

# СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году  
Выходит 4 раза в год  
**Том 25, №4(92)**  
Октябрь - декабрь 2022 г.

## ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

## СОДЕРЖАНИЕ

Аюпова Н. Б., Голубятников В. П., Мишушкина Л. С. Об инвариантных поверхностях в фазовых портретах моделей кольцевых генных сетей .....	5
Боронина М. А., Куликов И. М., Черных И. Г., Винс Д. В. Использование комбинации схем Роу и Русанова для численного решения уравнений магнитной гидродинамики в задачах космической плазмы .....	14
Васильев В. И., Кардашевский А. М., Попов В. В. Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности с неоднородными граничными условиями Дирихле .....	27
Демиденко Г. В. Метод решения одной биологической задачи большой размерности .....	42
• Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е. Эволюция волновой картины кусочно-линейного одноосного растяжения и сжатия разномодульного упругого стержня .....	54
Ермишина В. Е. Гиперболическая модель сильнонелинейных волн в двухслойных течениях неоднородной жидкости .....	71
Мишин А. В. Учёт обобщённой производной и коллективного влияния фаз на процесс гоменизации .....	86
Нещадим М. В. Уравнение Лиувилля и точно транзитивные представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ ..	99
Остросаблин Н. И. Единственность решения граничных задач статических уравнений теории упругости с несимметричной матрицей модулей упругости .....	107
Паламарчук Е. С. Оптимальное управление в задаче долгосрочного трекинга экспоненциального процесса Орнштейна — Уленбека .....	116
Перцев Н. В., Бочаров Г. А., Логинов К. К. Численное моделирование динамики популяции Т-лимфоцитов в лимфоузле .....	136
Петраков И. Е. Контактная задача изгиба многослойной композитной пластины с учётом различных модулей упругости при растяжении и сжатии .....	153
Селиверстов Е. Ю. Иерархический метод установки параметров параллельных популяционных метаэвристических алгоритмов оптимизации .....	164
Сказка В. В. Кососимметрические разностные аналоги четвёртого порядка аппроксимации первой производной .....	179
Скворцова М. А., Ыскак Т. Оценки решений дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием, описывающих конкуренцию нескольких видов микроорганизмов .....	193
Терсенов Ар. С. О существовании вязких решений анизотропных параболических уравнений с переменными показателями анизотропности .....	206
Чумаков Г. А., Чумакова Н. А. О локализации неустойчивого решения одной системы трёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром .....	221

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 539.3:517.958

## ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛНОВОЙ КАРТИНЫ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ОДНООСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ РАЗНОМОДУЛЬНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

© 2022 О. В. Дудко<sup>a</sup>, А. А. Лаптева<sup>b</sup>, В. Е. Рагозина<sup>c</sup>*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,  
ул. Радио, 5, г. Владивосток 690041, Россия*E-mails: <sup>a</sup>dudko@iacp.dvo.ru, <sup>b</sup>lanastal@mail.ru, <sup>c</sup>ragozina@vlc.ruПоступила в редакцию 30.05.2022 г.; после доработки 15.07.2022 г.;  
принята к публикации 29.09.2022 г.

Процесс изменения волновой картины в задаче нестационарного деформирования разномодульного упругого стержня, подверженного одноосному кусочно-линейному растяжению и последующему сжатию, описан как связанная цепочка локальных решений на последовательных временных интервалах. Указаны все возможные варианты и результаты столкновений первичных и вторичных сильных разрывов для заданной кусочно-линейной функции граничных перемещений. Предложен эффективный алгоритм решения одномерных краевых задач динамики деформирования разномодульной упругой среды при кусочно-линейном граничном условии, основанный на поиске пути в дереве локальных решений.

**Ключевые слова:** разномодульная упругость, растяжение-сжатие стержня, кусочно-линейное краевое условие, столкновение сильных разрывов, точное решение на графе.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.405

### ВВЕДЕНИЕ

Механика деформируемых твёрдых тел развивается как фундаментальное научное направление через диалектическое взаимодействие между объектами исследования (природными и конструкционными материалами) и теоретическими методами разработки их адекватных моделей, а также способов решения краевых задач. Линейная теория упругости относится к наиболее изученным направлениям механики деформирования, однако она недостаточна для описания свойств большинства природных и конструкционных материалов, демонстрирующих различное сопротивление растяжению и сжатию. Так, разномодульностью упругой стадии обладают горные породы [1], грунты [2], волокнистые и зернистые композиты [3, 4], различные сплавы [5, 6] и т. д. Одним из способов, позволяющим привлечь известные подходы линейной теории упругости к моделированию таких материалов, можно считать линеаризацию отдельных элементов краевой задачи (краевых условий, дифференциальных уравнений и т. д.) с сохранением основных нелинейных эффектов различных моделей разномодульной упругости [7–11].

