показано, что семейство наборов наблюдений за светом, соответствующее точечным источникам, однозначно определяет конформный тип неизвестного открытого, относительно компактного множества $W \subset M$. В [2] на лоренцевом многообразии рассматриваются нелинейные обратные задачи для волнового уравнения с оператором Лапласа — Бельтрами. В [3] на времени-ориентированном лоренцевом многообразии $(M; g)$ с непустой границей, удовлетворяющей предположению выпуклости, показано, что топологические, дифференцируемые и конформные структуры соответствующих подмножеств $S \subset M$ источников однозначно определяются по результатам измерений пересечений будущих световых конусов из точки S с фиксированным открытым подмножеством границы M . В работе [4]

показывается, что сингулярности образуются после взаимодействия трёх поперечных полулинейных конормальных волн. В [6] рассматривается обратная краевая задача для полулинейного волнового уравнения на зависящем от времени лоренцевом многообразии с временной границей. В [9] исследуется обратная краевая задача электромагнетизма в нелинейной среде Керра, показывается определение параметров электромагнитного материала и параметров нелинейной восприимчивости среды путем проведения электромагнитных измерений на границе. В [12] изучаются обратные задачи для гиперболических уравнений и систем и решения этих задач, основанные на фокусировке волн. В работе [13] для полулинейных волновых уравнений на лоренцевых многообразиях с нелинейными членами квадратичной производной изучается обратная задача определения фоновой лоренцевой метрики. В работе [15] рассматривается обратная краевая задача для нелинейного уравнения упругой волны, показывается, что все параметры, фигурирующие в уравнении, могут быть однозначно определены из граничных измерений при определенных геометрических допущениях.

К этому же направлению исследований относится наша недавняя статья [17] об определении коэффициента, стоящего при квадратичной нелинейности, и локализованного в точке источником волн. В настоящей работе мы рассматриваем более общую нелинейность и источники типа плоских волн. В идейном отношении эта работа развивает исследования, выполненные ранее для линейных уравнений (см. [18–22]).

Пусть $q(x)$ — непрерывная финитная функция с носителем, содержащимся в шаре:

$$B(x^0, R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - x^0| < R\}, \quad x^0 = (0, 0, x_3^0), \quad x_3^0 > 0, \quad 0 < R < x_3^0,$$

и $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, принадлежащий сферическому сегменту:

$$S_{\theta_0}^2 = \{\nu \in S^2 \mid \nu_3 \in [\cos \theta_0, 1]\}, \quad 0 < \theta_0 < \theta_{00} = \arccos \sqrt{1 - (R/x_3^0)^2}.$$

Требуется найти функцию $u(x, t, \nu)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u - q(x)u^{1+\gamma} &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4, \\ u|_{t < 0} &= H(t - x \cdot \nu), \end{aligned} \tag{1}$$

в которых γ — положительное число, $H(t)$ — функция Хевисайда: $H(t) = 1$ для $t \geq 0$ и $H(t) = 0$ для $t < 0$. Функция $H(t - x \cdot \nu)$ описывает плоскую волну, распространяющуюся в пространстве \mathbb{R}^3 с единичной скоростью в направлении ν . При этом фронт волны, проходящий через начало координат, не пересекает шар $B(x^0, R)$. Таким образом, задача (1) описывает процесс падения плоской волны из однородного полупространства на неоднородность, локализованную в области $B(x^0, R)$.

Ниже мы будем рассматривать задачу об определении функции $q(x)$ по некоторой информации о решениях задачи (1), измеренной на части границы области $B(x^0, R)$ для значений t , близких к моменту $t = x \cdot \nu$, и для всех $\nu \in S_{\theta_0}^2$.

1. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе мы изучим задачу (1) и выведем важные для дальнейшего свойства её решений. Основной здесь является

Теорема 1. Пусть $\nu \in S_{\theta_0}^2$ и $q(x)$ — непрерывная финитная функция с носителем, содержащимся в шаре $B(x^0, R)$. Тогда вблизи характеристического клина $t = x \cdot \nu$ существует единственное обобщённое решение задачи (1) и оно представимо в виде

$$u(x, t, \nu) = H(t - x \cdot \nu) + [\alpha_1(x, \nu) + \bar{u}(x, t, \nu)]H_1(t - x \cdot \nu), \tag{2}$$

для $\tau \in (x \cdot \nu, t]$. Ниже мы выпишем уравнение параболоида $P(x, \tau, \nu)$ в подходящей системе координат.

Наряду с декартовой системой координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 рассмотрим систему координат y_1, y_2, y_3 с центром в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ и единичными ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_3 &= \nu = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ \mathbf{e}_1 &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ \mathbf{e}_2 &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).\end{aligned}$$

В выписанных выше формулах $\theta \in [0, \theta_0]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Кроме того, введём цилиндрическую систему координат z, r, ψ , связанную с системой y_1, y_2, y_3 равенствами

$$y_1 = r \cos \psi, \quad y_2 = r \sin \psi, \quad \psi \in [0, 2\pi), \quad y_3 = z, \quad |y| = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Тогда

$$\xi = x + y, \quad y = \mathbf{e}_1 r \cos \psi + \mathbf{e}_2 r \sin \psi + \mathbf{e}_3 z, \quad (6)$$

и уравнение, определяющее параболоид $P(x, \tau, \nu)$, принимает вид

$$P(x, \tau, \nu) = \{(r, z) \mid z + (z^2 + r^2)^{1/2} = \tau - x \cdot \nu\}$$

или

$$r = r(\tau - x \cdot \nu, z) = \sqrt{(\tau - x \cdot \nu)(\tau - x \cdot \nu - 2z)}. \quad (7)$$

Следовательно, при $\tau \rightarrow x \cdot \nu + 0$ параболоид $P(x, \tau, \nu)$ вырождается в луч

$$L(x, \nu) =: \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \xi = x + z \cdot \nu, z \leq 0\}.$$

Введём в интеграле равенства (5) вместо переменных интегрирования ξ_1, ξ_2, ξ_3 криволинейные координаты (τ, z, ψ) . Тогда

$$\frac{d\xi}{|x - \xi|} = \frac{dy}{|y|} = \frac{rr_\tau}{|y|} d\tau dz d\psi = d\tau dz d\psi.$$

Поэтому уравнение (5) принимает вид

$$\begin{aligned}u(x, t, \nu) &= 1 + \frac{1}{4\pi} \int_{x \cdot \nu}^t \int_{P(x, \tau, \nu)} q(\xi) u^{1+\gamma}(\xi, t - |\xi - x|, \nu) d\psi dz d\tau \\ &= 1 + \frac{1}{4\pi} \int_{x \cdot \nu}^t \int_{-\infty}^{(\tau - x \cdot \nu)/2} \int_0^{2\pi} q(\xi) u^{1+\gamma}(\xi, t - |\xi - x|, \nu) d\psi dz d\tau, \quad t \geq x \cdot \nu, \quad (8)\end{aligned}$$

в котором переменная ξ определена формулами (6) и (7).

