

# СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году  
Выходит 4 раза в год  
**Том 25, №4(92)**  
Октябрь - декабрь 2022 г.

## ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

## СОДЕРЖАНИЕ

Аюпова Н. Б., Голубятников В. П., Минушкина Л. С. Об инвариантных поверхностях в фазовых портретах моделей кольцевых генных сетей .....	5
Боронина М. А., Куликов И. М., Черных И. Г., Винс Д. В. Использование комбинации схем Роу и Русанова для численного решения уравнений магнитной гидродинамики в задачах космической плазмы .....	14
• Васильев В. И., Кардашевский А. М., Попов В. В. Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности с неоднородными граничными условиями Дирихле .....	27
Демиденко Г. В. Метод решения одной биологической задачи большой размерности .....	42
Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е. Эволюция волновой картины кусочно-линейного одноосного растяжения и сжатия разномодульного упругого стержня .....	54
Ермишина В. Е. Гиперболическая модель сильнонелинейных волн в двухслойных течениях неоднородной жидкости .....	71
Мишин А. В. Учёт обобщённой производной и коллективного влияния фаз на процесс гомогенизации .....	86
Нещадим М. В. Уравнение Лиувилля и точно транзитивные представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ ..	99
Остросаблин Н. И. Единственность решения граничных задач статических уравнений теории упругости с несимметричной матрицей модулей упругости .....	107
Паламарчук Е. С. Оптимальное управление в задаче долгосрочного трекинга экспоненциального процесса Орнштейна — Уленбека .....	116
Перцев Н. В., Бочаров Г. А., Логинов К. К. Численное моделирование динамики популяции Т-лимфоцитов в лимфоузле .....	136
Петраков И. Е. Контактная задача изгиба многослойной композитной пластины с учётом различных модулей упругости при растяжении и сжатии .....	153
Селиверстов Е. Ю. Иерархический метод установки параметров параллельных популяционных метаэвристических алгоритмов оптимизации .....	164
Сказка В. В. Кососимметрические разностные аналоги четвёртого порядка аппроксимации первой производной .....	179
Скворцова М. А., Ыскак Т. Оценки решений дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием, описывающих конкуренцию нескольких видов микроорганизмов ..	193
Терсенов Ар. С. О существовании вязких решений анизотропных параболических уравнений с переменными показателями анизотропности .....	206
Чумаков Г. А., Чумакова Н. А. О локализации неустойчивого решения одной системы трёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром .....	221

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 517.63

**ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ РЕТРОСПЕКТИВНОЙ ОБРАТНОЙ  
ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕОДНОРОДНЫМИ  
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ**© 2022 В. И. Васильев<sup>1a</sup>, А. М. Кардашевский<sup>1b</sup>, В. В. Попов<sup>1c</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,  
ул. Беллинского, 58, г. Якутск 677000, Россия

E-mails: <sup>a</sup>vasvasil@mail.ru, <sup>b</sup>kardam123@gmail.com, <sup>c</sup>imi.pm.pvv@mail.ru

Поступила в редакцию 26.05.2022 г.; после доработки 30.05.2022 г.;  
принята к публикации 22.06.2022 г.

Рассматривается ретроспективная обратная задача теплопроводности с нестационарными неоднородными граничными условиями Дирихле. Задача аппроксимируется разностной схемой Кранка — Николсона, имеющей второй порядок аппроксимации как по пространственной переменной, так и по времени. Для определения решения полученной системы линейных алгебраических уравнений предлагается использовать итерационный метод сопряжённых градиентов. Приведены примеры восстановления гладкого, негладкого и разрывного начальных условий, в том числе и с введением «шума», характерного для дополнительных условий обратных задач, и его сглаживания с помощью фильтра Савицкого — Голея.

**Ключевые слова:** ретроспективная задача теплопроводности, разностная схема Кранка — Николсона, метод сопряжённых градиентов, возмущение условия переопределения, фильтр Савицкого — Голея.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.403

**ВВЕДЕНИЕ**

Теоретическое исследование условной корректности и разработка эффективных численных методов решения обратных задач являются актуальными в связи с широким использованием их в качестве математических моделей различных природных явлений и технологических процессов. Основные вопросы теоретических исследований обратных задач для дифференциальных и интегральных уравнений с частными производными, многочисленные подходы и методы их численного решения обобщены в монографиях [1–8]. Широко распространены вариационные методы, методы квазиобращения, и сегодня, пожалуй, самым распространённым и популярным является метод регуляризации Тихонова.

Приведём краткий обзор численных методов решения ретроспективной обратной задачи теплопроводности. В работе [9] предложен модифицированный метод регуляризации Тихонова, основанный на использовании оценки погрешности априорной стратегии и апостериорного правила выбора для нахождения параметра регуляризации. Работа [10] посвящена разработке алгоритма выбора параметра тихоновской регуляризации для решения радиально-симметричной обратной задачи теплопроводности по заданному конечному распределению температуры. Для решения обратной задачи теплопроводности с обратным временем в [11] в сложных и нерегулярных областях предложена гибридная разностная схема, использующая локализованные радиальные базисные функции бессеточного метода в сочетании с методом регуляризации Тихонова.

В статьях [12, 13] предложен оптимизационный метод решения дискретной обратной задачи для гиперболического уравнения и доказано, что функционал невязки дискретной обратной задачи имеет единственную стационарную точку, совпадающую с решением обратной задачи. В работе [14] доказано, что нелинейный функционал невязки конечно-разностного аналога коэффициентной обратной задачи имеет единственную точку глобального минимума, получена оценка скорости сходимости к решению исходной обратной задачи. В [15] предложен эффективный оптимизационный метод решения конечно-разностного аналога обратной задачи идентификации младшего коэффициента волнового уравнения.

Другим эффективным подходом решения обратных задач являются итерационные методы академика А. А. Самарского и его учеников [16], применяемые к дискретному аналогу исходной ретроспективной обратной задачи теплопроводности. Авторами данной статьи с коллегами выполнен ряд работ [17–20], в которых сначала строится конечно-разностный аналог обратной задачи, затем для численной реализации полученной системы линейных алгебраических уравнений применяется итерационный метод сопряжённых градиентов. При этом на каждой итерации решается прямая задача теплопроводности с последующим уточнением искомого начального условия. В [21] для численной реализации дискретного аналога ретроспективной обратной задачи для уравнения субдиффузии предложено использовать метод сопряжённых градиентов. В [22] обратная задача идентификации финитного начального условия задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности осуществлена с помощью прямого метода решения интегрального дискретного аналога уравнения Фредгольма 1 рода, эквивалентного интегралу Пуассона, с помощью метода сопряжённых градиентов. В работах [23–25] для численной идентификации младшего коэффициента и правой части параболического уравнения, зависящих от времени, на каждом временном слое строится специальная декомпозиция решений, в одномерном случае называемых методом прогонки для сложных систем [26].

