

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год
Том 25, №3(91)
Июль - сентябрь 2022 г.

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

СОДЕРЖАНИЕ

Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением	5
Дурдиев Д. К., Меражова Ш. Б. Обратная задача для двумерного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в цилиндрической области	14
Иванов В. В. Притягивающий предельный цикл модели нечётномерной кольцевой генной сети	25
Имомназаров Б. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Худайназаров Б. Б. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении	33
Ковалёв М. Д. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике	41
Куликов И. М., Черных И. Г., Ульяничев И. С., Тутуков А. В. Математическое моделирование ядерного горения углерода в белых карликах с использованием 7-изотопной сети реакций	55
Купцова Е. В. Осциллятор Ван дер Поля под действием случайного шума	67
Лазарева Г. Г., Максимова А. Г. Численное моделирование распространения паров вольфрама над нагреваемой поверхностью	81
Мамажонов М., Шерматова Х. М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения	93
Минаков А. В., Лобасов А. С., Шебелев А. В., Зайцев Д. В., Кабов О. А. Режимы течения плёнки жидкости, увлекаемой потоком газа в плоском горизонтальном канале, в изотермических условиях	104
Митрофанов Г. М., Карчевский А. Л. Математическое моделирование для тонко-слоистых упругих сред в сейсморазведке	120
Перцев Н. В., Топчий В. А., Логинов К. К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций	135
Романов В. Г., Бугуева Т. В. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения	154
• Старовойтов В. Н., Старовойтова Б. Н. Усреднённая математическая модель периодической упругой структуры, насыщенной жидкостью Максвелла	170

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 532.546:517.957

УСРЕДНЁННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ УПРУГОЙ СТРУКТУРЫ, НАСЫЩЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ МАКСВЕЛЛА

© 2022 В. Н. Старовойтов^а, Б. Н. Старовойтова^б*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. М. А. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия*E-mails: ^аstarovoitov@hydro.nsc.ru, ^бbotagoz@hydro.nsc.ruПоступила в редакцию 12.04.2022 г.; после доработки 12.04.2022 г.;
принята к публикации 22.06.2022 г.

Исследуется динамика упругой пористой структуры, насыщенной жидкостью Максвелла. Жидкость Максвелла принадлежит к классу упруговязких жидкостей, тензор скоростей деформации которых пропорционален сумме тензора напряжений и его производной по времени. Пористая среда моделируется линейными уравнениями упругости. Выведены усреднённые уравнения при помощи метода двухшкальной сходимости. Полученная усреднённая математическая модель описывает материал, обладающий двумя типами памяти. Первый тип памяти наследуется от жидкости Максвелла, насыщающей среду, а второй тип возникает вследствие процедуры усреднения нестационарных уравнений.

Ключевые слова: гомогенизация, двухшкальная сходимость, упругая пористая среда, жидкость Максвелла.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.314

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается механическая система, состоящая из упругого пористого скелета и вязкоупругой жидкости, заполняющей поровое пространство. Цель работы — вывести математическую модель, адекватно описывающую поведение такой структуры. Подобные исследования представляют интерес при решении задач гидроизоляции подземных выработок и гидротехнических сооружений, а также увеличения нефтеотдачи пласта. В этих задачах в качестве наполнителя пористых сред различной природы (например, керамических материалов, грунтов, гранулированных сред и т. п.) используются нанокомпозитные гели или растворы полимеров, которые представляют собой неньютоновские жидкости с вязкоупругой или вязкопластичной реологией. Довольно подробный обзор работ, рассматривающих неньютоновские жидкости в пористой среде, приведён в [1, 2]. Численное моделирование неньютоновских жидкостей в пористой среде может проводиться как со специфической геометрией пор (набор капиллярных трубок, набор сфер или цилиндров), так и в неупорядоченных средах [3].

При выводе математической модели требуется учитывать взаимодействие упругого каркаса с жидкостью на микроскопическом уровне. Поскольку размеры пор очень малы, при прямом численном моделировании возникают трудности, связанные со сложной геометрией задачи. Поэтому наиболее конструктивный подход основан на применении метода гомогенизации и выводе усреднённых (макроскопических) уравнений.

В работах [4, 5] рассматривается стационарный случай, пористый скелет считается жёстким, неньютоновская жидкость — несжимаемой, а зависимость её вязкости от тензора скоростей деформации описывается степенным законом (модель Освальда). В [4] авторы сформулировали задачу гомогенизации, доказали теорему о существовании и единственности решения,

а также теорему о сходимости. Однако усреднённые уравнения ими в явном виде не были выписаны, что затрудняет их использование на практике. В [5] рассматривалась почти такая же, как в [4], задача, для которой получено обобщение закона Дарси и приведено сравнение полученных результатов с моделированием на основе сеточной модели пористой среды.

В работах [6, 7] исследуется нестационарная задача течения несжимаемой жидкости (Максвелла или Олройда) в жёстком пористом скелете. При этом вывод макроскопических уравнений осуществляется после применения преобразования Фурье по времени и результирующие уравнения записаны в переменных Фурье, что осложняет их последующий анализ. В [8] рассматривается пористый скелет, представляющий собой вязкоупругое тело Келвина — Фойгта, а заполняющая поры неньтоновская жидкость обладает конечной ненулевой ньютоновской вязкостью при очень малых скоростях сдвига. Выведены уравнения распространения акустических волн в такой среде, однако в результирующих уравнениях также присутствует локальная переменная.

С математической точки зрения все задачи гомогенизации приводят к общей проблеме: возникает нелинейная система уравнений, состоящая из локального уравнения на ячейке периодичности структуры (для некоторой дополнительной локальной функции) и гомогенизированных уравнений среды в глобальных (макроскопических) переменных в масштабах всей пористой среды. Для усреднённого макроскопического описания необходимо исключить в макроуравнениях эту дополнительную локальную неизвестную функцию. В большинстве работ считается, что вид зависимости микроскопической неизвестной функции от макроскопической известен и просто угадывается. Однако, вообще говоря, форма этой зависимости не является очевидной и меняется от задачи к задаче. В нашей работе используется подход, который позволяет не угадывать, а выводить форму зависимости локальной неизвестной функции от глобальной. Метод был предложен в [9] и заключается в том, что уравнение на ячейке записывается в операторном виде в некотором подходящем гильбертовом пространстве. Свойства возникающих при этом операторов позволяют выразить решение уравнения на ячейке, т. е. микроскопическую неизвестную, через макроскопические функции. Этот подход облегчает последующий анализ усреднённых уравнений и даёт возможность разработать численный алгоритм вычисления коэффициентов. Интересное применение этого метода было предложено в [10], где рассмотрена задача о гомогенизации двухуровневой иерархической тонкой упругой щетинистой структуры. Такая задача возникает, например, при описании аэродинамики в окрестности листа растения или при имитации поверхности эпителия в кровеносных сосудах.

В данной работе пористая среда считается периодической структурой, подчиняющейся линейным уравнениям упругости. Гель, заполняющий поры, является слабо сжимаемой вязкоупругой жидкостью Максвелла, уравнение состояния которой заключается в том, что тензор скоростей деформации есть линейная комбинация тензора напряжений и его производной по времени.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть Ω — липшицева область в \mathbb{R}^3 и $\Omega = \Omega_F \cup \Gamma \cup \Omega_S$, где Ω_F и Ω_S — области, занятые жидкостью и упругой структурой соответственно, Γ — граница между Ω_F и Ω_S (см. рис. 1). Обозначим через $\partial\Omega$ границу области Ω . Точки и векторные поля будем обозначать жирными латинскими буквами: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, где x_i — декартовы координаты точки \mathbf{x} и u_i — декартовы компоненты вектора \mathbf{u} .

Упругая часть сплошной среды описывается стандартными уравнениями линейной упругости:

$$\varrho_S \partial_t^2 \mathbf{u}_S = \operatorname{div} \sigma_S + \varrho_S \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega_S, \quad (1)$$

где $\varrho_S = \text{const}$ — плотность среды, t — переменная времени, \mathbf{u}_S — векторное поле перемещений, \mathbf{f} — массовая сила (например, сила тяжести), $\sigma_S = \lambda_S \operatorname{div} \mathbf{u}_S I + 2\mu_S \mathfrak{D}(\mathbf{u}_S)$ — тензор

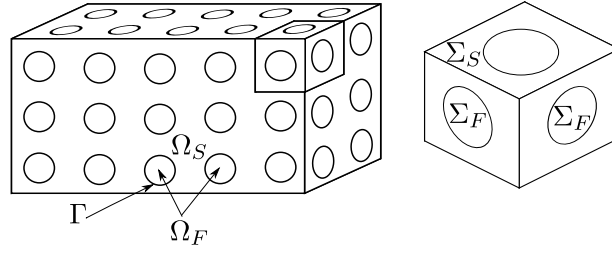


Рис. 1. Схема периодической структуры $\Omega = \Omega_S \cup \Gamma \cup \Omega_F$ и ячейки периодичности $\Sigma = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

напряжений, λ_S и μ_S — константы Ламе, I — единичный тензор, $\mathfrak{D}(\mathbf{u})$ — линейный тензор деформации, декартовы компоненты которого равны

$$\mathfrak{D}_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Жидкость Максвелла представляет собой континуум с тензором напряжений вида $-p_F I + \sigma_F$, где p_F — давление жидкости, а тензор σ_F удовлетворяет уравнению:

$$(1 + \tau_* \partial_t) \sigma_F = 2\mu_F \mathfrak{D}(\mathbf{v}_F). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{v}_F — вектор скорости жидкости, μ_F — вязкость жидкости, а константа τ_* имеет размерность времени и характеризует эффект памяти. Поскольку в пористой среде скорость жидкости не достигает больших значений, нелинейными членами в уравнениях движения можно пренебречь. Таким образом, мы имеем линейные уравнения течения слабосжимаемой жидкости:

$$\varrho_F \partial_t \mathbf{v}_F = -\nabla p_F + \operatorname{div} \sigma_F + \varrho_F \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega_F, \quad (3)$$

$$\gamma \partial_t p_F = -\operatorname{div} \mathbf{v}_F \quad \text{в } \Omega_F, \quad (4)$$

где $\varrho_F = \text{const}$ — плотность жидкости, а γ — коэффициент, характеризующий сжимаемость жидкости.