Определим последовательность $u_k(x, t, \nu)$, $k = 0, 1, \dots$, формулой

$$\begin{aligned}u_0(x, t, \nu) &= 1, \\ u_k(x, t, \nu) &= 1 + \frac{1}{4\pi} \int_{x \cdot \nu}^t \int_{P(x, \tau, \nu)} q(\xi) u_{k-1}^{1+\gamma}(\xi, t - |\xi - x|, \nu) d\psi dz d\tau, \\ k &= 1, 2, \dots, \quad t \geq x \cdot \nu.\end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $|q(x)| \leq q_0$ и ε — фиксированное число из интервала $(0, 1 - 1/2^\gamma)$. Обозначим

$$G(\nu, \varepsilon) = \{(x, t) \mid 0 \leq q_0 R^\gamma(t - x \cdot \nu) \leq \varepsilon\}.$$

Лемма 1. В области $G(\nu, \varepsilon)$ последовательность $u_k(x, t, \nu)$ удовлетворяет оценке

$$0 < u_k(x, t, \nu) \leq \frac{1}{[1 - q_0 R \gamma (t - |x - y|)]^{1/\gamma}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Доказательство. Оценим $u_1(x, t, \nu)$. Используем при выполнении этой оценки, что интервал интегрирования по переменной z не превосходит $2R$, так как функция $q(\xi)$ в интегральном уравнении (8) отлична от нуля только для $\xi \in B(x^0, R)$, а диаметр шара $B(x^0, R)$ равен $2R$. Из равенства (9) при $k = 1$ находим, что

$$u_1(x, t, \nu) \leq 1 + q_0 R \int_{x \cdot \nu}^t d\tau = 1 + q_0 R(t - x \cdot \nu) \leq \frac{1}{[1 - q_0 R \gamma (t - x \cdot \nu)]^{1/\gamma}}, \quad t \geq x \cdot \nu. \quad (11)$$

Последнее неравенство следует из того, что $(1 + s)[1 - \gamma s]^{1/\gamma} \leq 1$ при любом $\gamma s \in [0, 1)$. Далее,

$$u_1(x, t, \nu) \geq 1 - q_0 R \int_{x \cdot \nu}^t d\tau = 1 - q_0 R(t - x \cdot \nu) \geq 1 - \varepsilon/\gamma > 1 - (1 - 1/2^\gamma)/\gamma > 0, \quad t \geq x \cdot \nu.$$

Оценим теперь $u_2(x, t, \nu)$. Имеем

$$\begin{aligned} u_2(x, t, \nu) &\leq 1 + \frac{q_0}{4\pi} \int_{x \cdot \nu}^t \int_{P(x, \tau, \nu) \cap B(x^0, R)} \frac{d\psi dz d\tau}{[1 - q_0 R \gamma (t - x \cdot \nu - |\xi - x|)]^{(1+\gamma)/\gamma}} \\ &\leq 1 + q_0 R \int_{x \cdot \nu}^t \frac{d\tau}{[1 - q_0 R \gamma (t - \tau)]^{(1+\gamma)/\gamma}} = \frac{1}{[1 - q_0 R \gamma (t - x \cdot \nu)]^{1/\gamma}}, \quad t \geq x \cdot \nu. \end{aligned} \quad (12)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} u_2(x, t, \nu) &\geq 1 - \frac{q_0}{4\pi} \int_{x \cdot \nu}^t \int_{P(x, \tau, \nu) \cap B(x^0, R)} \frac{d\psi dz d\tau}{[1 - q_0 R \gamma (t - x \cdot \nu - |\xi - x|)]^{(1+\gamma)/\gamma}} \\ &= 1 - q_0 R \int_{x \cdot \nu}^t \frac{d\tau}{[1 - q_0 R \gamma (t - \tau)]^{(1+\gamma)/\gamma}} = 2 - \frac{1}{[1 - q_0 R \gamma (t - x \cdot \nu)]^{1/\gamma}} \\ &\geq 2 - \frac{1}{[1 - \varepsilon]^{1/\gamma}} > 0, \quad t \geq x \cdot \nu. \end{aligned}$$

Полученные выше оценки при $k = 1$ и $k = 2$ совпадают с оценкой (10). Поэтому оценки для $u_k(x, t, \nu)$ совпадают с оценкой (10) и при любом целом $k \geq 1$. \square

Следствие 1. Последовательность $u_k(x, t, \nu)$ является ограниченной в области $G(\nu, \varepsilon)$, причём для всех k выполнено неравенство

$$0 < u_k(x, t, \nu) \leq \frac{1}{(1 - \varepsilon)^{1/\gamma}} < 2, \quad (x, t) \in G(\nu, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Лемма 2. Последовательность $u_k(x, t, \nu)$ равномерно сходится в области $G(\nu, \varepsilon)$ и определяет в этой области непрерывную предельную функцию $u(x, t, \nu)$. Эта функция является решением уравнения (5) в области $G(\nu, \varepsilon)$.