При численном решении ретроспективной обратной задачи с возмущёнными условиями переопределения целесообразно пользоваться цифровым сглаживающим фильтром [27], представляющим собой полином, построенный методом наименьших квадратов. В данной работе мы остановимся на численных методах решения ретроспективной обратной задачи теплопроводности.

Предлагается распространение данного подхода итерационного метода решения ретроспективной обратной задачи теплопроводности с неоднородными нестационарными граничными условиями Дирихле. Приведены примеры восстановления гладкого, негладкого и разрывного начальных условий, в том числе и с введением «шума», характерного для дополнительных условий обратных задач, и его сглаживания с помощью фильтра Савицкого — Голея. Проведённые численные эксперименты показали хорошую эффективность предложенного итерационного метода.

## 1. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Пусть в области  $\bar{\Omega}_T = [0, l] \times [0, T]$  требуется определить функцию  $u(x, t)$  — решение одномерного уравнения теплопроводности:

$$c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

где эллиптическая часть уравнения (1) имеет вид

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in (0, l), \quad 0 < t \leq T.$$

Предположим, что на границах области решение уравнения (1) удовлетворяет неоднородному нестационарному граничному условию Дирихле

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (2)$$

Задаём начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (3)$$

Следует отметить, что для корректности постановки начально-краевой задачи (1)–(3) необходимо выполнение условия согласования начального и граничных условий, другими словами, начальное условие на границах области должна удовлетворять заданным граничным условиям.

Численное решение параболической задачи (1)–(3) проведём с помощью конечно-разностного метода [28, 29]. Для этого в области введём равномерную сетку по пространственной переменной с постоянным шагом  $h$  и обозначим через  $\omega$  множество внутренних узлов:

$$\omega = \{x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad h = l/n\}.$$

Введём гильбертово пространство сеточных функций  $y, v \in H = L_2(\omega)$ , в котором скалярное произведение и норма определены следующим образом:

$$(y, w) = \sum_{i=0}^n y_i v_i h, \quad \|y\| \equiv \sqrt{(y, y)}.$$

В предположении достаточной гладкости коэффициента  $k(x, t)$  в области  $\omega$  сеточный аналог эллиптического оператора  $L$  записывается в виде

$$A(t)y(t) = -\frac{1}{h} \left( a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (4)$$

Дискретный аналог правой части уравнения (1) с учётом граничных условий (2) имеет вид

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(0, t) + \frac{a_1}{h^2} \mu(0, t) & \text{при } i = 0, \\ f(x_i, t) & \text{при } i = 1, \dots, N-1, \\ f(l, t) + \frac{a_n}{h^2} \mu(l, t) & \text{при } i = n. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь в соответствии с интегро-интерполяционным методом построения дискретного аналога [28] можно использовать следующие формулы для коэффициентов:  $a_i(t) = k(x_{i-0.5}, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

В пространстве сеточных функций  $H$  построенный оператор  $A$  является самосопряжённым, положительно определённым, ограниченным:  $A = A^* > 0$ . Начально-краевой задаче (1)–(3) поставим в соответствие задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения

$$c \frac{dy}{dt} + Ay = \varphi(t), \quad x \in \omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (6)$$

при заданном начальном условии

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}. \quad (7)$$

Для приближённого решения дифференциально-разностной задачи (6), (7) мы будем пользоваться однородной двухслойной разностной схемой Кранка — Николсона:

$$C^j \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau} + \frac{1}{2} A^j (y^j + y^{j-1}) = \varphi^j, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (8)$$

$$y_0 = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}. \quad (9)$$

Здесь использованы обозначения:  $y^j$  — разностное решение на момент времени  $t^j = j\tau$ , где  $\tau = T/J > 0$  — шаг по времени,  $C^j = c(x, t_{j-1/2})I$ ,  $A^j = A(x, t_{j-1/2})$ ,  $\varphi^j = \varphi(x, t_{j-1/2})$ ,  $x \in \bar{\omega}$ .

Отметим, что разностная схема (8), (9) при достаточной гладкости исходных данных аппроксимирует задачу (1)–(3) со вторым порядком по шагам пространственно-временной сетки  $\psi = O(\tau^2 + h^2)$ , стремящиеся к нулю:  $\tau \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$ .

Введя положительно определённые, самосопряжённые, ограниченные операторы

$$D^j = \left( C^j + \frac{\tau}{2} A^j \right)^{-1}, \quad S^j = D^j \left( C^j - \frac{\tau}{2} A^j \right), \quad (10)$$

уравнение (8) запишем в виде

$$y^j = S^j y^{j-1} + \tau D^j \varphi^j. \quad (11)$$

Поскольку исходные операторы  $A$ ,  $C$  являются самосопряжёнными, положительно определёнными и ограниченными, в силу леммы Келлога [30] получаем априорную оценку решения задачи (8), (9) в финальный момент времени:

$$\|y^J\| < \|y^0\| + T \max_{j \in \{1, J\}} \|\varphi^j\|. \quad (12)$$

Априорная оценка (12) показывает устойчивость решения разностной схемы (8), (9) по начальному и граничным условиям, а также из неё следует, что решение разностной схемы (8), (9) сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(3) со скоростью порядка  $O(\tau^2 + h^2)$ .

## 2. ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ РЕТРОСПЕКТИВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Сформулируем ретроспективную обратную начально-краевую задачу для параболического уравнения. Пусть в области  $\bar{\Omega}_T = [0, l] \times [0, T]$  требуется определить функции  $u(x, t)$ ,  $u_0(x)$  из условий

$$c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad 0 \leq t < T. \quad (13)$$

На границах области решение уравнения (13) в каждый момент времени удовлетворяет неоднородному граничному условию Дирихле

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (14)$$

и выполняется финальное условие

$$u(x, T) = \phi(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (15)$$

Задаче (13)–(15) поставим в соответствие однородную двухслойную разностную схему Кранка — Николсона:

$$C^j \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau} + \frac{1}{2} A^j (y^j + y^{j-1}) = \varphi^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J-1, \quad (16)$$

$$y_J = \phi(x), \quad x \in \bar{\omega}. \quad (17)$$

Для численной реализации дискретного аналога (16), (17) ретроспективной обратной задачи (13)–(15) целесообразно использовать итерационный процесс, основанный на последовательном уточнении начального условия и решении на каждой итерации прямой задачи. Придадим этой задаче соответствующую операторную формулировку. Из (10), (11) для заданного  $y^0$  на конечный момент времени получим

$$y^J = \mathcal{A}y^0 + \frac{\tau}{2} \sum_{m=2}^J \mathcal{B}_m D^{J-m+1} \varphi^{J-m+1}, \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}, \quad (18)$$