На границе Γ накладываем обычные условия непрерывности скорости и внутренних сил:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_F &= \partial_t \mathbf{u}_S \quad \text{на } \Gamma, \\ \sigma_S \mathbf{n} &= (-p_F I + \sigma_F) \mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

где \mathbf{n} — нормаль к Γ , направленная в сторону Ω_S . Кроме того, сформулируем следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_S|_{t=0} &= \mathbf{u}_S^0, \quad \partial_t \mathbf{u}_S|_{t=0} = \mathbf{u}_S^1 \quad \text{в } \Omega_S, \\ \mathbf{v}_F|_{t=0} &= \mathbf{v}_F^0, \quad p_F|_{t=0} = p_F^0, \quad \sigma_F|_{t=0} = \sigma_F^0 \quad \text{в } \Omega_F, \end{aligned} \quad (6)$$

где \mathbf{u}_S^0 , \mathbf{u}_S^1 , \mathbf{v}_F^0 , p_F^0 и σ_F^0 — заданные функции. Завершим постановку задачи однородными краевыми условиями на $\partial\Omega$:

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{0} \quad \text{на } \partial\Omega \cap \overline{\Omega_S}, \quad \mathbf{v}_F = \mathbf{0} \quad \text{на } \partial\Omega \cap \overline{\Omega_F}. \quad (7)$$

Уравнения (3), (4) для анализа удобнее переписать в перемещениях \mathbf{u}_F . Из (2) следует, что

$$\sigma_F(t) = e^{-t/\tau_*} \sigma_F^0 + \frac{2\mu_F}{\tau_*} \int_0^t e^{(\tau-t)/\tau_*} \mathfrak{D}(\mathbf{v}_F(\tau)) d\tau.$$

Поскольку в рамках линейного подхода $\mathbf{v}_F = \partial_t \mathbf{u}_F$, легко выводится, что

$$\int_0^t e^{(\tau-t)/\tau_*} \mathbf{v}_F(\tau) d\tau = \mathbf{u}_F(t) - \mathbf{u}_F^0 e^{-t/\tau_*} - \mathcal{J}_t \mathbf{u}_F,$$

где \mathbf{u}_F^0 — начальное значение \mathbf{u}_F и

$$\mathcal{J}_t \mathbf{u} = \frac{1}{\tau_*} \int_0^t e^{(\tau-t)/\tau_*} \mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Вообще говоря, поскольку \mathbf{u}_F определено с точностью до произвольной функции от \mathbf{x} , можно предположить, что $\mathbf{u}_F^0 = 0$. Однако мы сохраняем эту функцию, так как она будет играть роль продолжения функции \mathbf{u}_S^0 на Ω_F . Таким образом, получаем выражение для тензора напряжений σ_F :

$$\sigma_F(t) = \frac{2\mu_F}{\tau_*} (\mathfrak{D}(\mathbf{u}_F(t)) - \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}_F) - e^{-t/\tau_*} \mathfrak{D}(\mathbf{u}_F^0)) + e^{-t/\tau_*} \sigma_F^0. \quad (8)$$

Уравнение (4) перепишем в виде

$$p_F(t) = p_F^0 - \frac{1}{\gamma} \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{v}_F(\tau) d\tau = p_F^0 + \frac{1}{\gamma} \operatorname{div} \mathbf{u}_F^0 - \frac{1}{\gamma} \operatorname{div} \mathbf{u}_F(t). \quad (9)$$

Подстановка (8) и (9) в (3) даёт уравнения для описания жидкости Максвелла в перемещениях:

$$\varrho_F \partial_t^2 \mathbf{u}_F = \frac{1}{\gamma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_F + \frac{2\mu_F}{\tau_*} \operatorname{div} \mathfrak{D}(\mathbf{u}_F - \mathcal{J}_t \mathbf{u}_F) - \operatorname{div} F_F + \varrho_F \mathbf{f}, \quad (10)$$

где

$$F_F(t) = e^{-t/\tau_*} G_F^0 + P_F^0, \quad G_F^0 = \frac{2\mu_F}{\tau_*} \mathfrak{D}(\mathbf{u}_F^0) - \sigma_F^0, \quad P_F^0 = \left(p_F^0 + \frac{1}{\gamma} \operatorname{div} \mathbf{u}_F^0 \right) I.$$

Уравнения (1) и (10) перепишем в виде одного уравнения во всей области Ω . Для этого определим характеристическую функцию χ и вектор перемещений \mathbf{u} :

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_F, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_S, \end{cases} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_F(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega_F, \\ \mathbf{u}_S(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega_S, \end{cases} \quad \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}_F^0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_F, \\ \mathbf{u}_S^0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_S. \end{cases}$$

Если введём обозначения

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_F \chi + \varrho_S(1 - \chi), \quad \lambda = \chi/\gamma + \lambda_S(1 - \chi), \quad \mu = \chi \mu_F/\tau_* + \mu_S(1 - \chi), \\ \sigma^0(\mathbf{x}) &= \begin{cases} \sigma_F^0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_F, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_S, \end{cases} \quad p^0(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_F^0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_F, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_S, \end{cases} \\ F(t, \mathbf{x}) &= e^{-t/\tau_*} G^0(\mathbf{x}) + P^0(\mathbf{x}), \quad G^0 = 2\mu \mathfrak{D}(\mathbf{u}^0) - \sigma^0, \quad P^0 = \left(p^0 + \frac{1}{\gamma} \operatorname{div} \mathbf{u}^0 \right) I, \end{aligned} \quad (11)$$

то во всей области Ω будет выполняться следующее уравнение, которое понимается в смысле распределений:

$$\varrho \partial_t^2 \mathbf{u} = \nabla(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{div}(2\mu \mathfrak{D}(\mathbf{u})) - \operatorname{div}(2\mu \chi \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u})) - \operatorname{div}(\chi F) + \varrho \mathbf{f}. \quad (12)$$

Начальные и краевые условия (5)–(7) для (12) переписутся следующим образом:

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0, \quad \partial_t \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^1, \quad (13)$$

где $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}_S^1$ в Ω_S и $\mathbf{u}^1 = \mathbf{v}_F^0$ в Ω_F .

2. УСРЕДНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

2.1. Периодическая структура и задача A_ε

Опишем подробнее структуру рассматриваемой области. Обозначим через Σ открытый единичный куб $(0, 1)^3$ в пространстве \mathbb{R}^3 (см. рис. 1). Пусть Σ_S является замкнутым подмножеством множества $\overline{\Sigma}$ и $\Sigma_F = \Sigma \setminus \Sigma_S$. Введём периодические множества $E_S = \cup_{k \in \mathbb{Z}^3} (\Sigma_S + k)$ и $E_F = \mathbb{R}^3 \setminus E_S$. Пусть E_F и E_S являются множествами с липшицевыми границами, а E_S ещё и связно. Заметим, что $\Omega_F = \Omega \cap E_F$ и $\Omega_S = \Omega \cap E_S$. Если $\varepsilon > 0$ и $Q \subset \mathbb{R}^3$, то положим $\varepsilon Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varepsilon^{-1}\mathbf{x} \in Q\}$. Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим через Ω_S^ε и Ω_F^ε множества $\Omega \cap \varepsilon E_S$ и $\Omega \cap \varepsilon E_F$ соответственно. Очевидно, что функция $\chi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}/\varepsilon)$ является характеристической функцией множества Ω_F^ε . Обозначим через ϱ_ε , λ_ε и μ_ε соответствующие ϱ , λ и μ функции, в определении (11) которых χ заменено на χ_ε .

Задача A_ε . Для каждого $\varepsilon > 0$ найти функцию $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}_\varepsilon(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющую в $(0, T) \times \Omega$ уравнению

$$\varrho_\varepsilon \partial_t^2 \mathbf{u}_\varepsilon = \nabla(\lambda_\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon) + \operatorname{div}(2\mu_\varepsilon \mathfrak{D}(\mathbf{u}_\varepsilon)) - \operatorname{div}(2\mu_\varepsilon \chi_\varepsilon \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}_\varepsilon)) - \operatorname{div}(\chi_\varepsilon F_\varepsilon) + \varrho_\varepsilon \mathbf{f}, \quad (14)$$

а также граничным и начальным условиям

$$\mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}_\varepsilon|_{t=0} = \mathbf{u}_\varepsilon^0, \quad \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon|_{t=0} = \mathbf{u}_\varepsilon^1, \quad (15)$$

где функции F_ε , \mathbf{u}_ε^0 и \mathbf{u}_ε^1 определяются соотношениями (11) и (13), в которых Ω_F и Ω_S заменяются на Ω_F^ε и Ω_S^ε соответственно.

В дальнейшем мы используем стандартные пространства Лебега и Соболева такие, как $L^p(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ и $L^p(0, T; H^1(\Omega))$. Для пространств скалярных и векторных величин используются одни и те же обозначения. Так, выражение $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ означает, что $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3$. Норму в пространстве $L^2(\Omega)$ обозначим через $\|\cdot\|$. Вследствие неравенства Корна, можно использовать $\|\mathfrak{D}(\mathbf{u})\|$ в качестве нормы \mathbf{u} в $H_0^1(\Omega)$.