Доказательство. Введём в рассмотрение разности

$$v_k(x, t, \boldsymbol{\nu}) = u_k(x, t, \boldsymbol{\nu}) - u_{k-1}(x, t, \boldsymbol{\nu}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Из формулы (9) следуют равенства

$$v_1(x, t, \boldsymbol{\nu}) = u_1(x, t, \boldsymbol{\nu}) - 1,$$

$$\begin{aligned} v_k(x, t, \boldsymbol{\nu}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{x \cdot \boldsymbol{\nu}}^t \int_{P(x, \tau, \boldsymbol{\nu})} q(\xi) v_{k-1}(\xi, t - |\xi - x|, \boldsymbol{\nu}) \\ &\quad \times Q(u_{k-1}(\xi, t - |\xi - x|, \boldsymbol{\nu}), u_{k-2}(\xi, t - |\xi - x|, \boldsymbol{\nu})) d\varphi dz d\tau, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

В формуле (14) функция $Q(u_{k-1}, u_{k-2})$ определена равенством

$$Q(u_{k-1}, u_{k-2}) = (1 + \gamma) \int_0^1 [u_{k-1}s + u_{k-2}(1 - s)]^\gamma ds. \quad (15)$$

При выводе формулы (14) мы использовали равенство

$$\begin{aligned} u_{k-1}^{1+\gamma} - u_{k-2}^{1+\gamma} &= (1 + \gamma) \int_{u_{k-2}}^{u_{k-1}} s^\gamma ds \\ &= (u_{k-1} - u_{k-2})(1 + \gamma) \int_0^1 [u_{k-1}s' + u_{k-2}(1 - s')]^\gamma ds' = v_{k-1} Q(u_{k-1}, u_{k-2}). \end{aligned} \quad (16)$$

Из (9) вытекает оценка

$$|v_1(x, t, \boldsymbol{\nu})| \leq q_0 R \int_{x \cdot \boldsymbol{\nu}}^t d\tau = q_0 R(t - x \cdot \boldsymbol{\nu}), \quad (x, t) \in G(\boldsymbol{\nu}, \varepsilon). \quad (17)$$

Величина $Q(u_{k-1}, u_{k-2})$ легко оценивается на основе следствия 1:

$$0 < Q(u_{k-1}, u_{k-2}) \leq (1 + \gamma) 2^\gamma. \quad (18)$$

Полагая в формуле (14) $k = 2$, находим, что

$$\begin{aligned} |v_2(x, t, \boldsymbol{\nu})| &\leq \frac{q_0^2 R (1 + \gamma) 2^\gamma}{4\pi} \int_{x \cdot \boldsymbol{\nu}}^t \int_{P(x, \tau, \boldsymbol{\nu})} (t - \xi \cdot \boldsymbol{\nu} - |\xi - x|) d\varphi dz d\tau \\ &\leq q_0^2 R^2 (1 + \gamma) 2^\gamma \int_{x \cdot \boldsymbol{\nu}}^t (t - \tau) d\tau = q_0^2 R^2 (1 + \gamma) 2^\gamma \frac{(t - x \cdot \boldsymbol{\nu})^2}{2!}, \quad (x, t) \in G(\boldsymbol{\nu}, \varepsilon). \end{aligned} \quad (19)$$

Продолжая процесс оценивания разностей $v_k(x, t, \boldsymbol{\nu})$, находим, что

$$\begin{aligned} |v_k(x, t, \boldsymbol{\nu})| &\leq q_0^k R^k (1 + \gamma)^{k-1} 2^{\gamma(k-1)} \frac{(t - x \cdot \boldsymbol{\nu})^k}{k!} \leq \frac{(1 + \gamma)^{k-1} 2^{\gamma(k-1)} \varepsilon^k}{\gamma^k k!}, \\ &k = 2, 3, \dots, \quad (x, t) \in G(\boldsymbol{\nu}, \varepsilon). \end{aligned} \quad (20)$$

Из оценок (17), (19), (20) вытекает равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x, t, \nu)$ в области $G(\nu, \varepsilon)$ при любых $\varepsilon \in (0, 1 - 1/2^\gamma)$. Это доказывает также равномерную сходимость последовательности $u_k(x, t, \nu)$ в той же самой области. Так как все $u_k(x, t, \nu)$ положительны и непрерывны в этой области, то предел этой последовательности определяет положительную функцию $u(x, t, \nu)$, которая является непрерывным для $(x, t) \in G(\nu, \varepsilon)$ решением задачи (1). \square

Следствие 2. *Предельная функция $u(x, t, \nu)$ последовательности $u_k(x, t, \nu)$ является непрерывным решением уравнения (5) в области $G(\nu, \varepsilon)$, и для неё выполнено неравенство*

$$0 < u(x, t, \nu) \leq \frac{1}{(1 - \varepsilon)^{1/\gamma}} \leq 2, \quad (x, t) \in G(\nu, \varepsilon). \quad (21)$$

Лемма 3. *В области $G(\nu, \varepsilon)$ уравнение (8) имеет единственное непрерывное решение.*

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_k(x, t, \nu)$, $k = 1, 2$: положительные, непрерывные и ограниченные в области $G(\nu, \varepsilon)$ некоторой постоянной A . Обозначим $w(x, t, \nu) = u_1(x, t, \nu) - u_2(x, t, \nu)$.

Переходя в равенстве (8) к разности $u_1(x, t, \nu) - u_2(x, t, \nu)$, воспользуемся представлением (16). В результате получим

$$\begin{aligned} w(x, t, \nu) &= \frac{1}{4\pi} \int_{x \cdot \nu}^t \int_{-\infty}^{(\tau - x \cdot \nu)/2} \int_0^{2\pi} q(\xi) [u_1^{1+\gamma}(\xi, t - |\xi - x|, \nu) - u_2^{1+\gamma}(\xi, t - |\xi - x|, \nu)] d\psi dz d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{x \cdot \nu}^t \int_{-\infty}^{(\tau - x \cdot \nu)/2} \int_0^{2\pi} q(\xi) w(\xi, t - |\xi - x|, \nu) \\ &\quad \times Q(u_1(\xi, t - |\xi - x|, \nu), u_2(\xi, t - |\xi - x|, \nu)) d\psi dz d\tau, \end{aligned} \quad (22)$$

где функция $Q(u_1, u_2)$ определена равенством (15). Из (22) следует

$$\begin{aligned} |w(x, t, \nu)| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{x \cdot \nu}^t \int_{-\infty}^{(\tau - x \cdot \nu)/2} \int_0^{2\pi} |q(\xi)| |w(\xi, t - |\xi - x|, \nu)| \\ &\quad \times Q(u_1(\xi, t - |\xi - x|, \nu), u_2(\xi, t - |\xi - x|, \nu)) d\psi dz d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