где

$$\mathcal{A} = \prod_{j=1}^J S^j, \quad \mathcal{B}_1 = I, \quad \mathcal{B}_j = \prod_{m=2}^J S^m, \quad j = 2, 3, \dots, J. \quad (19)$$

Таким образом, с учётом (5), (6) и (11) численное решение дискретного аналога (16), (17) ретроспективной обратной задачи (13)–(15) сводится к решению следующего сеточного операторного уравнения:

$$\mathcal{A}y^0 = \phi(\mathbf{x}) - \frac{\tau}{2} \sum_{m=2}^J \mathcal{B}_m D^{J-j+1} \varphi^{J-j+1}, \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \quad (20)$$

В силу самосопряженности и положительной определённости операторов  $A^j, C^j, j = 1, 2, \dots, J$ , подлежащий обращению оператор  $\mathcal{A}$  также является самосопряжённым и положительно определённым. Следовательно, для определения решения системы линейных алгебраических уравнений (20), из соображений наиболее быстрой сходимости, целесообразно использовать метод сопряжённых градиентов для систем линейных алгебраических уравнений. Её численная реализация состоит из следующих этапов:

1. Запускаем счётчик итераций  $k = 0$ .

1а) Задаём начальное приближение искомой функции в виде линейной функции, в обязательном порядке согласованной с граничными условиями в начальный момент времени  $v_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \bar{\omega}_h$ .

1б) Вычисляем начальную невязку  $r_0(\mathbf{x}) = y^J(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \bar{\omega}_h$ , — решение дискретного аналога прямой задачи для параболического уравнения с заданным начальным условием  $\nu_0(\mathbf{x})$ :

$$y^0 = \nu_0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}_h, \\ C \frac{\hat{y} - y}{\tau} + \frac{1}{2} A(\hat{y} + y) = \varphi, \quad (\mathbf{x}, t) \in \omega_{h\tau}.$$

Следует отметить, что вычисленная таким образом начальная невязка имеет определяющее значение, поскольку она в себе носит информацию о граничных условиях, которые автоматически учитываются в правой части (см. формулу (5)).

1в) Задаём начальное приближение вспомогательной сеточной функции  $p_0(\mathbf{x}) = r_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \omega_h$ .

2. Запускаем счётчик итераций  $k = k + 1$ .

2а) Находим вектор  $z_k = \mathcal{A}p_k^m$ , решая дискретный аналог прямой задачи для вспомогательного параболического уравнения:

$$z_k^0 = p_k, \quad x \in \bar{\omega}_h, \\ C \frac{\hat{z}_k - z_k}{\tau} + \frac{1}{2} A(\hat{z}_k + z_k) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \omega_{h\tau}.$$

2б) Определяем значение первого итерационного параметра  $\alpha_k = (r_k, r_k)/(z_k, p_k)$ .

2в) Вычисляем очередные приближения искомого начального условия и невязки по формулам

$$v_{k+1} = v_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k z_k, \quad \mathbf{x} \in \omega_h.$$

2г) Находим очередные значения второго итерационного параметра и вспомогательного вектора

$$\beta_k = (r_{k+1}, r_{k+1})/(r_k, r_k), \quad p_{k+1} = r_k + \beta_k p_k, \quad \mathbf{x} \in \omega_h.$$

3. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится критерий остановки итераций:  $\|r_k\| > \|r_{k-1}\|$  или  $\|r_k\| < \varepsilon$ , иначе продолжаем процесс, возвращаясь к п. 2.

Отметим, что прекращение итераций при выполнении неравенства  $\|r_k\| > \|r_{k-1}\|$  гарантирует своевременный выход из итерационного цикла, т. е. итерации продолжаются до тех пор, пока норма невязки убывает. Увеличение невязки приводит к неустойчивости, заложенной в саму задачу. Таким образом, итерации продолжаем в области условной корректности исходной задачи.

Поскольку на практике решения прикладных обратных задач имеем дело с результатами измерения значения дополнительного условия, то вследствие погрешности измерительных приборов (сенсоров) условие переопределения задаётся с некоторой погрешностью. Ретроспективная обратная задача теплопроводности не исключение, поэтому введём возмущение задаваемого значения решения в финальный момент времени с помощью генератора случайных чисел:  $\bar{\phi}(x) = \phi(x) + \delta \text{rand}(-0.5, 0.5)$ , где  $\text{rand}(-0.5, 0.5)$  — генератор случайных чисел, равномерно распределённых в интервале  $(-0.5, 0.5)$ , а  $\delta$  — амплитуда. Также для получения более гладкого решения проведём численные расчёты с применением к возмущённому финальному условию сглаживающего фильтра Савицкого — Голея [27].

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИНАЛЬНОГО УСЛОВИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задание финального условия на модельных задачах для однородного уравнения теплопроводности (1) при  $k(x, t) \equiv 1$ ,  $f(x, t) \equiv 0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T. \quad (21)$$

**Модельная задача 1 (гладкое начальное условие).** Уравнение (21) имеет аналитическое решение

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{(x-0.4t)^2}{1+4t}}. \quad (22)$$

Следовательно, начальное и граничные условия в задаче (1)–(3) задаются следующим образом:

$$u(x, 0) = e^{-(x-0.4t)^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (23)$$

$$\mu_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{0.16t^2}{1+4t}}, \quad \mu_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{(l-0.4t)^2}{1+4t}}, \quad 0 < t \leq T, \quad (24)$$

а финальное условие задаётся формулой

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4T}} e^{-\frac{(x-0.4T)^2}{1+4T}}. \quad (25)$$

**Модельная задача 2 (негладкое начальное условие).** Зададим начальное условие в виде кусочно-линейной функции с разрывом первой производной в точке  $x = l/2$ :

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0.5 + x/l & \text{при } x \in [0, l/2), \\ 0.1 + 1.8x/l & \text{при } x \in [l/2, l], \end{cases} \quad (26)$$

граничные условия зададим функциями

$$\mu_1(t) = 0.5e^{-t}, \quad \mu_2(t) = 0.1e^t, \quad 0 < t \leq T. \quad (27)$$

**Модельная задача 3 (разрывное начальное условие).** Начальное условие зададим в виде функции, имеющей точки разрыва  $x = l/3$ ,  $x = 2l/3$ :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{при } x \in [0, l/3), \\ 1 & \text{при } x \in [l/3, 2l/3], \\ 0.5 & \text{при } x \in (2l/3, l], \end{cases} \quad (28)$$