Определение 1. Функция \mathbf{u}_ε называется слабым решением задачи A_ε , если $\mathbf{u}_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\mathbf{u}_\varepsilon|_{t=0} = \mathbf{u}_\varepsilon^0$ и для всякой гладкой функции φ такой, что $\varphi|_{t=T} = \varphi|_{\partial\Omega} = 0$, справедливо следующее интегральное тождество:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \left(\varrho_\varepsilon \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \partial_t \varphi - \lambda_\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon \operatorname{div} \varphi - 2\mu_\varepsilon \mathfrak{D}(\mathbf{u}_\varepsilon) : \mathfrak{D}(\varphi) + 2\mu_\varepsilon \chi_\varepsilon \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}_\varepsilon) : \mathfrak{D}(\varphi) \right) dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega -\varrho_\varepsilon \mathbf{f} \cdot \varphi dx dt - \int_\Omega \varrho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon^1 \cdot \varphi^0 dx - \int_0^T \int_\Omega \chi_\varepsilon F_\varepsilon : \mathfrak{D}(\varphi) dx dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\varphi^0 = \varphi|_{t=0}$.

В этом определении и далее T является произвольным положительным числом, а двоеточие — двойная свёртка тензоров, т. е. $\mathcal{U} : \mathcal{V} = \mathcal{U}_{ij} \mathcal{V}_{ij}$ для тензоров второго ранга \mathcal{U} и \mathcal{V} . Кроме того, мы используем обычное соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Нетрудно доказать, что задача A_ε имеет единственное слабое решение, если $\mathbf{u}_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega)$, $\mathbf{u}_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega)$, $\sigma_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$, $p_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$ и $\mathbf{f} \in L^2([0, T] \times \Omega)$. Доказательство разрешимости можно провести методом Галёркина на основе энергетической оценки, вывод которой без довольно стандартных обоснований корректности производимых операций приведён ниже. Для упрощения обозначений мы опустим индекс ε . Умножая (14) на $\partial_t \mathbf{u}$ и интегрируя по частям по Ω ,

получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\varrho |\partial_t \mathbf{u}|^2 + \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} (2\mu \mathfrak{D}(\mathbf{u}) - 2\mu \chi \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) - \chi F) : \mathfrak{D}(\partial_t \mathbf{u}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \varrho \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим второй интеграл в левой части этого равенства:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2\mu \left(\mathfrak{D}(\mathbf{u}) - \chi \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) - \frac{\chi}{2\mu} F \right) : \mathfrak{D}(\partial_t \mathbf{u}) d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} 2\mu \left(\mathfrak{D}(\mathbf{u}) - \chi \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) - \frac{\chi}{2\mu} F \right) : \partial_t \left(\mathfrak{D}(\mathbf{u}) - \chi \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) - \frac{\chi}{2\mu} F \right) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} 2\mu \chi \left(\mathfrak{D}(\mathbf{u}) - \chi \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) - \frac{\chi}{2\mu} F \right) : \left(\mathfrak{D}(\partial_t \mathcal{J}_t \mathbf{u}) + \frac{1}{2\mu} \partial_t F \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Поскольку $\tau_* \partial_t F = -e^{-t/\tau_*} G^0 = -F + P^0$, $\chi^2 = \chi$ и

$$\tau_* \partial_t \mathcal{J}_t \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathcal{J}_t \mathbf{u}, \quad (18)$$

получаем соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2\mu \left(\mathfrak{D}(\mathbf{u}) - \chi \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) - \frac{\chi}{2\mu} F \right) : \mathfrak{D}(\partial_t \mathbf{u}) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu \left| \mathfrak{D}(\mathbf{u}) - \chi \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) - \frac{\chi}{2\mu} F \right|^2 d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} \frac{2\mu \chi}{\tau_*} \left| \mathfrak{D}(\mathbf{u}) - \chi \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) - \frac{\chi}{2\mu} F \right|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{\chi}{\tau_*} \left(\mathfrak{D}(\mathbf{u}) - \chi \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) - \frac{\chi}{2\mu} F \right) : P^0 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (17) после интегрирования по t от нуля до произвольного $s \in (0, T]$ в силу неравенства Юнга даёт энергетическую оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\varrho |\partial_t \mathbf{u}|^2 + \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + 2\mu \left| \mathfrak{D}(\mathbf{u}) - \chi \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) - \frac{\chi}{2\mu} F \right|^2 \right) d\mathbf{x} \Big|_{t=s} \leq \int_0^s \int_{\Omega} (\varrho |\partial_t \mathbf{u}|^2 + \varrho |\mathbf{f}|^2) d\mathbf{x} dt \\ + \int_{\Omega} \left(\varrho |\mathbf{u}^1|^2 + \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}^0|^2 + 2\mu \left| \mathfrak{D}(\mathbf{u}^0) - \frac{\chi}{2\mu} (G^0 + P^0) \right|^2 + \frac{s \chi}{4\tau_* \mu} |P^0|^2 \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

В дальнейших рассуждениях индекс ε возвращается. Применяя неравенство Гронуолла, из этого неравенства легко получить следующие оценки:

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon\| \leq C, \quad (19)$$

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \left\| \mathfrak{D}(\mathbf{u}_\varepsilon) - \chi_\varepsilon \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}_\varepsilon) - \frac{\chi_\varepsilon}{2\mu_\varepsilon} F_\varepsilon \right\| \leq C, \quad (20)$$

где постоянная C зависит только от T , $\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega \times [0, T])}$, $\|\mathbf{u}_\varepsilon^1\|$, $\|\mathfrak{D}(\mathbf{u}_\varepsilon^0)\|$, $\|p_\varepsilon^0\|$ и $\|\sigma_\varepsilon^0\|$.

Из (20) можно получить оценку для $\mathfrak{D}(\mathbf{u}_\varepsilon)$. Действительно, если $S_\varepsilon = \mathfrak{D}(\mathbf{u}_\varepsilon) - \chi_\varepsilon \mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}_\varepsilon)$, то из (20) следует, что S_ε ограничена в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Но в силу (18) $\mathfrak{D}(\mathbf{u}_\varepsilon) = S_\varepsilon + (\chi_\varepsilon/\tau_*) \int_0^t S_\varepsilon(s) ds$, поэтому

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{D}(\mathbf{u}_\varepsilon)\| \leq C, \quad (21)$$

где постоянная C зависит от тех же параметров, что и постоянная в (20).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. Если $\mathbf{u}_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega)$, $\mathbf{u}_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega)$, $\sigma_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$, $p_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$ и $\mathbf{f} \in L^2([0, T] \times \Omega)$, то для всех $\varepsilon > 0$ и $T \in (0, \infty)$ задача A_ε имеет единственное слабое решение \mathbf{u}_ε , для которого справедливы оценки (19) и (21).

Дальнейшая цель нашей работы состоит в осуществлении предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ в задаче A_ε , который приведёт к выводу усреднённых уравнений.

2.2. Двухкальная сходимость

Для вывода усреднённых уравнений в области Ω будем использовать метод двухкальной сходимости, предложенный в [11, 12] и далее развитый в ряде работ (см., например, [13–16]). Сформулируем основные результаты этого подхода, адаптированные к нашей задаче.

Говорят, что последовательность функций $\{u_\varepsilon\}$ в $L^2([0, T] \times \Omega)$ двухкально сходится к некоторой функции $u \in L^2([0, T] \times \Omega \times \Sigma)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega u_\varepsilon(t, \mathbf{x}) \phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) d\mathbf{x} dt = \int_0^T \int_\Omega \int_\Sigma u(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} dt$$

для любой гладкой функции $\phi = \phi(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, являющейся Σ -периодической по $\boldsymbol{\xi}$. Двухкальную сходимость будем обозначать $u_\varepsilon \rightharpoonup u$.

Каждая ограниченная в $L^2([0, T] \times \Omega)$ последовательность содержит сходящуюся двухкально подпоследовательность. Если $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $L^2([0, T] \times \Omega)$, то $u_\varepsilon \rightharpoonup v$, где $v(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = u(t, \mathbf{x})$. Если $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ и χ_ε — определённая в п. 2.1 характеристическая функция, то $\chi_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup \chi u$, где $\chi = \chi(\boldsymbol{\xi})$, $\chi(\boldsymbol{\xi}) = 1$ при $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma_F$ и $\chi(\boldsymbol{\xi}) = 0$ при $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma_S$.

Обозначим через $H_\#^1(\Sigma)$ пространство Σ -периодических функций, принадлежащих $H^1(\Sigma)$. Точки из области Σ всегда будут обозначаться через $\boldsymbol{\xi}$. Кроме того, операторы ∇_x , ∇_ξ и \mathfrak{D}_x , \mathfrak{D}_ξ будут обозначать операторы, действующие по переменным \mathbf{x} и $\boldsymbol{\xi}$ соответственно.

Лемма 1. Если $\{\mathbf{u}_\varepsilon\}$ является ограниченной последовательностью в $L^2(0, T; H^1(\Omega))$, то существуют функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ из пространства $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ и функция $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ из пространства $L^2([0, T] \times \Omega; H_\#^1(\Sigma)/\mathbb{R})$ такие, что с точностью до выбора подпоследовательности

- 1) $\mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}$, $\nabla \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_x \mathbf{u} + \nabla_\xi \bar{\mathbf{u}}$, $\mathfrak{D}(\mathbf{u}_\varepsilon) \rightharpoonup \mathfrak{D}_x(\mathbf{u}) + \mathfrak{D}_\xi(\bar{\mathbf{u}})$,
- 2) $\nabla \mathcal{J}_t \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_x \mathcal{J}_t \mathbf{u} + \nabla_\xi \mathcal{J}_t \bar{\mathbf{u}}$, $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_t \mathbf{u}_\varepsilon) \rightharpoonup \mathfrak{D}_x(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) + \mathfrak{D}_\xi(\mathcal{J}_t \bar{\mathbf{u}})$.