В силу (15) имеет место оценка $0 < Q(u_1, u_2) \leq (1 + \gamma)A^\gamma$. Так как $|w(x, t, \nu)| \leq A$, а интервал интегрирования по переменной z в силу финитности функции $q(\xi)$ не превосходит $2R$, то из (23) получим

$$|w(x, t, \nu)| \leq (1 + \gamma)Rq_0A^{1+\gamma} \int_{x \cdot \nu}^t d\tau = (1 + \gamma)Rq_0A^{1+\gamma}(t - x \cdot \nu), \quad (x, t) \in G(\nu, \varepsilon). \quad (24)$$

Подставляя (24) в неравенство (23), получаем новую оценку:

$$|w(x, t, \nu)| \leq A[(1 + \gamma)Rq_0A^\gamma]^2 \int_{x \cdot \nu}^t (t - \tau) d\tau = A[(1 + \gamma)Rq_0A^\gamma]^2 \frac{(t - x \cdot \nu)^2}{2!}, \quad (x, t) \in G(\nu, \varepsilon). \quad (25)$$

Подставляя (25) в неравенство (23), на втором шаге итерации получим

$$|w(x, t, \boldsymbol{\nu})| \leq \frac{A[(1+\gamma)Rq_0A^\gamma]^3}{2!} \int_{x \cdot \boldsymbol{\nu}}^t (t-\tau)^2 d\tau = A[(1+\gamma)Rq_0A^\gamma]^3 \frac{(t-x \cdot \boldsymbol{\nu})^3}{3!}, \quad (x, t) \in G(\boldsymbol{\nu}, \varepsilon).$$

Повторяя этот процесс итераций n раз, приходим к оценке

$$|w(x, t, \boldsymbol{\nu})| \leq A[(1+\gamma)Rq_0A^\gamma]^{n+1} \frac{(t-x \cdot \boldsymbol{\nu})^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (x, t) \in G(\boldsymbol{\nu}, \varepsilon). \quad (26)$$

Поскольку правая часть равенства (26) равномерно стремится к нулю в области $G(\boldsymbol{\nu}, \varepsilon)$ при $n \rightarrow \infty$, то $w(x, t, \boldsymbol{\nu}) = 0$ в этой области. Следовательно, $u_1(x, t, \boldsymbol{\nu}) = u_2(x, t, \boldsymbol{\nu})$ для всех $(x, t) \in G(\boldsymbol{\nu}, \varepsilon)$. \square

Лемма 4. При выполнении условий теоремы 1 решение задачи (1) представимо в области $G(\boldsymbol{\nu}, \varepsilon)$ при любых $\varepsilon \in (0, 1)$ в виде (3).

Доказательство. Введём новую функцию $v(x, t, \boldsymbol{\nu}) = u(x, t, \boldsymbol{\nu}) - 1$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$v(x, t, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \int_{x \cdot \boldsymbol{\nu}}^t \int_{-\infty}^{(\tau-x \cdot \boldsymbol{\nu})/2} \int_0^{2\pi} q(\xi)(1+v(\xi, t-|\xi-x|, \boldsymbol{\nu}))^{1+\gamma} d\psi dz d\tau, \quad (x, t) \in G(\boldsymbol{\nu}, \varepsilon). \quad (27)$$

Сделаем в интеграле замену переменной τ на τ_1 :

$$\tau = x \cdot \boldsymbol{\nu} + (t - x \cdot \boldsymbol{\nu})\tau_1. \quad (28)$$

Тогда уравнение (27) примет вид

$$v(x, t, \boldsymbol{\nu}) = \frac{(t-x \cdot \boldsymbol{\nu})}{4\pi} \int_0^1 \int_{-\infty}^{(t-x \cdot \boldsymbol{\nu})\tau_1/2} \int_0^{2\pi} q(\xi)(1+v(\xi, t-|\xi-x|, \boldsymbol{\nu}))^{1+\gamma} d\psi dz d\tau_1, \quad (29)$$

$$(x, t) \in G(\boldsymbol{\nu}, \varepsilon),$$

где согласно (6), (7), (28) имеем

$$\begin{aligned} \xi &= x + r(\mathbf{e}_1 \cos \psi + \mathbf{e}_2 \sin \psi) + z\boldsymbol{\nu} = x + r((t-x \cdot \boldsymbol{\nu})\tau_1, z)(\mathbf{e}_1 \cos \psi + \mathbf{e}_2 \sin \psi) + z\boldsymbol{\nu} \\ &= x + r((t-x \cdot \boldsymbol{\nu})\tau_1, z)(\mathbf{e}_1 \cos \psi + \mathbf{e}_2 \sin \psi) + z\boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \quad (30)$$

Как было замечено ранее, при $t \rightarrow x \cdot \boldsymbol{\nu} + 0$ функция $r((t-x \cdot \boldsymbol{\nu})\tau_1, z) \rightarrow 0$, имеют место предельные соотношения $\xi = x + z\boldsymbol{\nu}$, а параболоид $P(x, \tau, \boldsymbol{\nu})$ вырождается в луч

$$L(x, \boldsymbol{\nu}) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \xi = x + z\boldsymbol{\nu}, z \leq 0\}.$$

Таким образом, функция $v(x, t, \boldsymbol{\nu})$ равномерно стремится к нулю при $t \rightarrow x \cdot \boldsymbol{\nu} + 0$. Поэтому можем написать

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{-\infty}^{(t-x \cdot \boldsymbol{\nu})\tau_1/2} \int_0^{2\pi} q(\xi)(1+v(\xi, t-|\xi-x|, \boldsymbol{\nu}))^{1+\gamma} d\psi dz d\tau_1 \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^0 q(x+z \cdot \boldsymbol{\nu}) dz + o(t-x \cdot \boldsymbol{\nu}), \quad t \rightarrow x \cdot \boldsymbol{\nu} + 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Используя (31), равенство (29) можно записать в виде

$$v(x, t, \nu) = (t - x \cdot \nu) \left(\frac{1}{2} \int_{L(x, y)} q(x + z \cdot \nu) dz + \bar{v}(x, t, \nu) \right), \quad t \geq x \cdot \nu, \quad (32)$$

где $\bar{v}(x, t, \nu) = o(t - x \cdot \nu)$ при $t \rightarrow x \cdot \nu + 0$. Возвращаясь к функции $u(x, t, \nu)$, получим

$$\begin{aligned} u(x, t, \nu) &= 1 + v(x, t, \nu) = 1 + (t - x \cdot \nu) \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 q(x + z \cdot \nu) dz + \bar{v}(x, t, \nu) \right) \\ &= 1 + (t - x \cdot \nu) \left(\frac{1}{2} \int_0^{\infty} q(x - s \cdot \nu) ds + \bar{v}(x, t, \nu) \right), \quad t \geq x \cdot \nu. \end{aligned}$$

Так как $u(x, t, \nu) = 0$ для $t \leq x \cdot \nu$, то отсюда следует представление (3), в котором

$$\bar{u}(x, t, \nu) = \bar{v}(x, t, \nu) = o(t - x \cdot \nu) \quad \text{при} \quad t \rightarrow x \cdot \nu + 0.$$

Лемма 4 и теорема 1 доказаны. □

2. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть $S_R^+(\nu) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - x^0| = R, (x - x^0) \cdot \nu > 0\}$.