и зададим граничные условия

$$\mu_1(t) = 0.5e^{-0.5t}, \quad \mu_2(t) = 0.5^{0.5t}, \quad 0 < t \leq T. \quad (29)$$

На рис. 1 представлены результаты численного решения всех трёх модельных задач при  $l = 6$ ,  $T = 1$  на двух пространственно-временных сетках с  $n = 200$ ,  $J = 400$  — грубая сетка, и  $n = 400$ ,  $J = 800$  — подробная сетка. На верхних графиках приведены начальные (линия 1) и финальные условия (линия 2). При этом на рис.1(a) показан график точного финального условия (25), а на рис. 1(b, c) приведены графики начального и финального условий на грубой сетке с  $n = 200$ ,  $J = 400$  соответственно для второй и третьей модельных задач. Расчёты на двух сетках показали достаточно хорошую точность определения финального условия уже на грубой сетке. Это мы видим на рис. 1(d-f). На рис. 1(d) приведены отклонения финальных решений от точного решения на подробной сетке (линия 1) и на грубой сетке (линия 2). Поскольку модельные задачи 2 и 3 не имеют точного решения, на рис. 1(e, f) представлены разницы вычисленных по разностной схеме Кранка — Николсона (8), (9) решений на грубой и подробной сетках. Из представленных в нижнем ряду рис. 1 графиков видно, что грубая сетка даёт достаточно хорошее приближение финального условия.

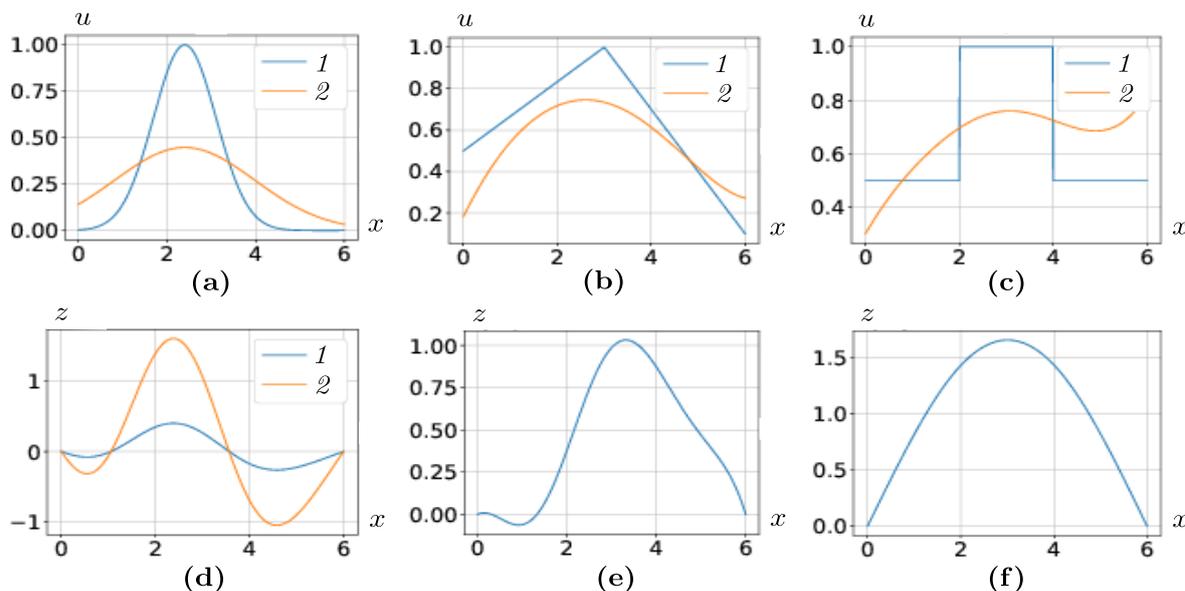


Рис. 1. Графики начальных условий (линия 1) и решения (линия 2) в финальный момент времени (a, b, c); ошибки определения финального условия  $z = 10^5 \cdot (y^J - \phi)$  на подробной (линия 1) и грубой (2) сетках (d); разница решений  $z = 10^5 \cdot (y^J - \phi)$  и  $z = 10^3 \cdot (y^J - \phi)$  на подробной и грубой сетках (e, f)

В табл. 1 представлены нормы относительных ошибок вычисления решений прямых модельных задач в финальный момент времени  $T = 1$ :

$$R = \frac{\|y^J - u(x, T)\|}{\|u(x, T)\|}.$$

Таблица 1

Ошибки определения финального условия

Задача 1, $N = 200, J = 400$	Задача 1, $N = 400, J = 800$	Задача 2	Задача 3
$2.81203314 \cdot 10^{-5}$	$7.02953938 \cdot 10^{-6}$	$1.03441509 \cdot 10^{-5}$	0.00172668

В первой и второй колонках приведены отклонения решения разностной схемы Кранка — Николсона от точного решения модельной задачи 1 на грубой и подробной пространственно-временных сетках в финальный момент времени  $T = 1$ . В третьей и четвёртой колонках представлены разницы отклонений финальных решений модельных задач 2 и 3, полученных на грубой и подробной сетках.

Из табл. 1 видно, что при решении первой и второй модельных задач разностная схема Кранка — Николсона имеет высокую точность определения финального условия. На разрывном начальном условии модельной задачи 3 получаем невысокую точность.

#### 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ВОССТАНОВЛЕНИЮ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ

Для демонстрации работоспособности предложенного вычислительного алгоритма решения ретроспективной обратной задачи приведём результаты вычислительного эксперимента, проведённого на тех же модельных задачах из предыдущего раздела с заданными различными неоднородными нестационарными граничными условиями Дирихле и финальными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t < T, \quad (30)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t < T, \quad (31)$$

$$u(x, T) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (32)$$

Для модельной ретроспективной обратной задачи 1 заданы граничные условия (24) и финальное условие (25). В модельных задачах 2 и 3 с обратным временем заданы граничные условия (27), (28), а финальными условиями служат решения прямой задачи, полученные в предыдущем разделе в финальный момент времени на грубой сетке с  $n = 200, M = 400$ . Таким образом, искомые начальные условия определяются по формулам (23), (26), (28) соответственно для модельных ретроспективных обратных задач 1, 2 и 3. На рис. 2 представлены результаты итерационного восстановления неизвестного гладкого начального условия на модельном примере 1. Поскольку данная задача имеет точное аналитическое решение, то в качестве финального условия задано значение точного решения в финальный момент времени. В предыдущем разделе показано, что схема Кранка — Николсона на грубой сетке определяет финальное условие с ошибкой порядка  $\|z\| = 0(10^{-5})$ .