Доказательство. Первое утверждение хорошо известно и его доказательство можно найти, например, в [11, 13, 14, 16, 17]. Докажем второе утверждение, причём ограничимся лишь его первой частью, так как вторая доказывается аналогично. Обозначим через Ψ некоторую матричную функцию из $L^2([0, T] \times \Omega \times \Sigma)$ такую, что $\nabla \mathcal{J}_t \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \Psi$, и через $\Phi = \Phi(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ — произвольную гладкую матричную функцию, которая является Σ -периодической по $\boldsymbol{\xi}$ и обращается в нуль при $t = T$. Вследствие (18) $\tau_* \partial_t \nabla \mathcal{J}_t \mathbf{u}_\varepsilon + \nabla \mathcal{J}_t \mathbf{u}_\varepsilon = \nabla \mathbf{u}_\varepsilon$. Умножая последнее равенство на $\Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon)$ и интегрируя по частям, получим, что

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla \mathcal{J}_t \mathbf{u}_\varepsilon : (-\tau_* \partial_t \Phi + \Phi) d\mathbf{x} dt = \int_0^T \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_\varepsilon : \Phi d\mathbf{x} dt.$$

Переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ даёт соотношение

$$\int_0^T \int_{\Omega \times \Sigma} \Psi : (-\tau_* \partial_t \Phi + \Phi) d\xi dx dt = \int_0^T \int_{\Omega \times \Sigma} (\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_\xi \bar{\mathbf{u}}) : \Phi d\xi dx dt,$$

которое означает, что Ψ является слабым решением задачи

$$\tau_* \partial_t \Psi + \Psi = \nabla_x \mathbf{u} + \nabla_\xi \bar{\mathbf{u}}, \quad \Psi|_{t=0} = 0.$$

Легко видеть, что $\Psi = \mathcal{J}_t(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_\xi \bar{\mathbf{u}})$, откуда следует доказываемое утверждение. \square

2.3. Переход к пределу в задаче A_ε

Далее константой C обозначаются все константы, не зависящие от ε . Предположим, что последовательности $\{\mathbf{u}_\varepsilon^1\}$, $\{\mathfrak{D}(\mathbf{u}_\varepsilon^0)\}$, $\{\sigma_\varepsilon^0\}$ и p_ε^0 являются ограниченными в $L^2(\Omega)$ равномерно по ε . Тогда существуют функции

$$\mathbf{u}^1, \sigma^0, p^0 \in L^2(\Omega \times \Sigma), \quad \mathbf{u}^0 \in H_0^1(\Omega), \quad \bar{\mathbf{u}}^0 \in L^2([0, T] \times \Omega; H_\#^1(\Sigma)/\mathbb{R})$$

такие, что с точностью до выбора подпоследовательности

$$\mathbf{u}_\varepsilon^1 \rightharpoonup \mathbf{u}^1, \quad \sigma_\varepsilon^0 \rightharpoonup \sigma^0, \quad p_\varepsilon^0 \rightharpoonup p^0, \quad \mathfrak{D}(\mathbf{u}_\varepsilon^0) \rightharpoonup \mathfrak{D}_x(\mathbf{u}^0) + \mathfrak{D}_\xi(\bar{\mathbf{u}}^0) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

То же самое справедливо для последовательностей $\{\chi_\varepsilon\}$, $\{\varrho_\varepsilon\}$, $\{\lambda_\varepsilon\}$ и $\{\mu_\varepsilon\}$:

$$\chi_\varepsilon \rightharpoonup \chi(\xi), \quad \varrho_\varepsilon \rightharpoonup \varrho(\xi), \quad \lambda_\varepsilon \rightharpoonup \lambda(\xi) \quad \text{и} \quad \mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu(\xi).$$

Следовательно, $F_\varepsilon \rightharpoonup \bar{F}(t, \mathbf{x}, \xi)$, где

$$\bar{F}(t, \mathbf{x}, \xi) = e^{-t/\tau_*} \bar{G}^0(\mathbf{x}, \xi) + \bar{P}^0(\mathbf{x}, \xi),$$

$$\bar{G}^0 = 2\mu(\mathfrak{D}_x(\mathbf{u}^0) + \mathfrak{D}_\xi(\bar{\mathbf{u}}^0)) - \sigma^0, \quad \bar{P}^0 = \left(p^0 + \frac{1}{\gamma} \operatorname{div}_x \mathbf{u}^0 + \frac{1}{\gamma} \operatorname{div}_\xi \bar{\mathbf{u}}^0 \right) I.$$

Из теоремы 1 и леммы 1 следует существование функций $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ и $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}, \xi)$ таких, что $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\partial_t \mathbf{u} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $\bar{\mathbf{u}} \in L^2([0, T] \times \Omega; H_\#^1(\Sigma)/\mathbb{R})$ и с точностью до выбора подпоследовательности $\mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}$, $\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \partial_t \mathbf{u}$, $\mathfrak{D}(\mathbf{u}_\varepsilon) \rightharpoonup \mathfrak{D}_x(\mathbf{u}) + \mathfrak{D}_\xi(\bar{\mathbf{u}})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть $\phi = \phi(t, \mathbf{x})$ и $\bar{\phi} = \bar{\phi}(t, \mathbf{x}, \xi)$ являются произвольными гладкими функциями, обращающимися в нуль при $t = T$ и $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, причём $\bar{\phi}$ является Σ -периодической по ξ . В равенстве (16) положим $\varphi(t, \mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x}) + \varepsilon \bar{\phi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon)$ и перейдём к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поскольку функции ϕ и $\bar{\phi}$ являются независимыми, мы получаем следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \int_{\Sigma} \left(\varrho \partial_t \mathbf{u} \cdot \partial_t \phi - \lambda (\operatorname{div}_x \mathbf{u} + \operatorname{div}_\xi \bar{\mathbf{u}}) \operatorname{div}_x \phi \right. \\ & \quad \left. - 2\mu(\mathfrak{D}_x(\mathbf{u}) + \mathfrak{D}_\xi(\bar{\mathbf{u}})) : \mathfrak{D}_x(\phi) + 2\mu\chi(\mathfrak{D}_x(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) + \mathfrak{D}_\xi(\mathcal{J}_t \bar{\mathbf{u}})) : \mathfrak{D}_x(\phi) \right) d\xi dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \int_{\Sigma} -\varrho \mathbf{f} \cdot \phi d\xi dx dt - \int_{\Omega} \int_{\Sigma} \varrho \mathbf{u}^1 \cdot \phi^0 d\xi dx - \int_0^T \int_{\Omega} \int_{\Sigma} \chi \bar{F} : \mathfrak{D}_x(\phi) d\xi dx dt, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \left(\lambda (\operatorname{div}_x \mathbf{u} + \operatorname{div}_\xi \bar{\mathbf{u}}) \operatorname{div}_\xi \bar{\phi} + 2\mu(\mathfrak{D}_x(\mathbf{u}) + \mathfrak{D}_\xi(\bar{\mathbf{u}})) : \mathfrak{D}_\xi(\bar{\phi}) \right. \\ & \quad \left. - 2\mu\chi(\mathfrak{D}_x(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) + \mathfrak{D}_\xi(\mathcal{J}_t \bar{\mathbf{u}})) : \mathfrak{D}_\xi(\bar{\phi}) - \chi \bar{F} : \mathfrak{D}_\xi(\bar{\phi}) \right) d\xi = 0, \quad (23) \end{aligned}$$

где $\phi^0 = \phi|_{t=0}$.

Уравнение (23) выполняется для почти всех $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Omega$. Это уравнение называется уравнением в ячейке.

Хотя для численных расчётов можно использовать выведенные уравнения (22), (23) (см., например, [18]), эта система слишком сложна и ничего не говорит о механических свойствах гомогенизированной среды. Нашей следующей целью является исключение функции $\bar{\mathbf{u}}$ и локальной переменной ξ из уравнения (22). Для этого найдём явное выражение для функции $\bar{\mathbf{u}}$ из уравнения в ячейке (23) и подставим его в (22).

3. УСРЕДНЁННАЯ СИСТЕМА

3.1. Решение уравнения в ячейке

Так как уравнение в ячейке (23) содержит правую часть \bar{F} и члены с оператором \mathcal{J}_t , мы не можем применить стандартную технику (см., например, [11, 13, 14, 17]), чтобы явно выразить функцию $\bar{\mathbf{u}}$ через \mathbf{u} и \bar{F} . Поэтому воспользуемся техникой, разработанной в [9].

Перепишем уравнение (23) в виде уравнения в гильбертовом пространстве $H = H_{\#}^1(\Sigma)/\mathbb{R}$ со скалярным произведением

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \int_{\Sigma} \mathfrak{D}_{\xi}(\bar{\mathbf{u}}) : \mathfrak{D}_{\xi}(\bar{\mathbf{v}}) d\xi.$$

Норму в этом пространстве будем обозначать $\|\cdot\|_H$. Используя теорему Рисса о представлении, определим ограниченные самосопряжённые операторы $\mathcal{A}: H \rightarrow H$ и $\mathcal{B}: H \rightarrow H$ такие, что

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) &= \int_{\Sigma} (\lambda \operatorname{div}_{\xi} \bar{\mathbf{u}} \operatorname{div}_{\xi} \bar{\mathbf{v}} + 2\mu \mathfrak{D}_{\xi}(\bar{\mathbf{u}}) : \mathfrak{D}_{\xi}(\bar{\mathbf{v}})) d\xi, \\ (\mathcal{B}\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) &= \int_{\Sigma} 2\mu\chi \mathfrak{D}_{\xi}(\bar{\mathbf{u}}) : \mathfrak{D}_{\xi}(\bar{\mathbf{v}}) d\xi \end{aligned}$$

для всех $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ из пространства H . Кроме того, в пространстве H существуют функции $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_{ij}(\xi)$, $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_{ij}(\xi)$ и $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{x}, \xi)$, $i, j = 1, 2, 3$, такие, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{ij}, \bar{\mathbf{v}}) &= \int_{\Sigma} (\lambda \delta_{ij} \operatorname{div}_{\xi} \bar{\mathbf{v}} + 2\mu (\mathfrak{D}_{\xi}(\bar{\mathbf{v}}))_{ij}) d\xi, \\ (\mathbf{b}_{ij}, \bar{\mathbf{v}}) &= \int_{\Sigma} 2\mu\chi (\mathfrak{D}_{\xi}(\bar{\mathbf{v}}))_{ij} d\xi, \quad (\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{v}}) = \int_{\Sigma} \chi \bar{F} : \mathfrak{D}_{\xi}(\bar{\mathbf{v}}) d\xi \end{aligned}$$

для всех $\bar{\mathbf{v}} \in H$. Здесь δ_{ij} — символ Кронекера. Следовательно, (23) эквивалентно следующему уравнению в пространстве H :

$$\mathcal{A}\bar{\mathbf{u}} - \mathcal{J}_t \mathcal{B}\bar{\mathbf{u}} = -(\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{b}_{ij} \mathcal{J}_t) (\mathfrak{D}_x(\mathbf{u}))_{ij} + \boldsymbol{\eta}. \quad (24)$$

Это уравнение выполняется для почти всех $t \in [0, T]$ и $\mathbf{x} \in \Omega$.