Обратная задача. Найти функцию $q(x)$, входящую в (1), по следующей информации о решении прямой задачи:

$$u(x, t, \nu) = F(x, t, \nu) \quad \text{для всех} \quad \nu \in S_{\theta_0}^2, \quad x \in S_R^+(\nu), \quad t \in (0, x \cdot \nu + \varepsilon), \quad (33)$$

где θ_0, ε — произвольные малые положительные числа.

В силу теоремы 1 и формул (3), (4) информация (33) определяет интегралы

$$\int_0^{\infty} q(x - s \cdot \nu) ds = h(x, \nu) \quad \text{для всех} \quad \nu \in S_{\theta_0}^2, \quad x \in S_R^+(\nu), \quad (34)$$

в которых функция $h(x, \nu)$ вычисляется по формуле

$$h(x, \nu) = 2 \lim_{t \rightarrow x \cdot \nu + 0} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t, \nu) = 2F_t(x, x \cdot \nu + 0, \nu).$$

Таким образом, при каждом фиксированном $\nu \in S_{\theta_0}^2$ известны интегралы по семейству параллельных прямых, пересекающих область $B(x^0, R)$. В результате задача об определении $q(x)$ по информации (34) приводится к задаче томографии с неполными данными (см., например, [23]). Известно, что решение такой задачи единственно. В связи с этим верна следующая теорема единственности.

Теорема 2. Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда обратная задача может иметь только одно решение.

Для удобства читателя мы приводим ниже конструктивное доказательство этой теоремы, из которого также вытекает и способ построения искомой функции.

Доказательство. Задача о построении решения уравнения (1) распадается на семейство плоских задач для сечений шара $B(x^0, R)$ плоскостями, проходящими через ось x_3 . Рассмотрим такую задачу на плоскости переменных y_1, y_2 , совместив начало системы координат с точкой x^0 . Обозначим через $L(\eta, \vartheta)$ отрезок прямой $y_1 \cos \vartheta + y_2 \sin \vartheta = \eta$, лежащий в круге $y_1^2 + y_2^2 \leq R^2$. Тогда задача о построении $q(y)$, $y = (y_1, y_2)$ в выбранном сечении заключается в решении уравнения

$$\int_{L(\eta, \vartheta)} q(y) ds = f(\eta, \vartheta) \quad \text{для всех} \quad \eta \in [-R, R], \quad \vartheta \in [0, \theta_0], \quad (35)$$

в котором $f(\eta, \vartheta)$ — известная функция. В принципе эта функция известна также и для значений $\vartheta \in (-\theta_0, 0)$, но в дальнейшем нам удобно (по чисто техническим причинам) использовать только интервал $[0, \theta_0]$.

Любую точку $y \in L(\eta, \vartheta)$ можно записать в виде

$$y = \eta\beta + z\beta_\vartheta, \quad z \in [-\sqrt{R^2 - \eta^2}, \sqrt{R^2 - \eta^2}],$$

в котором $\beta = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ и $\beta_\vartheta = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta)$. Обозначим через y^* и y^{**} концевые точки $L(\eta, \vartheta)$:

$$y^* = \eta\beta - \sqrt{R^2 - \eta^2} \beta_\vartheta, \quad y^{**} = \eta\beta + \sqrt{R^2 - \eta^2} \beta_\vartheta.$$

Пусть

$$\begin{aligned} y_2^* &= y_2^*(\eta, \vartheta) = \eta \sin \vartheta - \sqrt{R^2 - \eta^2} \cos \vartheta, \\ y_2^{**} &= y_2^{**}(\eta, \vartheta) = \eta \sin \vartheta + \sqrt{R^2 - \eta^2} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

В этих обозначениях уравнение (35) принимает вид

$$\int_{y_2^*}^{y_2^{**}} q\left(\frac{\eta - y_2 \sin \vartheta}{\cos \vartheta}, y_2\right) \frac{dy_2}{\cos \vartheta} = f(\eta, \vartheta), \quad \eta \in [-R, R], \quad \vartheta \in [0, \theta_0]. \quad (36)$$