На рис. 2(а) приведены графики начального условия и восстановленного начального условия, а их разница представлена на рис. 2(б). На рис. 2(с) линией 2 показано восстановленное начальное условие при наличии шума финального условия при  $\delta = 0.001$ . Вычисленное начальное условие при сглаживании зашумлённого финального условия с помощью фильтра Савицкого — Голея представлено на рис. 2(д). Из представленных результатов вычислительного эксперимента приходим к выводу, что начальное условие восстанавливается с чрезвычайно высокой точностью; при возмущении финального условия восстановленное начальное условие получается сильно осциллирующим; сглаживание возмущённого финального условия обеспечивает уменьшение частоты и амплитуды осцилляций восстановленного начального условия, повышая точность его определения.

На рис. 3 представлены аналогичные результаты итерационного восстановления неизвестного негладкого начального условия, полученные на модельном примере 2. В предыдущем

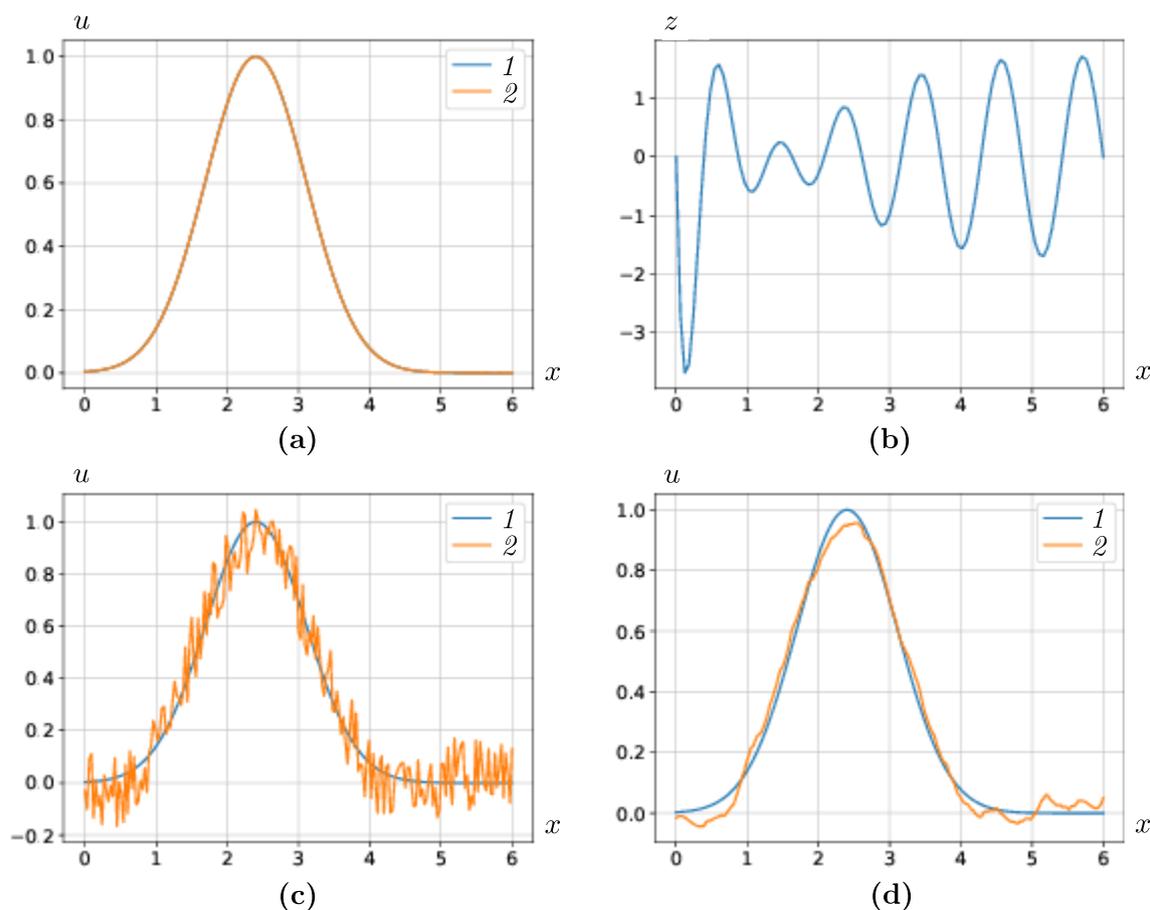


Рис. 2. Графики точного (линия 1) и восстановленного (линия 2) гладких начальных условий (а); ошибки восстановления  $z = 10^4 \cdot (y^J - \phi)$  (b); начального условия (линия 1) (с, d); восстановленного начального условия при возмущенном финальном условии (с); восстановленного начального условия при сглаживании возмущенного финального условия (d)

разделе также было показано, что схема Кранка — Николсона на грубой сетке с точностью порядка  $\|z\| = O(10^{-5})$  определяет финальное условие прямой задачи, поэтому оно и взято в качестве финального условия. На рис. 3(а) приведены графики начального условия и восстановленного начального условия, а их разница представлена на рис. 3(б). На рис. 3(с) линией 2 показано восстановленное начальное условие при наличии шума финального условия при  $\delta = 0.001$ . Восстановленное начальное условие при сглаживании зашумлённого финального условия представлено на рис. 3(д).

Рассматривая представленные результаты вычислительного эксперимента, приходим к выводу, что начальное условие восстанавливается с хорошей точностью вне малой окрестности точки разрыва производной; при возмущении финального условия восстановленное начальное условие получается сильно осциллирующим; сглаживание возмущённого финального условия также приводит к уменьшению частоты и амплитуды осцилляций восстановленного начального условия.

На рис. 4 представлены результаты итерационного восстановления неизвестного разрывного начального условия на модельном примере 3. В предыдущем разделе показано, что схема Кранка — Николсона на грубой сетке с точностью порядка  $\|z\| = O(10^{-3})$  восстанавливает финальное условие прямой задачи, поэтому в качестве финального условия взято значение реше-