Чтобы решить уравнение (24), установим несколько свойств операторов \mathcal{A} и \mathcal{B} . Нетрудно видеть, что из определения оператора \mathcal{A} следует существование некоторых положительных постоянных c_1 и c_2 таких, что

$$c_1 \|\bar{\mathbf{v}}\|_H^2 \leq (\mathcal{A}\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}) \leq c_2 \|\bar{\mathbf{v}}\|_H^2 \quad \text{для всех } \bar{\mathbf{v}} \in H. \quad (25)$$

Из левого неравенства (25) следует, что оператор \mathcal{A} является обратимым в H .

Оператор \mathcal{B} является вырожденным, однако многое о нём скажет

Лемма 2. Оператор \mathcal{B} обладает следующими свойствами:

- 1) ядро оператора $N(\mathcal{B}) = \{\mathbf{v} \in H \mid \mathbf{v} = \text{const в } \Sigma_F\}$ и $N(\mathcal{B})^\perp \subset \{\mathbf{v} \in H \mid \Delta \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Sigma_S\}$;
- 2) образ оператора $R(\mathcal{B})$ является замкнутым подпространством в H и существуют положительные постоянные c_3 и c_4 такие, что

$$c_4 \|\mathbf{v}\|_H^2 \leq (\mathcal{B}\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}) \leq c_3 \|\bar{\mathbf{v}}\|_H^2 \quad \text{для всех } \mathbf{v} \in R(\mathcal{B});$$

- 3) на $R(\mathcal{B})$ определён и ограничен обратный оператор \mathcal{B}^{-1} .

Доказательство этой леммы аналогично приведённому в [9, предложение 4.10].

Для решения уравнения (24) нам потребуется следующая

Лемма 3. Для всех $i, j \in \{1, 2, 3\}$ функция \mathbf{b}_{ij} принадлежит $R(\mathcal{B})$ и, как следствие, существует единственная функция $\mathbf{w}_{ij} \in R(\mathcal{B})$ такая, что $\mathcal{B}\mathbf{w}_{ij} = \mathbf{b}_{ij}$.

Доказательство. Поскольку $R(\mathcal{B})$ замкнуто в H , $R(\mathcal{B})$ совпадает с $N(\mathcal{B})^\perp$. Таким образом, для доказательства того, что $\mathbf{b}_{ij} \in R(\mathcal{B})$, достаточно убедиться, что $(\mathbf{b}_{ij}, \mathbf{v}) = 0$ для всех $\mathbf{v} \in N(\mathcal{B})$. Но это является следствием первого утверждения леммы 2 и определения \mathbf{b}_{ij} . \square

Решение уравнения (24) будем искать в виде

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\bar{\mathbf{u}}} - \mathbf{w}_{ij}(\mathfrak{D}_x(\mathbf{u}))_{ij}, \quad (26)$$

где функции $\mathbf{w}_{ij} = \mathbf{w}_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ определены в лемме 3. Нетрудно видеть, что (24) эквивалентно уравнению

$$\mathcal{A}\bar{\bar{\mathbf{u}}} - \mathcal{J}_t \mathcal{B}\bar{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{g}, \quad (27)$$

где $\mathbf{g} = (\mathcal{A}\mathbf{w}_{ij} - \mathbf{a}_{ij})(\mathfrak{D}_x(\mathbf{u}))_{ij} + \boldsymbol{\eta}$.

Поскольку пара функций $(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})$ удовлетворяет уравнению (24), пара $(\mathbf{u}, \bar{\bar{\mathbf{u}}})$ удовлетворяет уравнению (27). Таким образом, (27) имеет решение для специальной правой части \mathbf{g} , соответствующей функции \mathbf{u} . Сформулируем более общий результат.

Лемма 4. Для каждого $\mathbf{g} \in L^2([0, T] \times \Omega; H)$ существует единственная функция $\bar{\bar{\mathbf{u}}} \in L^2([0, T] \times \Omega; H)$, удовлетворяющая (27). Более того, для почти всех $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Omega$ эту функцию можно представить в H следующим образом:

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}(t, \mathbf{x}) = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{\tau_*} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B} \int_0^t e^{(s-t)/\tau_*(\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})} \mathcal{A}^{-1}\mathbf{g}(s, \mathbf{x}) ds, \quad (28)$$

где \mathcal{I} обозначает тождественный оператор в H .

Доказательство. Сначала докажем единственность. Обозначим через \mathbf{h} разность между двумя возможными решениями (27). Поскольку уравнение (27) является линейным, то \mathbf{h} удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}\mathbf{h} - \mathcal{J}_t \mathcal{B}\mathbf{h} = 0$. Следовательно, используя неравенства (25), получаем

$$c_1 \|\mathbf{h}\|_H^2 \leq (\mathcal{A}\mathbf{h}, \mathbf{h}) = (\mathcal{B}\mathcal{J}_t \mathbf{h}, \mathbf{h}) = (\mathcal{J}_t \mathbf{h}, \mathcal{B}\mathbf{h}) \leq c_3 \|\mathcal{J}_t \mathbf{h}\|_H \|\mathbf{h}\|_H.$$

Так как $\|\mathcal{J}_t \mathbf{h}\|_H \leq \mathcal{J}_t \|\mathbf{h}\|_H$, существует некоторая постоянная c такая, что $\|\mathbf{h}(t)\|_H \leq c \mathcal{J}_t \|\mathbf{h}(t)\|_H$. В силу неравенства Гронуолла из этой оценки следует, что $\mathbf{h} = 0$.

Для доказательства разрешимости уравнения (27) заметим, что в силу (18) оно эквивалентно следующей задаче для функции $\boldsymbol{\zeta} = \mathcal{J}_t \bar{\bar{\mathbf{u}}}$:

$$\tau_* \partial_t \boldsymbol{\zeta} + (\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})\boldsymbol{\zeta} = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{g}, \quad \boldsymbol{\zeta}|_{t=0} = 0.$$

Единственное решение этой задачи имеет вид

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \frac{1}{\tau_*} \int_0^t e^{(s-t)/\tau_*(\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})} \mathcal{A}^{-1}\mathbf{g}(s) ds.$$

Очевидно, что функция $\bar{\mathbf{u}} = \tau_* \partial_t \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}$ принадлежит пространству $L^2([0, T] \times \Omega; H)$, удовлетворяет (27) и для неё справедливо представление (28). \square

3.2. Математическая модель усреднённой среды

Теперь мы можем исключить $\bar{\mathbf{u}}$ из (22). Учитывая определения функций \mathbf{a}_{ij} и \mathbf{b}_{ij} , уравнение (22) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \left(\varrho_{\theta} \partial_t \mathbf{u} \cdot \partial_t \boldsymbol{\phi} - \lambda_{\theta} \operatorname{div}_x \mathbf{u} \operatorname{div}_x \boldsymbol{\phi} - 2\mu_{\theta} \mathfrak{D}_x(\mathbf{u}) : \mathfrak{D}_x(\boldsymbol{\phi}) + 2\theta \frac{\mu_F}{\tau_*} \mathfrak{D}_x(\mathcal{J}_t \mathbf{u}) : \mathfrak{D}_x(\boldsymbol{\phi}) \right) d\mathbf{x} dt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{a}_{ij}, \bar{\mathbf{u}}) (\mathfrak{D}_x(\boldsymbol{\phi}))_{ij} d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{b}_{ij}, \mathcal{J}_t \bar{\mathbf{u}}) (\mathfrak{D}_x(\boldsymbol{\phi}))_{ij} d\mathbf{x} dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} -\varrho_{\theta} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\phi} d\mathbf{x} dt - \int_{\Omega} \mathbf{u}_{\theta}^1 \cdot \boldsymbol{\phi}^0 d\mathbf{x} - \int_0^T \int_{\Omega} \bar{F}_{\theta} : \mathfrak{D}_x(\boldsymbol{\phi}) d\mathbf{x} dt, \quad (29) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{\Sigma} \chi(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad \varrho_{\theta} = \int_{\Sigma} \varrho(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \varrho_F \theta + \varrho_S(1 - \theta), \\ \lambda_{\theta} &= \int_{\Sigma} \lambda(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{\gamma} \theta + \lambda_S(1 - \theta), \quad \mu_{\theta} = \int_{\Sigma} \mu(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \frac{\mu_F}{\tau_*} \theta + \mu_S(1 - \theta), \\ \mathbf{u}_{\theta}^1(\mathbf{x}) &= \int_{\Sigma} \varrho \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad \bar{F}_{\theta}(t, \mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \chi(\boldsymbol{\xi}) \bar{F}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

Подставив выражение для \mathbf{g} в (28) и воспользовавшись представлением (26), мы получим, что

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(t) &= -(\mathfrak{D}_x(\mathbf{u}))_{kl} \mathcal{A}^{-1} \mathbf{a}_{kl} \\ &+ \int_0^t (\mathfrak{D}_x(\mathbf{u}))_{kl} \mathcal{M}_{t-s} (\mathbf{w}_{kl} - \mathcal{A}^{-1} \mathbf{a}_{kl}) ds + \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{\eta} + \int_0^t \mathcal{M}_{t-s} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{\eta} ds, \quad (30) \end{aligned}$$