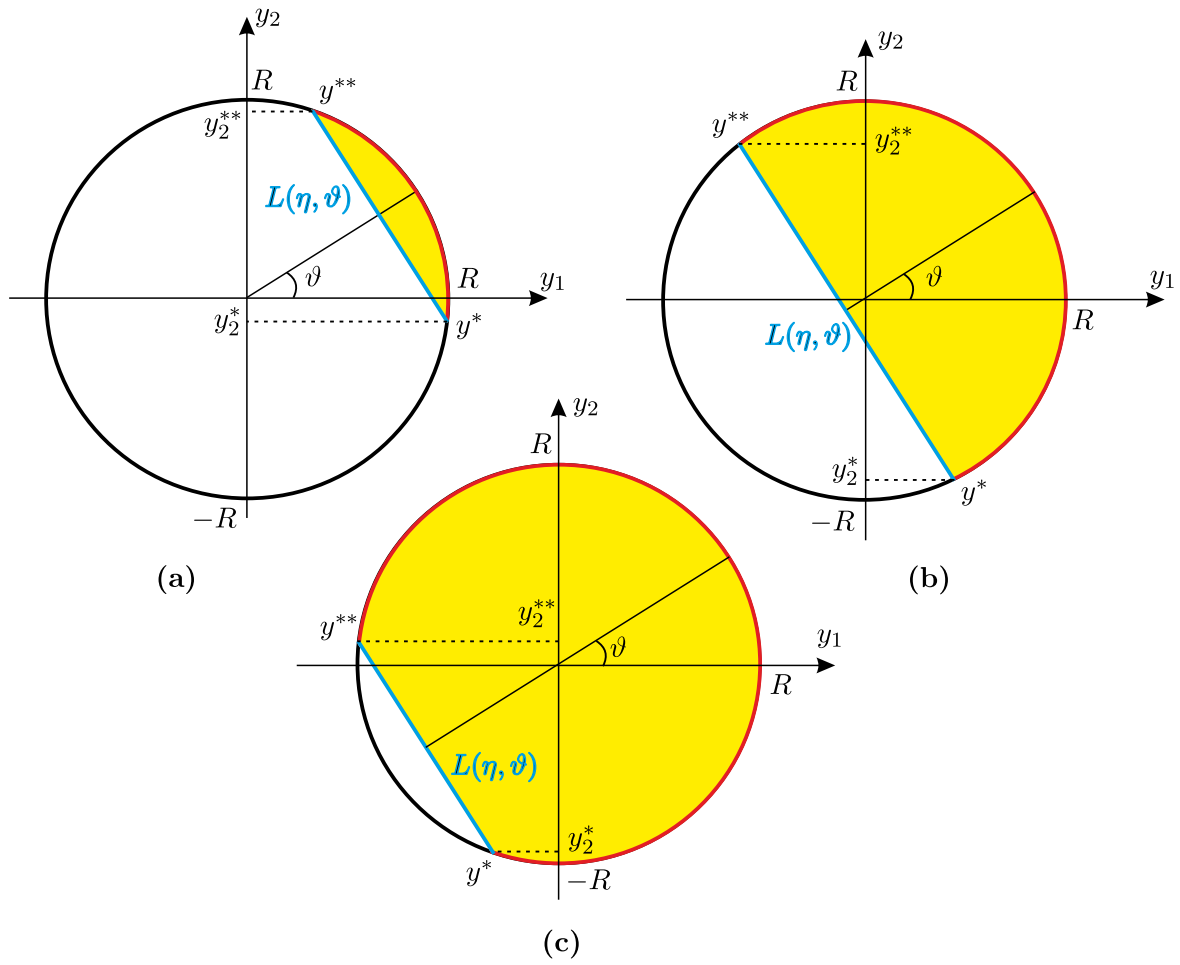
Заменим в этом уравнении η на η' и проинтегрируем по η' от η до R . Тогда получим соотношение

$$\int_{D(\eta, \vartheta)} q(y) dy_1 dy_2 = \int_{\eta}^R f(\eta', \vartheta) d\eta', \quad \vartheta \in [0, \theta_0], \quad (37)$$

в котором $D(\eta, \vartheta)$ — часть круга $|y| \leq R$, ограниченная хордой $L(\eta, \vartheta)$ и стягивающей её дугой окружности $|y| = R$, проходящей через точку $y = R\beta$. Для дальнейшего удобно выписать в интеграле по области $D(\eta, \vartheta)$ пределы интегрирования в переменных интегрирования y_1, y_2 в явном виде. При этом приходится рассматривать отдельно три случая (см. рис. 2): при $\eta > R \sin \vartheta$ — рис. 2(a); при $\eta \in (-R \sin \vartheta, R \sin \vartheta)$ — рис. 2(b); при $\eta < -R \sin \vartheta$ — рис. 2(c).

В зависимости от этого интеграл по области $D(\eta, \vartheta)$ можно представить в виде

$$\int_{D(\eta, \vartheta)} q(y) dy = \begin{cases} J_1(\eta, \vartheta), & \text{если } \eta \geq R \sin \vartheta, \\ J_1(\eta, \vartheta) + J_2(\eta, \vartheta), & \text{если } \eta \in (-R \sin \vartheta, R \sin \vartheta), \\ J_1(\eta, \vartheta) + J_2(\eta, \vartheta) + J_3(\eta, \vartheta), & \text{если } \eta \leq -R \sin \vartheta. \end{cases}$$

Рис. 2. Область $D(\eta, \vartheta)$

В этих равенствах

$$J_1(\eta, \vartheta) = \int_{y_2^*}^{y_2^{**}} \int_{(\eta - y_2 \sin \vartheta) / \cos \vartheta}^{\sqrt{R^2 - y_2^2}} q(y) dy_1 dy_2,$$

$$J_2(\eta, \vartheta) = \int_{y_2^{**} - \sqrt{R^2 - y_2^2}}^R \int_{\sqrt{R^2 - y_2^2}}^{\sqrt{R^2 - y_2^2}} q(y) dy_1 dy_2,$$

$$J_3(\eta, \vartheta) = \int_{-R - \sqrt{R^2 - y_2^2}}^{y_2^*} \int_{\sqrt{R^2 - y_2^2}}^{\sqrt{R^2 - y_2^2}} q(y) dy_1 dy_2.$$

Продифференцируем интегралы $J_1(\eta, \vartheta)$, $J_2(\eta, \vartheta)$ и $J_3(\eta, \vartheta)$ по переменной ϑ . Тогда получим, что

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} J_1(\eta, \vartheta) = \int_{y_2^*}^{y_2^{**}} q\left(\frac{\eta - y_2 \sin \vartheta}{\cos \vartheta}, y_2\right) \frac{y_2 - \eta \sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} dy_2, \quad \text{если } \eta > R \sin \vartheta,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} J_1(\eta, \vartheta) = & \int_{-\sqrt{R^2-(y_2^{**})^2}}^{\sqrt{R^2-(y_2^{**})^2}} q(y_1, y_2^{**}) \frac{\partial y_2^{**}}{\partial \vartheta} dy_1 \\ & + \int_{y_2^*}^{y_2^{**}} q\left(\frac{\eta - y_2 \sin \vartheta}{\cos \vartheta}, y_2\right) \frac{y_2 - \eta \sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} dy_2, \quad \text{если } \eta \in (-R \sin \vartheta, R \sin \vartheta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} J_1(\eta, \vartheta) = & \int_{-\sqrt{R^2-(y_2^{**})^2}}^{\sqrt{R^2-(y_2^{**})^2}} q(y_1, y_2^{**}) \frac{\partial y_2^{**}}{\partial \vartheta} dy_1 - \int_{-\sqrt{R^2-(y_2^*)^2}}^{\sqrt{R^2-(y_2^*)^2}} q(y_1, y_2^*) \frac{\partial y_2^*}{\partial \vartheta} dy_1 \\ & + \int_{y_2^*}^{y_2^{**}} q\left(\frac{\eta - y_2 \sin \vartheta}{\cos \vartheta}, y_2\right) \frac{y_2 - \eta \sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} dy_2, \quad \text{если } \eta < -R \sin \vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} J_2(\eta, \vartheta) = & - \int_{-\sqrt{R^2-(y_2^{**})^2}}^{\sqrt{R^2-(y_2^{**})^2}} q(y_1, y_2^{**}) \frac{\partial y_2^{**}}{\partial \vartheta} dy_1, \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} J_3(\eta, \vartheta) = & \int_{-\sqrt{R^2-(y_2^*)^2}}^{\sqrt{R^2-(y_2^*)^2}} q(y_1, y_2^*) \frac{\partial y_2^*}{\partial \vartheta} dy_1. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \int_{D(\eta, \vartheta)} q(y) dy = \int_{y_2^*}^{y_2^{**}} q\left(\frac{\eta - y_2 \sin \vartheta}{\cos \vartheta}, y_2\right) \frac{y_2 - \eta \sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} dy_2, \quad \eta \in [-R, R], \quad \vartheta \in [0, \theta_0].$$