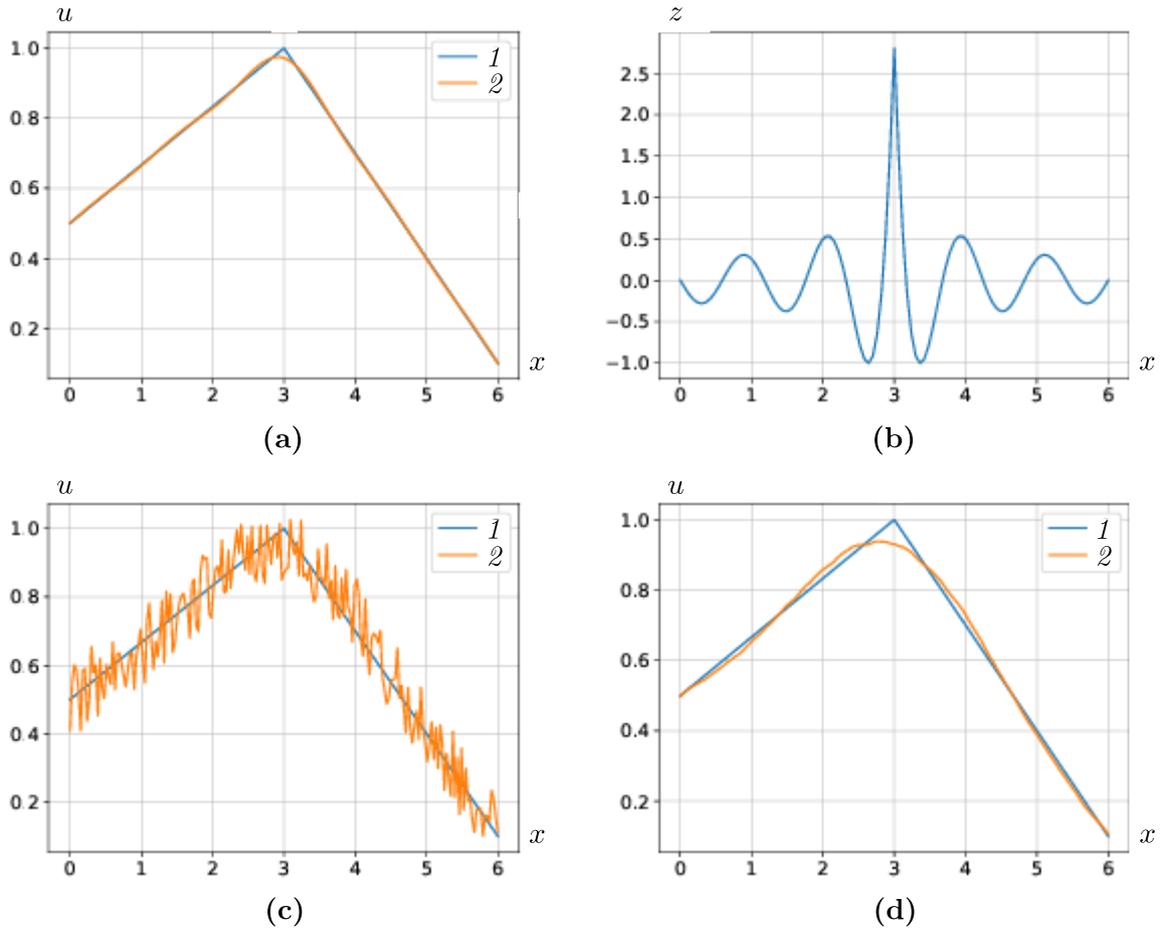


Рис. 3. Графики точного (линия 1) и восстановленного (линия 2) негладких начальных условий (а); ошибки восстановления  $z = 10^2 \cdot (y^J - \phi)$  (b); начального условия (линия 1). (с, d); восстановленного начального условия при возмущенном финальном условии (с); восстановленного начального условия при сглаживании возмущенного финального условия (линия 2) (d)

ния прямой задачи в финальный момент времени. На рис. 4(а) приведены графики начального условия и восстановленного начального условия на грубой сетке, а их разница представлена на рис. 4(б).

Этот модельный пример идентификации разрывного начального условия является весьма трудной задачей. Но и в этом случае качественная картина получилась аналогичной результатам решения предыдущих модельных задач при наличии «шума» в финальном условии и сглаживании с помощью фильтра Савицкого — Голея.

Полученные численные результаты по восстановлению начального условия с помощью представленного в работе метода решения дискретного аналога ретроспективной обратной задачи теплопроводности на модельных задачах представим в виде табл. 2. Отметим, что в таблице приведены количество итераций и точность восстановления начального условия рассмотренных задач ( $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $k$  — количество итераций):

$$R_1 = \frac{\|y^0 - u_0(x)\|}{\|u_0(x)\|}, \quad R_2 = \frac{\|y^0 - u_0(x)\|}{\|u_0(x)\|}, \quad R_3 = \frac{\|y^0 - u_0(x)\|}{\|u_0(x)\|}$$

— соответственно точное, возмущённое, возмущённое и сглаженное финальные условия.