где $\mathcal{M}_t = \frac{1}{\tau_*} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B} e^{-t/\tau_* (\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B})}$. Кроме того, поскольку

$$\mathcal{J}_t \bar{\mathbf{u}} = \mathcal{J}_t \bar{\bar{\mathbf{u}}} - (\mathfrak{D}_x(\mathcal{J}_t \mathbf{u}))_{kl} \mathbf{w}_{kl},$$

имеем

$$\mathcal{J}_t \bar{\mathbf{u}} = -(\mathfrak{D}_x(\mathcal{J}_t \mathbf{u}))_{kl} \mathbf{w}_{kl} + \int_0^t (\mathfrak{D}_x(\mathbf{u}))_{kl} \mathcal{N}_{t-s} (\mathbf{w}_{kl} - \mathcal{A}^{-1} \mathbf{a}_{kl}) ds + \int_0^t \mathcal{N}_{t-s} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{\eta} ds, \quad (31)$$

где $\mathcal{N}_t = \frac{1}{\tau_*} e^{-t/\tau_* (\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B})}$. Используя (29)–(31), получаем усреднённые уравнения в перемене

щениях \mathbf{u}

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} (\varrho_{\theta} \partial_t \mathbf{u} \cdot \partial_t \boldsymbol{\phi} - \alpha_{ijkl}^{\theta} (\mathfrak{D}_x(\mathbf{u}))_{kl} (\mathfrak{D}_x(\boldsymbol{\phi}))_{ij} + \beta_{ijkl}^{\theta} (\mathfrak{D}_x(\mathcal{J}_t \mathbf{u}))_{kl} (\mathfrak{D}_x(\boldsymbol{\phi}))_{ij}) d\mathbf{x} dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^t \omega_{ijkl}(t-s) (\mathfrak{D}_x(\mathbf{u}))_{kl}(s) ds (\mathfrak{D}_x(\boldsymbol{\phi}))_{ij} d\mathbf{x} dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} -\varrho_{\theta} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\phi} d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} -\mathbf{u}_{\theta}^1 \cdot \boldsymbol{\phi}^0 d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\Omega} \nu_{ij} (\mathfrak{D}_x(\boldsymbol{\phi}))_{ij} d\mathbf{x} dt, \quad (32) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_{ijkl}^{\theta} &= \lambda_{\theta} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu_{\theta} \delta_{ik} \delta_{jl} - (\mathbf{a}_{ij}, \mathcal{A}^{-1} \mathbf{a}_{kl}), \quad \beta_{ijkl}^{\theta} = 2\theta \frac{\mu_F}{\tau_*} \delta_{ik} \delta_{jl} - (\mathbf{b}_{ij}, \mathbf{w}_{kl}), \\ \omega_{ijkl}(t) &= -(\mathbf{a}_{ij}, \mathcal{M}_t(\mathbf{w}_{kl} - \mathcal{A}^{-1} \mathbf{a}_{kl})) + (\mathbf{b}_{ij}, \mathcal{N}_t(\mathbf{w}_{kl} - \mathcal{A}^{-1} \mathbf{a}_{kl})), \\ \nu_{ij} &= \left(\mathbf{a}_{ij}, \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{\eta} + \int_0^t \mathcal{M}_{t-s} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{\eta} ds \right) - \left(\mathbf{b}_{ij}, \int_0^t \mathcal{N}_{t-s} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{\eta} ds \right) - (\bar{F}_{\theta})_{ij}. \end{aligned}$$

Отметим, что компоненты тензоров α_{ijkl}^{θ} и β_{ijkl}^{θ} являются постоянными, тогда как $\omega_{ijkl} = \omega_{ijkl}(t)$ и $\nu_{ij} = \nu_{ij}(t, \mathbf{x})$.

Введём тензоры \bar{P} , \bar{Q} , \bar{R} , имеющие следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{ijkl} &= 2\theta \frac{\mu_F}{\tau_*} \delta_{ik} \delta_{jl}; \quad \bar{R}_{ijkl} = \frac{1}{\gamma} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{2\mu_F}{\tau_*} \delta_{ik} \delta_{jl}; \\ \bar{Q}_{ijkl} &= \lambda_{\theta} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu_{\theta} \delta_{ik} \delta_{jl} = \theta \bar{R}_{ijkl} + (1-\theta) \sigma_{ijkl}^S. \end{aligned} \quad (33)$$

Тогда тензоры α^{θ} и β^{θ} можно переписать в виде

$$\alpha_{ijkl}^{\theta} = \bar{Q}_{ijkl} - (\mathbf{a}_{ij}, \mathcal{A}^{-1} \mathbf{a}_{kl}), \quad \beta_{ijkl}^{\theta} = \bar{P}_{ijkl} - (\mathbf{b}_{ij}, \mathbf{w}_{kl}). \quad (34)$$

Интегральное тождество (32), описывающее поле перемещений для гомогенизированной среды, можно записать как одно уравнение, понимаемое в смысле распределений:

$$\varrho_{\theta} \partial_t^2 \mathbf{u} - \operatorname{div}(\alpha^{\theta} \mathfrak{D}_x(\mathbf{u})) + \operatorname{div}(\beta^{\theta} \mathfrak{D}_x(\mathcal{J}_t \mathbf{u})) + \operatorname{div} \int_0^t \omega(t-s) \mathfrak{D}_x(\mathbf{u}(s)) ds = \varrho_{\theta} \mathbf{f} - \operatorname{div} \nu. \quad (35)$$

Рассматривая это уравнение, можно лучше понять, что из себя представляет усреднённая среда, какие эффекты в ней преобладают в зависимости от входящих параметров, например пористости θ , времени релаксации τ_* и др. Это будет сделано в следующем разделе.

4. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСРЕДНЁННОЙ МОДЕЛИ

Формулы (34) для коэффициентов тензоров α^{θ} , β^{θ} и ω содержат функции \mathbf{a}_{kl} , \mathbf{b}_{kl} , $\boldsymbol{\eta}$, операторы \mathcal{A} , \mathcal{B} и их обратные, определённые в пространстве $H = H_{\#}^1(\Sigma)/\mathbb{R}$. С математической точки зрения все эти функции и операторы хорошо определены и полностью описаны, однако вычисление их конкретных значений требует некоторых усилий. Ниже предлагаются численные алгоритмы, которые могут быть реализованы с использованием, например, открытого программного продукта FreeFem++, основанного на методе конечных элементов.

4.1. Вычисление a_{kl} и b_{kl}

Пусть функции $q_{kl} \in H$, $k, l \in \{1, 2, 3\}$, являются решениями задач

$$\int_{\Sigma} (\mathfrak{D}_{\xi}(q_{kl}))_{ij} (\mathfrak{D}_{\xi}(\mathbf{v}))_{ij} d\xi = \int_{\Sigma} \chi (\mathfrak{D}_{\xi}(\mathbf{v}))_{kl} d\xi \quad \text{для всех } \mathbf{v} \in H,$$

которые могут быть легко решены методом конечных элементов. Нетрудно показать, что

$$b_{kl} = \frac{2\mu_F}{\tau_*} q_{kl}, \quad a_{kl} = \left(\frac{1}{\gamma} - \lambda_S \right) \delta_{kl} \delta_{ij} q_{ij} + 2 \left(\frac{\mu_F}{\tau_*} - \mu_S \right) q_{kl} \quad \text{для } k, l \in \{1, 2, 3\}.$$

4.2. Вычисление \mathcal{A}^{-1} и w_{kl}

Оператор \mathcal{A} определён в п. 3.1. Он является обратимым в H , т. е. $\mathbf{v} = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{f} \in H$ является единственным решением уравнения $\mathcal{A}\mathbf{v} = \mathbf{f}$ для каждого $\mathbf{f} \in H$. Нахождение решения этого уравнения легко реализовать с помощью метода конечных элементов.

Перейдём к нахождению функций w_{kl} . Они были определены в лемме 3 и являются единственным решением уравнения $\mathcal{B}w_{kl} = b_{kl}$, причём $b_{kl}, w_{kl} \in R(\mathcal{B})$. Вычисление функций b_{kl} описано в п. 4.1, поэтому нам необходимо с заданной точностью найти решение $\mathbf{w} \in R(\mathcal{B})$ уравнения $\mathcal{B}\mathbf{w} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{b} \in R(\mathcal{B})$. Так как оператор \mathcal{B} является вырожденным в H , численное решение этого уравнения связано с определёнными трудностями. Однако для произвольного $\varepsilon > 0$ с помощью метода конечных элементов легко найти решение \mathbf{w}_{ε} уравнения $(\mathcal{B} + \varepsilon\mathcal{I})\mathbf{w}_{\varepsilon} = \mathbf{b}$.

Нетрудно видеть, что $\mathbf{w}_{\varepsilon} \in R(\mathcal{B})$ и $\|\mathbf{w}_{\varepsilon}\| \leq C_1$ для некоторой постоянной C_1 , которая не зависит от ε и зависит лишь от $\|\mathbf{b}\|$ и нормы оператора \mathcal{B}^{-1} на $R(\mathcal{B})$. Последняя ограничена в силу леммы 2. Поскольку $\mathbf{w}_{\varepsilon} - \mathbf{w} = -\varepsilon\mathcal{B}^{-1}\mathbf{w}_{\varepsilon}$, мы получаем, что $\|\mathbf{w}_{\varepsilon} - \mathbf{w}\| \leq C\varepsilon$ для некоторой не зависящей от ε постоянной C . Выбирая ε достаточно малым, мы можем с любой точностью аппроксимировать функцию \mathbf{w} .