Тогда из формул (36), (37) получаем

$$\int_{L(\eta, \vartheta)} y_2 q(y) ds = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \int_{\eta}^R f(\eta', \vartheta) d\eta' + \eta \sin \vartheta f(\eta, \vartheta), \quad \eta \in [-R, R], \quad \vartheta \in [0, \theta_0].$$

Таким образом, применение к равенству (36) линейного интегродифференциального оператора

$$\ell f(\eta, \vartheta) = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \int_{\eta}^R f(\eta', \vartheta) d\eta' + \eta \sin \vartheta f(\eta, \vartheta)$$

приводит к равенству

$$\int_{L(\eta, \vartheta)} y_2 q(y) ds = \ell f(\eta, \vartheta), \quad \eta \in [-R, R], \quad \vartheta \in [0, \theta_0]. \quad (38)$$

Применяя к равенству (36) k раз оператор ℓ , получаем равенство

$$\int_{L(\eta, \vartheta)} y_2^k q(y) ds = \ell^k f(\eta, \vartheta), \quad \eta \in [-R, R], \quad \vartheta \in [0, \theta_0]. \quad (39)$$

Положим в (40) $\vartheta = 0$. Тогда

$$\int_{-\sqrt{R^2-\eta^2}}^{\sqrt{R^2-\eta^2}} y_2^k q(\eta, y_2) dy_2 = \ell^k f(\eta, \vartheta)|_{\vartheta=0}, \quad \eta \in [-R, R], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (40)$$

Равенство (40) показывает, что функция $f(\eta, \vartheta)$ позволяет при каждом фиксированном $\eta \in [-R, R]$ вычислить все моменты искомой функции $q(\eta, y_2)$. Хорошо известно (см. [24]), что эти моменты однозначно определяют функцию $q(\eta, y_2)$. В частности, если $f(\eta, \vartheta) = 0$, то из (40) следует $q(\eta, y_2) = 0$. Следовательно, задача решения уравнения (34) может иметь только единственное решение. Это решение можно построить, используя соотношения (40). Например, можно вычислить коэффициенты Фурье по системе полиномов Лежандра, а затем воспользоваться соответствующим рядом Фурье. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G. Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations // *Invent. Math.* 2018. V. 212. P. 781–857; arXiv:1405.3386
2. Lassas M., Uhlmann G., Wang Y. Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds // *Comm. Math. Phys.* 2018. V. 360. P. 555–609; arXiv:1606.06261
3. Hintz P., Uhlmann G. Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets // *Internat. Math. Res. Notices.* 2019. V. 22. P. 6949–6987; <https://arxiv.org/pdf/1705.01215.pdf>
4. Barreto A.S. Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions // *Inverse Probl. Imaging.* 2020. V. 14, N 6. P. 1057–1105; arXiv:2001.11061
5. Barreto A.S., Uhlmann G., Wang Y. Inverse scattering for critical semilinear wave equations; arXiv:2003.03822
6. Hintz P., Uhlmann G., Zhai J. An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // *Internat. Math. Res. Notices.* 2021; arXiv:2005.10447
7. Lassas M., Liimatainen T., Potenciano-Machado L., Tyni T. Uniqueness and stability of an inverse problem for a semi-linear wave equation; arXiv:2006.13193
8. Stefanov P., Barreto A.S. Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly non-linear regime; arXiv:2102.06323
9. Assylbekov Y.M., Zhou T. Direct and inverse problems for the nonlinear time-harmonic Maxwell equations in Kerr-type media // *J. Spectral Theory.* 2017; arXiv:1709.07767
10. Chen X., Lassas M., Oksanen L., Paternain G.P. Detection of Hermitian connections in wave equations with cubic non-linearity; arXiv:1902.05711
11. de Hoop M., Uhlmann G., Wang Y. Nonlinear interaction of waves in elastodynamics and an inverse problem // *Math. Ann.* 2020. V. 376, N. 1–2. P. 765–795.
12. Lassas M. Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations // *Proc. Internat. Congress Math.* 2018. V. 3. P. 3739–3760.
13. Wang Y., Zhou T. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // *Comm. PDE.* 2019. V. 44, N 11. P. 1140–1158.
14. Uhlmann G., Zhai J. Inverse problems for nonlinear hyperbolic equations // *Discrete & Contin. Dynam. Sys. Ser. A.* 2021. V. 41, N 1. P. 455–469.

15. *Uhlmann G., Zhai J.* On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation // *J. Math. Pures Appl.* 2021. V. 153. P. 114–136.
16. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation; arXiv:2107.08513v1
17. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Обратная задача для нелинейного волнового уравнения // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2022. Т. 25, № 2. С. 83–100.
18. *Романов В.Г.* Обратные задачи без фазовой информации, использующие интерференцию волн // *Сиб. мат. журн.* 2018. Т. 59, № 3. С. 626–638.
19. *Дедок В.А., Карчевский А.Л., Романов В.Г.* Численный метод определения диэлектрической проницаемости по модулю вектора электрической напряжённости электромагнитного поля // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2019. Т. 22, № 3. С. 48–58.
20. *Романов В.Г.* Обратная задача электродинамики для анизотропной среды. Линейное приближение // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2020. Т. 60, № 6. С. 134–141.
21. *Романов В.Г.* Задача об определении анизотропной проводимости в уравнениях электродинамики // *Докл. РАН.* 2021. Т. 496, № 1. С. 53–55.
22. *Романов В.Г.* Бесфазовая задача об определении анизотропной проводимости в уравнениях электродинамики // *Докл. РАН.* 2021. Т. 501, № 6. С. 79–83.
23. *Natterer F.* The Mathematics of Computerized Tomography. N. Y.: Wiley & Sons, 1986.
24. *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: Физматгиз, 1961.