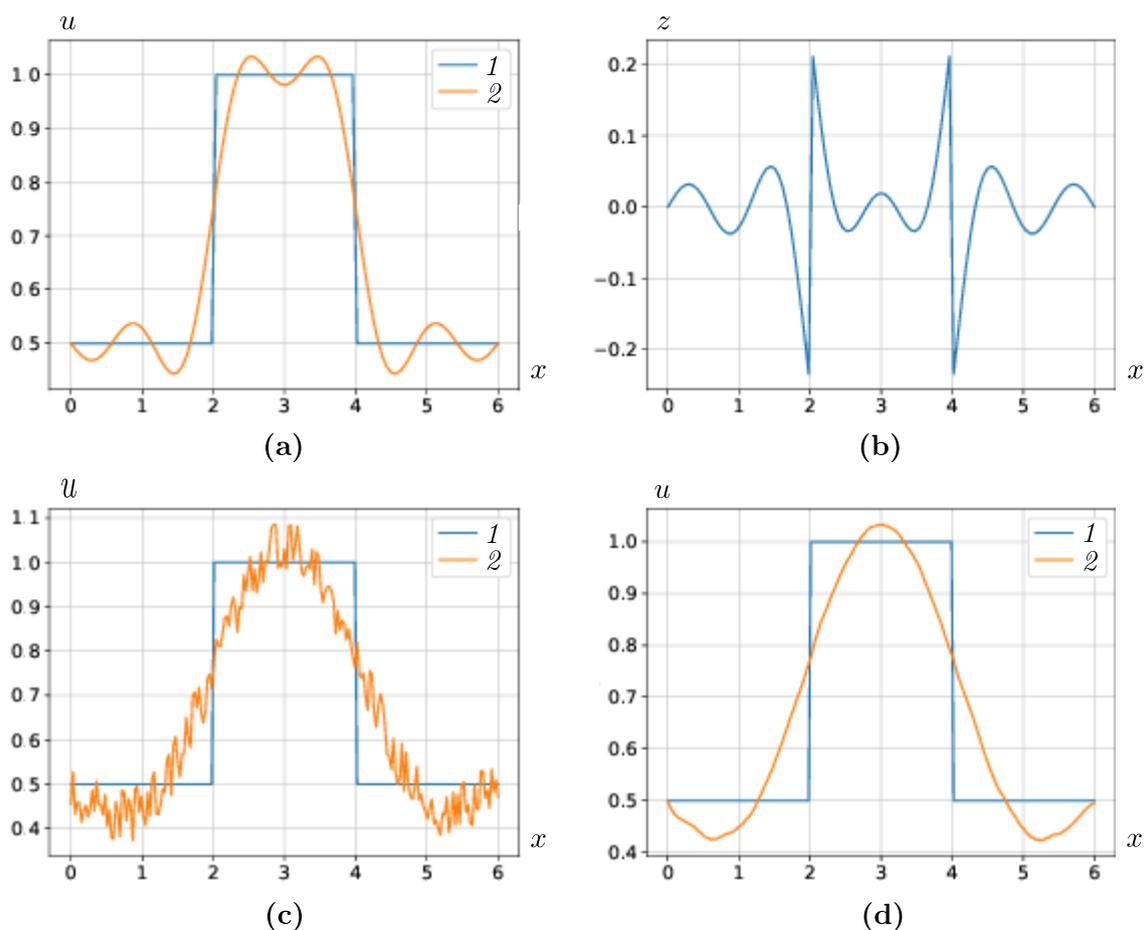


Рис. 4. Графики точного (линия 1) и восстановленного (линия 2) разрывных начальных условий (а); ошибки восстановления (b); начального условия (линия 1) (c, d); восстановленного начального условия при возмущенном конечном условии (линия 2) (c); восстановленного начального условия при сглаживании возмущенного конечного условия (линия 2) (d)

Таблица 2

Ошибки восстановления начального условия

	Задача 1	Задача 2	Задача 3
$k$	22	18	18
$R_1$	0.000247	0.007470	0.095340
$k$	5	3	2
$R_2$	0.115791	0.113519	0.141054
$k$	5	3	3
$R_3$	0.077772	0.030655	0.140734

Представленные в табл. 2 результаты вычислительного эксперимента показывают, что метод сопряжённых градиентов, применённый для численной реализации разностной схемы Кранка — Николсона, аппроксимирующей ретроспективную обратную задачу для уравнения теплопроводности с нестационарными граничными условиями Дирихле,

- 1) с высокой точностью восстанавливает начальное условие;
- 2) при возмущении финального условия восстанавливает начальное условие с невысокой точностью;
- 3) при использовании сглаживания возмущённого финального условия с помощью фильтра Савицкого — Голея устраняет осцилляцию восстановленного начального условия.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для восстановления начального условия из дискретного аналога ретроспективной обратной задачи теплопроводности с неоднородными граничными условиями Дирихле, зависящими от времени, предложено использовать итерационный метод сопряжённых градиентов. Проведённые вычислительные эксперименты на модельных задачах с гладким, негладким и разрывным решениями продемонстрировали эффективность данного подхода.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
3. Иванов В.К., Васин В.В., Таланов В.П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М.: Наука, 1978.
4. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики. М.: Наука, 1980.
5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004.
6. Кabanikhin S.I. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.
7. Özisik M.N., Helcio R.B. Inverse Heat Transfer. Fundamentals and Applications. N. Y.: Imprint Routledge, 2020.
8. Lesnic D. Inverse Problems with Applications in Science and Engineering. Boca Raton: Imprint Chapman and Hall/CRC, 2021.
9. Zhao Z., Meng Z. A modified Tikhonov regularization method for a backward heat equation // Inverse Probl. Sci. Engrg. 2011. V. 19, N 8. P. 1175–1182.
10. Cheng W., Ma Y.J., Fu C.L. A regularization method for solving the radially symmetric backward heat conduction problem // Appl. Math. Lett. 2014. V. 30. P. 38–43.
11. Su L. D. A radial basis function (RBF)-finite difference (FD) method for the backward heat conduction problem // Appl. Math. Comput. 2019. V. 354. P. 232–247.
12. Kabanikhin S.I., Bakanov G.B. The optimizational method for solving the discrete inverse problem for hyperbolic equation // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 1996. V. 4, N 6. P. 513–530.
13. Kabanikhin S.I., Bakanov G.B. The optimization method for solving a discrete inverse problem for a hyperbolic equation // Dokl. Math. 1998. V. 58, N 1. P. 32–35.
14. Karchevsky A.L. Finite-difference coefficient inverse problem and properties of the misfit functional // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1998. V. 6, N 5. P. 431–452.
15. Карчевский А.Л. Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом // Сиб. журн. вычисл. математики. 2008. Т. 11, № 2. С. 139–149.
16. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Васильев В.И. Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности // Мат. моделирование. 1997. Т. 9, № 5. С. 119–127.
17. Vasil'ev V.I., Kardashevskii A.M., Sivtsev P.V. Computational experiment on the numerical solution of some inverse problems of mathematical physics // IOP Conf. Ser. Materials Sci. Engrg. 2016. V. 158, N 1. Article 012093.
18. Vasil'ev V.I., Vasilyeva M.V., Kardashevsky A. M. The numerical solution of the boundary inverse problem for a parabolic equation // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1773. Article 110011.

19. *Vasil'ev V.I., Kardashevskii A.M.* Iterative solution of the retrospective inverse problem for a parabolic equation using the conjugate gradient method // *Lect. Notes Comput. Sci.* 2017. V. 10187. P. 698–705.
20. *Прокопьев Г.А., Васильев В.И., Кардашевский А.М., Сивцев П.В.* Численное решение обратной задачи Коши для эллиптического уравнения // *Сиб. электрон. мат. изв.* 2017. V. 14. P. 308–316.
21. *Huang J., Li A., Vasil'ev V.I., Kardashevsky A. M., Su L.* Numerical method for solving the inverse problem of fractional parabolic equation // *J. Comput. Appl. Math.* 2022. V. 413. Article 114366.
22. *Vasil'ev V.I.; Kardashevskii A.M.* Numerical solution of the retrospective inverse problem of heat conduction with the help of the Poisson integral // *J. Appl. Indust. Math.* 2018. V. 12, N 3. P. 577–586.
23. *Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I.* Computational determination of the lowest order coefficient in a parabolic equation // *Dokl. Math.* 2014. V. 89, N 2. P. 179–181.
24. *Вабищевич П.Н., Васильев В.И., Васильева М.В.* Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2015. Т. 55, № 6. С. 1020–1027.
25. *Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I.* Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations // *Inverse Probl. Sci. Engrg.* 2016. V. 24, N 1. P. 42–59.
26. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
27. *Savitzky A., Golay M.J.E.* Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures // *Anal. Chemistry.* 1964. V. 36, N 8. P. 1627–39.
28. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
29. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения нестационарных задач. М.: Ленанд, 2021.
30. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.