4.3. Вычисление $e^{-t(\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})}$

Для произвольного $\mathbf{v}_0 \in H$ рассмотрим задачу

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (36)$$

Очевидно, что $\mathbf{v}(t) = e^{-t(\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})}\mathbf{v}_0 \in H$ является её единственным решением.

Построим приближённое решение задачи (36) на интервале $(0, T)$, $T \in (0, \infty)$, используя метод полудискретизации. Для $N \in \mathbb{N}$ положим $\tau = T/N$. Пусть функции \mathbf{v}_k , $k = 1, 2, \dots, N$, являются решениями задач

$$\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k-1} + \tau(\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})\mathbf{v}_k = 0. \quad (37)$$

Просуммировав эти равенства по k от единицы до произвольного $n \leq N$, получим

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_0 - \tau(\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}) \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k.$$

Из ограниченности операторов \mathcal{A}^{-1} и \mathcal{B} (см. лемму 2) следует существование постоянной C такой, что

$$\|\mathbf{v}_n\| \leq \|\mathbf{v}_0\| + C\tau \sum_{k=1}^n \|\mathbf{v}_k\|.$$

Применив дискретное неравенство Гронуолла, получим равномерную ограниченность $\|\mathbf{v}_k\|$. Поэтому из (37) следует, что

$$\|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k-1}\| \leq C\tau \quad (38)$$

для некоторой постоянной C .

Определим на $[0, T]$ две функции, являющиеся интерполяциями набора $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}}^\tau(s) &= \mathbf{v}_k(1 - k + s/\tau) + \mathbf{v}_{k-1}(k - s/\tau) \quad \text{при } s \in [(k-1)\tau, k\tau], \\ \bar{\mathbf{v}}^\tau(s) &= \mathbf{v}_k \quad \text{при } s \in ((k-1)\tau, k\tau].\end{aligned}$$

В силу (38)

$$\int_0^T \|\hat{\mathbf{v}}^\tau(s) - \bar{\mathbf{v}}^\tau(s)\| ds = \sum_{k=1}^N \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k-1}\| \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} (k - s/\tau) ds = \frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^N \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k-1}\| \leq C\tau.$$

Более того, верно соотношение $\partial_s \hat{\mathbf{v}}^\tau + (\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})\bar{\mathbf{v}}^\tau = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathbf{v}}^\tau(t) - \mathbf{v}(t)\| &\leq \int_0^t \|\partial_s \hat{\mathbf{v}}^\tau - \partial_s \mathbf{v}\| ds \leq \|(\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})\| \int_0^t \|\bar{\mathbf{v}}^\tau(s) - \mathbf{v}(s)\| ds \\ &\leq C \int_0^t (\|\hat{\mathbf{v}}^\tau(s) - \mathbf{v}(s)\| + \|\hat{\mathbf{v}}^\tau(s) - \bar{\mathbf{v}}^\tau(s)\|) ds \leq C \left(\tau + \int_0^t \|\hat{\mathbf{v}}^\tau(s) - \mathbf{v}(s)\| ds \right).\end{aligned}$$

Применяя неравенство Гронуолла, получаем, что $\|\hat{\mathbf{v}}^\tau(t) - \mathbf{v}(t)\| \leq C\tau$ при всех $t \in [0, T]$. Таким образом, мы построили приближённое решение $\hat{\mathbf{v}}^\tau$ задачи (36) и оценили его отличие от точного решения \mathbf{v} , которое необходимо было посчитать.

4.4. Расчёты

Приведём несколько примеров, демонстрирующих свойства усреднённого континуума при различных значениях параметра θ , характеризующего объёмную долю жидкости, так что чистой жидкости соответствует $\theta = 1$, а упругому телу — $\theta = 0$. Зададим параметры жидкости Максвелла и изотропного упругого материала следующими значениями:

$$\begin{aligned}\mu_F &= 1 \cdot 10^{-3}, \quad \lambda_S = 2.777778 \cdot 10^9, \quad \gamma = 4,597696 \cdot 10^{-10}, \\ \mu_S &= 4.166667 \cdot 10^9, \quad \tau_* \in [10^{-3}, 10^{-1}].\end{aligned}$$

Приведённый интервал изменения параметра релаксации τ_* является характерным для многих вязкоупругих жидкостей. Начальные данные для простоты вычислений считаются равными нулю. Вид ячейки периодичности, также для простоты, берётся в форме, показанной на рис. 2.

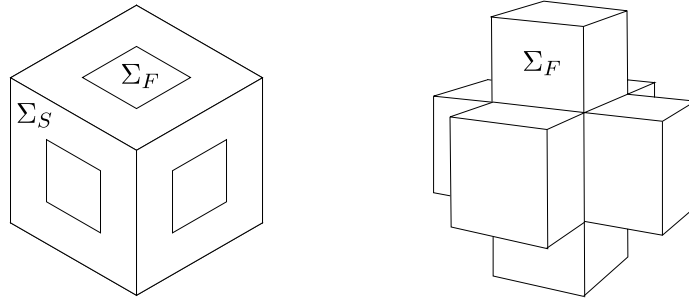


Рис. 2. Периодическая ячейка $\Sigma = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

На рис. 3 представлена зависимость $|\beta^\theta - \bar{P}|/|\bar{P}|$ и $|\beta^\theta|/|\bar{P}|$ от θ , где

$$|\bar{P}| = \left(\sum_{ijkl} \bar{P}_{ijkl} \bar{P}_{ijkl} \right)^{1/2}.$$

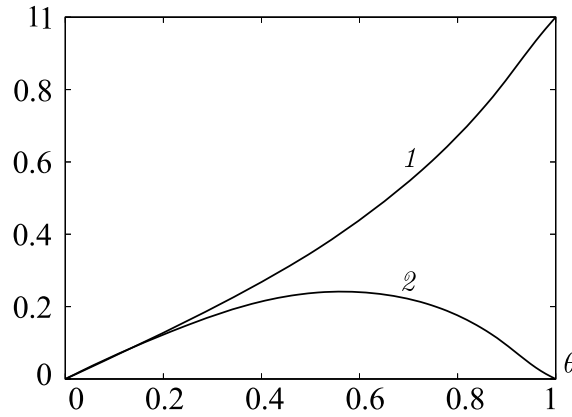


Рис. 3. Зависимость $|\beta^\theta|/|\bar{P}|$ (кривая 1) и $|\beta^\theta - \bar{P}|/|\bar{P}|$ (кривая 2) от θ

Тензор α^θ зависит от θ более сложным образом. Кривые, приведённые на рис. 4, демонстрируют зависимость $|\alpha^\theta|/|\bar{Q}|$, $|\alpha^\theta - \theta\bar{R}|/|\bar{Q}|$, $|\alpha^\theta - (1-\theta)\sigma_S|/|\bar{Q}|$ и $|\alpha^\theta - \bar{Q}|/|\bar{Q}|$ от параметра θ .

Из рис. 4 и формул (33), (34) можно заметить, что $\alpha^\theta \rightarrow \sigma_S$ при $\theta \rightarrow 0$ и $\alpha^\theta \rightarrow \bar{R}$ при $\theta \rightarrow 1$.

Следовательно, формальные предельные переходы в (35) при $\theta \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow 1$ дают следующие уравнения:

$$\varrho_S \partial_t^2 \mathbf{u} - \operatorname{div} \sigma_S + \operatorname{div} \int_0^t \omega(t-s) \mathfrak{D}_x(\mathbf{u}(s)) ds = \varrho_S \mathbf{f} \quad \text{при } \theta \rightarrow 0,$$

$$\varrho_F \partial_t^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\gamma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - 2 \frac{\mu_F}{\tau_*} \operatorname{div} \mathfrak{D}(\mathbf{u} - \mathcal{J}_t \mathbf{u}) + \operatorname{div} \int_0^t \omega(t-s) \mathfrak{D}_x(\mathbf{u}(s)) ds = \rho_F \mathbf{f} \quad \text{при } \theta \rightarrow 1.$$

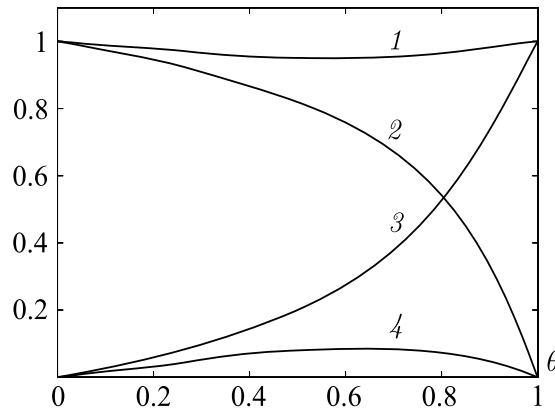


Рис. 4. Зависимость $|\alpha^\theta|/|\bar{Q}|$ (кривая 1), $|\alpha^\theta - \theta\bar{R}|/|\bar{Q}|$ (кривая 2), $|\alpha^\theta - (1-\theta)\sigma_S|/|\bar{Q}|$ (кривая 3) и $|\alpha^\theta - \bar{Q}|/|\bar{Q}|$ (кривая 4) от θ

Заметим, что предельные уравнения слегка отличаются от соответствующих уравнений чистых сред и содержат член с тензором ω , который отвечает за память и возникает вследствие процедуры усреднения. Зависимость $|\omega(t)|/|\alpha^\theta|$ от времени (в секундах) для различных значений θ приведена на рис. 5.

Отметим, что $|\omega(t)|/|\alpha^\theta|$ практически обращается в нуль при $t \sim 0.05$ с. Это говорит о том, данная память является довольно короткой и член с памятью в (35), содержащий ω , во многих приложениях можно опустить, если только не присутствуют быстрые осцилляции.