UDC 539.3:517.95

THE PROBLEM OF DETERMINING THE COEFFICIENT FOR A NONLINEAR TERM OF A QUASI-LINEAR WAVE EQUATION

© 2022 V. G. Romanov^{1a}, T. V. Bugueva^{1,2b}

¹*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptiyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,*

²*Novosibirsk State University,
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: ^aromanov@math.nsc.ru, ^bbugueva@math.nsc.ru

Received 09.02.2022, revised 09.02.2022, accepted 22.06.2022

Abstract. For a nonlinear differential equation, the main part of which is the wave operator, we consider the inverse problem of determining the coefficient of the nonlinear term of the equation. It is assumed that the desired coefficient is a continuous and finite function in \mathbb{R}^3 . For the original equation, plane waves are considered that are fall on the inhomogeneity at different angles. In the inverse problem, it is assumed that the solutions corresponding to these waves can be measured at the points at the boundary of a certain ball containing the inhomogeneity, at times close to the arrival of the wave front at these points, and for a certain range of angles of incidence of plane. It is shown that the solutions of the corresponding direct problems for the differential equation are bounded in some neighborhood of the wave front, and an asymptotic expansion of the solution in this neighborhood is found. On the basis of this expansion, it was established that the information specified in the inverse problem allows us to reduce the problem of finding the desired function to the problem of X-ray tomography with incomplete data. A theorem on the uniqueness of the solution of the inverse problem is formulated and proved. It is shown that, in an algorithmic sense, this problem is reduced to the well-known problem of moments.

Keywords: nonlinear wave equation, inverse problem, tomography.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.313

REFERENCES

1. Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G. Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations. *Invent. Math.*, 2018, Vol. 212, pp.781–857; arXiv:1405.3386
2. Lassas M., Uhlmann G., Wang Y. Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 2018, Vol. 360, pp. 555–609; arXiv:1606.06261
3. Hintz P., Uhlmann G. Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets. *Internat. Math. Res. Notices*, 2019, V. 22, pp. 6949–6987; <https://arxiv.org/pdf/1705.01215.pdf>
4. Barreto A.S. Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions. *Inverse Probl. Imaging*, 2020, Vol. 14, No. 6, pp. 1057–1105; arXiv:2001.11061
5. Barreto A.S., Uhlmann G., Wang Y. Inverse scattering for critical semilinear wave equations; arXiv:2003.03822
6. Hintz P., Uhlmann G., Zhai J. An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds. *Internat. Math. Res. Notices*, 2021; arXiv:2005.10447
7. Lassas M., Liimatainen T., Potenciano-Machado L., Tyni T. Uniqueness and stability of an inverse problem for a semi-linear wave equation; arXiv:2006.13193

8. Stefanov P., Barreto A.S. Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly non-linear regime; arXiv:2102.06323
9. Assylbekov Y.M., Zhou T. Direct and inverse problems for the nonlinear time-harmonic Maxwell equations in Kerr-type media. *J. Spectral Theory*, 2017; arXiv:1709.07767
10. Chen X., Lassas M., Oksanen L., Paternain G.P. Detection of Hermitian connections in wave equations with cubic non-linearity. 2019; arXiv:1902.05711
11. de Hoop M., Uhlmann G., Wang Y. Nonlinear interaction of waves in elastodynamics and an inverse problem. *Math. Ann.*, 2020, Vol. 376, No. 1–2, pp. 765–795.
12. Lassas M. Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations. *Proc. Internat. Congress Math.*, 2018, Vol. 3, pp. 3739–3760.
13. Wang Y., Zhou T. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations. *Comm. PDE*, 2019, Vol. 44, No. 11, pp. 1140–1158.
14. Uhlmann G., Zhai J. Inverse problems for nonlinear hyperbolic equations // *Discrete & Contin. Dynam. Sys. Ser. A*. 2021. V. 41, N 1. P. 455–469.
15. Uhlmann G., Zhai J. On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation // *J. Math. Pures Appl.* 2021. V. 153. P. 114–136.
16. Barreto A.S., Stefanov P. Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation; arXiv:2107.08513v1
17. Romanov V.G., Bugueva T.V. Obratnaya zadacha dlya nelineinogo volnovogo uravneniya [An inverse problem for a nonlinear wave equation]. *Sib. J. Indust. Mathematics*, 2022, Vol. 25, No. 2, pp. 83–100 (in Russian).
18. Romanov V.G. Phaseless inverse problems that use wave interference. *Sib. Math. J.*, 2018, Vol. 59, No. 3, pp. 494–504.
19. Dedok V.A., Karchevsky A.L., Romanov V.G. Numerical method of determining the permittivity from the modulus of the electric intensity vector of electromagnetic field. *J. Appl. Indust. Mathematics*, 2019. Vol. 13, No. 3, pp. 435–446.
20. Romanov V.G. Inverse problem of electrodynamics for anisotropic medium: linear approximation. *Comp. Math. and Math. Phys.*, 2020, Vol. 60, No. 6, pp. 1037–1044.
21. Romanov V.G. Problem of determining the anisotropic conductivity in electromagnetic equations. *Dokl. Mathematics*, 2021, Vol. 103, No. 1, pp. 44–46.
22. Romanov V.G. Phaseless problem of determination of anisotropic conductivity in electrodynamic equations. *Dokl. Mathematics*, 2021, Vol. 104, No. 3, pp. 385–389.
23. Natterer F. *The Mathematics of Computerized Tomography*. N. Y.: Wiley & Sons, 1986.
24. Akhiezer N.I. Klassicheskaya problema momentov i nekotorye voprosy analiza, svyazannye s neyu [The classical problem of moments and some questions of analysis connected with it]. Moscow: Fizmatgiz, 1961 (in Russian).