UDC 517.63

## ITERATIVE SOLUTION OF A RETROSPECTIVE INVERSE PROBLEM OF HEAT CONDUCTION WITH INHOMOGENEOUS DIRICHLET BOUNDARY CONDITIONS

© 2022 V. I. Vasil'ev<sup>a</sup>, A. M. Kardashevsky<sup>b</sup>, V. V. Popov<sup>c</sup>

*North-Eastern Federal University  
ul. Belinskogo 58, Yakutsk 677000, Russia*

E-mails: <sup>a</sup>vasvasil@mail.ru, <sup>b</sup>kardam123@gmail.com, <sup>c</sup>imi.pm.pvv@mail.ru

Received 26.05.2022, revised 30.05.2022, accepted 22.06.2022

**Abstract.** We consider a retrospective inverse problem of heat conduction with non-stationary inhomogeneous Dirichlet boundary conditions. It is approximated by the Crank–Nicolson difference scheme, which has the second order of approximation both in the spatial variable and in time. To determine the solution of the resulting system of linear algebraic equations, it is proposed to use the iterative method of conjugate gradients. Examples are given of restoring smooth, nonsmooth, and discontinuous initial conditions, including the introduction of «noise» characteristic of additional conditions of inverse problems and its smoothing using the Savitsky–Golay filter.

**Keywords:** retrospective heat conductivity problem, Crank–Nicholson difference scheme, conjugate gradient method, perturbation condition, filter Savitsky–Goley.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.403

### REFERENCES

1. Lattes R., Lions Z.-L. *Contrôle Optimal de Systemes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles*. Paris: Dunot, 1968.
2. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Solutions of Ill-Posed Problems*. Washington: Halsted Press, 1977.
3. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Applications*. Berlin: De Gruyter, 2013.
4. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *ll-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. Americ. Math. Soc., 1986.
5. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*. Berlin: De Gruyter, 2007.
6. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. Berlin: De Gruyter, 2012.
7. Ozisik M.N., Helcio R.B. *Inverse Heat Transfer. Fundamentals and Applications*. N. Y.: Imprint Routledge, 2020.
8. Lesnic D. *Inverse Problems with Applications in Science and Engineering*. Boca Raton: Imprint Chapman and Hall/CRC, 2021.
9. Zhao Z., Meng Z. A modified Tikhonov regularization method for a backward heat equation. *Inverse Probl. Sci. Engrg.*, 2011, Vol. 19, No. 8, pp. 1175–1182.
10. Cheng W., Ma Y.J., Fu C.L. A regularization method for solving the radially symmetric backward heat conduction problem. *Appl. Math. Lett.*, 2014, Vol. 30, pp. 38–43.

11. Su L.D. A radial basis function (RBF)-finite difference (FD) method for the backward heat conduction problem. *Appl. Math. Comput.*, 2019, Vol. 354, pp. 232–247.
12. Kabanikhin S.I., Bakanov G.B. The optimizational method for solving the discrete inverse problem for hyperbolic equation. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1996, Vol. 4, No. 6, pp. 513–530.
13. Kabanikhin S.I., Bakanov G.B. The optimization method for solving a discrete inverse problem for a hyperbolic equation. *Dokl. Math.*, 1998, Vol. 58, No. 1, pp. 32–35.
14. Karchevsky A.L. Finite-difference coefficient inverse problem and properties of the misfit functional. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1998, Vol. 6, No. 5, pp. 431–452.
15. Karchevsky A.L. A proper flow chart for a numerical solution of an inverse problem by an optimization method. *Num. Anal. Appl.*, 2008, Vol. 1, No. 2, pp. 114–122.
16. Samarskij A.A., Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I. Iteracionnoe reshenie retrospektivnoj obratnoj zadachi teploprovodnosti [Iterative solution of the retrospective inverse problem of thermal conductivity]. *Mat. modelirovanie* [Mat. Model.], 1997, Vol. 9, No. 5, pp. 119–127 (in Russian).
17. Vasil'ev V.I., Kardashevskii A.M., Sivtsev P.V. Computational experiment on the numerical solution of some inverse problems of mathematical physics. *IOP Conf. Ser. Materials Sci. Engrg.*, 2016, Vol. 158, No. 1, article 012093.
18. Vasil'ev V.I., Vasilyeva M.V., Kardashevsky A. M. The numerical solution of the boundary inverse problem for a parabolic equation. *AIP Conf. Proc.*, 2016, Vol. 1773, article 110011.
19. Vasil'ev V.I., Kardashevskii A.M. Iterative solution of the retrospective inverse problem for a parabolic equation using the conjugate gradient method. *Lect. Notes Comput. Sci.*, 2017, Vol. 10187, pp. 698–705.
20. Prokop'ev G.A., Vasil'ev V.I., Kardashevskij A.M., Sivcev P.V. Chislennoe reshenie obratnoj zadachi Cauchy dlya ellipticheskogo uravneniya [Numerical solution of the inverse Cauchy problem for the elliptic equation]. *Sibir. Elektron. Mat. Izv.*, 2017, Vol. 14, pp. 308–316 (in Russian).
21. Huang J., Li A., Vasil'ev V.I., Kardashevsky A.M., Su L. Numerical method for solving the inverse problem of fractional parabolic equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 2022, Vol. 413, article 114366.
22. Vasil'ev V.I., Kardashevskii A.M. Numerical solution of the retrospective inverse problem of heat conduction with the help of the Poisson integral. *J. Appl. Indust. Math.*, 2018, Vol. 12, No. 3, pp. 577–586.
23. Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I. Computational determination of the lowest order coefficient in a parabolic equation. *Dokl. Math.*, 2014, Vol. 89, No. 2, pp. 179–181.
24. Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I., Vasil'eva M.V. Vychislitel'naya identifikatsiya pravoï chasti parabolicheskogo uravneniya [Computational identification of the right side of the parabolic equation]. *J. Calcul. Math. Math. Phys.*, 2015, Vol. 55, №. 6, pp. 1015–1021 (in Russian).
25. Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I. Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations. *Inverse Probl. Sci. Engrg.*, 2016, Vol. 24, No. 1, pp. 42–59.
26. Samarskij A.A., Nikolaev E.S. Numerical Methods for Grid Equations. Vol. II. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser Verl.
27. Savitzky A., Golay M.J.E. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. *Anal. Chemistry*, 1964, Vol. 36, No. 8, pp. 1627–1639.
28. Samarskii A.A. Theory of Difference Schemes. Taylor & Francis eBooks.
29. Vabishchevich P.N. Chislennyye metody resheniya nestacionarnykh zadach [Numerical methods for solving nonstationary problems]. Moscow: Lenand, 2021 (in Russian).
30. Marchuk G.I. Methods of Numerical Mathematics. Berlin: Springer-Verl., 1982.