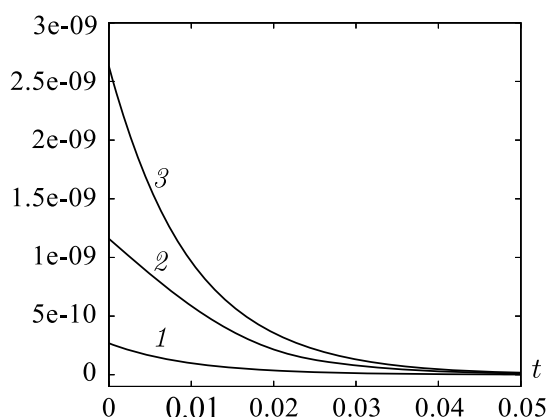


Рис. 5. Зависимость $|\omega(t)|/|\alpha^\theta|$ от времени для разных значений параметра θ : кривая 1 соответствует $\theta = 0.104$, кривая 2 — $\theta = 0.5$, кривая 3 — $\theta = 0.896$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведенное усреднённое уравнение (35), описывающее пористую среду, насыщенную вязкоупругой слабосжимаемой жидкостью Максвелла, включает три основных члена. Два из них, содержащие тензоры α^θ и β^θ , относятся к напряжениям. Видно, что полученный материал наследует память жидкости Максвелла. Третий интегральный член представляет другой вид памяти, который является стандартным для процедуры усреднения нестационарных задач (см., например, [4, 9]).

Все коэффициенты, присутствующие в гомогенизированном уравнении, найдены в явном виде. Хотя представляющие их выражения довольно сложны, коэффициенты могут быть найдены численно при помощи алгоритмов, приведённых в разд. 4. Был проведён тестовый расчёт коэффициентов усреднённого уравнения с использованием доступного некоммерческого пакета FreeFEM++ для трёхмерного случая, когда пористая среда имеет специфическую геометрию пор. Результаты расчётов показали, что эффект памяти, обусловленный усреднением, очень мал. Система «забывает» текущую историю за очень короткий промежуток времени. Поэтому в большинстве приложений (когда отсутствуют высокочастотные колебания) этот член можно просто опустить. Как и ожидалось, в предельном случае при $\theta \rightarrow 0$ (объёмная доля жидкости обращается в нуль, а упругое тело занимает весь объём) усреднённые уравнения соответствуют исходной упругой среде, а в пределе при $\theta \rightarrow 1$ усреднённые уравнения совпадают с уравнениями, которые используются для описания исходной жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sochi T. Non-Newtonian flow in porous media // *Polymer*. 2010. V. 51, N 22. P. 5007–5023; DOI: 10.1016/j.polymer.2010.07.047
2. Khomami L., Kardos B., Skartsis J.L. Polymeric flow through fibrous media // *J. Rheology*. 1992. V. 36, N 4. P. 589–620; DOI: 10.1122/1.550365
3. Morais A.F., Seybold H., Herrmann H.J., Andrade J.S. Non-Newtonian fluid flow through three-dimensional disordered porous media // *Phys. Review Letters*. 2009. V. 103, N 19. P. 194502; DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.194502
4. Bourgeat A., Mikelić A. Homogenization of a polymer flow through a porous medium // *Nonlinear analysis, methods and applications*. 1996. V. 27, N 7. P. 1221–1253.
5. Shah C.B., Yortsos Y.C. Aspects of flow of power-law fluids in porous media // *AIChE J.* 1995. V. 41, N 5. P. 1099–1112; DOI: 10.1002/aic.690410506
6. Khuzhayorov B., Auriault J.-L., Royer P. Derivation of macroscopic filtration law for transient linear viscoelastic fluid flow in porous media // *Internat. J. Engrg. Sci.* 2000. V. 38. P. 487–504.

7. *Lopez de Haro M., del Rio J.A.P., Whitaker S.* Flow of Maxwell fluids in porous media // *Transport in Porous Media*. 1996. V. 25, N 2. P. 167–192.
8. *Gilbert R.P., Panchenko A., Vasilic A.* Homogenizing the acoustics of cancellous bone with an interstitial non-Newtonian fluid // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 2011. V. 74, N 4. P. 1005–1018; DOI:10.1016/j.na.2010.06.053
9. *Hoffmann K.-H., Botkin N.D., Starovoitov V.N.* Homogenization of interfaces between rapidly oscillating fine elastic structures and fluids // *SIAM J. Appl. Math.* 2005. V. 65, N 3. P. 983–1005.
10. *Sazhenkov S.A., Sazhenkova E.V.* Homogenization of a submerged two-level bristle structure for modeling in biotechnology // *Сиб. электрон. мат. известия*. 2020. Т. 17. С. 1359–1450.
11. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // *SIAM J. Math. Analysis*. 1989. V. 20, N 3. P. 608–623.
12. *Nguetseng G.* Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // *SIAM J. Math. Analysis*. 1990. V. 21, N 6. P. 1394–1414.
13. *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence // *SIAM J. Math. Analysis*. 1992. V. 23. P. 1482–1518.
14. *Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.* Two-scale convergence // *Internat. J. Pure Appl. Math.* 2002. V. 2, N 1. P. 35–86.
15. *Жиков В.В.* О двухмасштабной сходимости // *Труды сем. им. И. Г. Петровского*. 2003. Т. 23. С. 149–186.
16. *Pavliotis G.A., Stuart A.M.* Multiscale methods: Averaging and Homogenization. N. Y.: Springer-Verl., 2008.
17. *Holmbom A.* Homogenization of parabolic equations: An alternative approach and some corrector-type results // *Appl. Math.* 1995. V. 42, N 5. P. 321–43.
18. *Gipouloux O., Zine A.-M.* Computation of the filtration laws through porous media for a non-Newtonian fluid obeying the power law // *Comput. Geosciences*. 1997. V. 1, N 2. P. 127–153; DOI: 10.1023/A:1011517312249

UDC 532.546:517.957

HOMOGENIZATION OF A PERIODIC ELASTIC STRUCTURE SATURATED WITH A MAXWELL FLUID

© 2022 V. N. Starovoitov, B. N. Starovoitova

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: ^astarovoitov@hydro.nsc.ru, ^bbotagoz@hydro.nsc.ru

Received 12.04.2022, revised 12.04.2022, accepted 22.06.2022

Abstract. In this paper, the dynamics of an elastic porous medium saturated with a Maxwell fluid is investigated. Maxwell fluid belongs to the class of viscoelastic fluids whose deformation rate tensor is proportional to the sum of the stress tensor and its time derivative. The porous medium is governed by the equations of linear elasticity. A homogenized model of the structure is derived by employing the two-scale convergence technique. The model describes a new material which possesses two kinds of memory. The first memory is inherited from the Maxwell fluid, the second one is standard for the homogenization of non-stationary problems.

Keywords: homogenization, two-scale convergence, elastic porous medium, Maxwell fluid.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.314

REFERENCES

1. Sochi T. Non-Newtonian flow in porous media. *Polymer*, 2010, Vol. 51, No. 22, pp. 5007–5023; DOI: 10.1016/j.polymer.2010.07.047
2. Khomami L., Kardos B., Skartsis J.L. Polymeric flow through fibrous media. *J. Rheology*, 1992, Vol. 36, No. 4, pp. 589–620; DOI: 10.1122/1.550365
3. Morais A.F., Seybold H., Herrmann H.J., Andrade J.S. Non-Newtonian fluid flow through three-dimensional disordered porous media. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, Vol. 103, No. 19, pp. 194502; DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.194502
4. Bourgeat A., Mikelić A. Homogenization of a polymer flow through a porous medium. *Nonlinear Anal., Meth. Appl.*, 1996, Vol. 27, No. 7, pp. 1221–1253.
5. Shah C.B., Yortsos Y.C. Aspects of flow of power-law fluids in porous media. *AIChE J.*, 1995, Vol. 41, No. 5, pp. 1099–1112; DOI: 10.1002/aic.690410506
6. Khuzhayorov B., Auriault J.-L., Royer P. Derivation of macroscopic filtration law for transient linear viscoelastic fluid flow in porous media. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 2000, Vol. 38, pp. 487–504.
7. Lopez de Haro M., del Rio J.A.P., Whitaker S. Flow of Maxwell fluids in porous media. *Transport in Porous Media*, 1996, Vol. 25, No. 2, pp. 167–192.
8. Gilbert R.P., Panchenko A., Vasilic A. Homogenizing the acoustics of cancellous bone with an interstitial non-Newtonian fluid. *Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.*, 2011, Vol. 74, No. 4, pp. 1005–1018; DOI:10.1016/j.na.2010.06.053
9. Hoffmann K.-H., Botkin N.D., Starovoitov V.N. Homogenization of interfaces between rapidly oscillating fine elastic structures and fluids. *SIAM J. Appl. Math.*, 2005, Vol. 65, No. 3, pp. 983–1005.
10. Sazhenkov S.A., Sazhenkova E.V. Homogenization of a submerged two-level bristle structure for modeling in biotechnology. *Siber. Electronic Math. Reports*, 2020, Vol. 17, pp. 1359–1450.

11. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 1989, Vol. 20, No. 3, pp. 608–623.
12. Nguetseng G. Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics. *SIAM J. Math. Anal.*, 1990, Vol. 21, No. 6, pp. 1394–1414.
13. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 1992, Vol. 23, pp. 1482–1518.
14. Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P. Two-scale convergence. *Intern. J. Pure Appl. Math.*, 2002, Vol. 2, No. 1, pp. 35–86.
15. Zhikov V.V. On two-scale convergence. *J. Math. Sci.*, 2004, Vol. 120, No. 3, pp. 1328–1352.
16. Pavliotis G.A., Stuart A.M. Multiscale methods: Averaging and Homogenization. N. Y.: Springer-Verl., 2008.
17. Holmbom A. Homogenization of parabolic equations: An alternative approach and some corrector-type results. *Appl. Math.*, 1995, Vol. 42, No. 5, pp. 321–43.
18. Gipouloux O., Zine A.-M. Computation of the filtration laws through porous media for a non-Newtonian fluid obeying the power law. *Comput. Geosciences*, 1997, Vol. 1, No. 2, pp. 127–153;
DOI: 10.1023/A:1011517312249