Наша работа демонстрирует использование такого подхода на примере решения одномерной начально-краевой задачи о поведении полуограниченного стержня из разномодульного материала под действием одноосной нестационарной нагрузки на его торце. В качестве модели разномодульной упругой среды в работе приняты соотношения [9]. Для модели [9] и её обобщённого варианта [10] ранее в [12–14] показано, что сложная неаналитическая зависимость напряжений от деформированного состояния в плоском одномерном случае сводится

к скачкообразному переключению между двумя простыми соотношениями для констант упругости при смене типа деформации. При этом скорость ударной волны остаётся нелинейной функцией строящегося решения. Аналогичный вывод для скорости ударной волны в разномодульном стержне с различными модулями Юнга для растяжения и сжатия, симметричными относительно некоторого среднего значения, сделан в [15, 16]. В остальном задача приобретает кусочно-непрерывный характер с одномерными волновыми дифференциальными уравнениями в локальных областях деформирования с подвижными границами (волнами деформаций). Это означает, что все нелинейные эффекты модели сконцентрированы в системе краевых условий и механизмов эволюции различных волновых фронтов (включая ударные волны) [17], на которых должны быть согласованы части решения.

Дополнительное упрощение процедуры вычисления полей перемещений и деформаций можно выполнить путём кусочно-линейной аппроксимации гладкого краевого условия задачи, что приводит к кусочно-постоянной формуле скорости ударной волны вместо её исходной нелинейной монотонной зависимости [12, 13, 16]. Этот подход развивается нами для краевого условия в форме кусочно-линейной функции граничного перемещения с произвольным числом звеньев, которые до некоторого момента времени соответствуют растяжению на конце стержня, после чего происходит переход к сжатию. В возникающей цепочке локальных кусочно-линейных решений учитываются эффекты столкновения различных волновых фронтов друг с другом, образование новых фронтов, изменение скачком скорости ударной волны и т. д. Часть статьи посвящена разработке алгоритма, автоматизирующего процесс исследования динамики полей перемещений и деформаций в разномодульном стержне при изменении параметров краевого условия.

## 1. МОДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Считаем, что деформируемая среда изотропная и упругая, деформации малые, процесс деформирования проходит в адиабатическом режиме без действия массовых сил. С учётом таких предположений записываем систему уравнений, описывающих динамику деформирования разномодульной изотропно-упругой среды [9]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} \approx 1 - \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}) = \frac{\partial W(E_1, E_2)}{\partial \mathbf{e}}, \\ \mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T), \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \\ W(E_1, E_2) &= \frac{\lambda}{2} E_1^2 + \mu E_2 - \nu E_1 \sqrt{E_2}, \quad E_1 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}, \quad E_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) все неизвестные функции зависят от декартовых координат  $\mathbf{x}$  и времени  $t$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений Коши,  $\mathbf{e}$  — тензор малых деформаций с инвариантами  $E_1(\mathbf{e})$  и  $E_2(\mathbf{e})$ ,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор,  $\rho/\rho_0$  — изменение плотности среды при переходе от начального к текущему состоянию,  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — вектор перемещений и вектор скорости перемещений точек среды,  $\nabla$  — набла-оператор. Механические свойства разномодульного материала в системе (1) заданы функцией упругого потенциала  $W(E_1, E_2)$  с тремя слагаемыми [9]. Два первых слагаемых с числовыми коэффициентами  $\lambda$  и  $\mu$  (параметрами Ламе, если  $\nu = 0$ ) можно сопоставить с линейной частью модели, третье слагаемое с константой  $\nu$  отвечает за разномодульные свойства среды (согласно расчётным и экспериментальным данным [10] считаем, что  $\nu > 0$ ).

Записывая (1) для случая продольного нагружения разномодульного стержня, считаем, что разномодульный материал ведёт себя нормальным образом, т. е.  $\text{sgn}(E_1) = \text{sgn}(e_{11})$ ,  $\text{sgn}(e_{22}) = \text{sgn}(e_{33}) = -\text{sgn}(e_{11})$ . Тогда из (1) получаем кусочно-линейную зависимость между напряжением  $\sigma = \sigma_{11}$  и деформацией  $e = e_{11}$ :

$$\sigma(e) = \begin{cases} E_+ e & \text{при } e > 0, \\ E_- e & \text{при } e \leq 0, \end{cases} \quad E_{\pm} = \lambda + 2\mu - 2 \left( \lambda \chi_{\pm} + \text{sgn}(e) \frac{\nu(1 - \chi_{\pm} + \chi_{\pm}^2)}{\sqrt{1 + 2\chi_{\pm}^2}} \right), \quad e = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2)$$

где  $E_{\pm}$ ,  $\chi_{\pm}$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона разномодульной среды [9], зависящие от её деформированного состояния,  $u = u(x, t)$  — продольные перемещения точек среды вдоль оси стержня  $x$ . Значения  $\chi_+$  для продольного растяжения ( $e > 0$ ) и  $\chi_-$  для продольного сжатия ( $e < 0$ ) вычисляются из уравнения  $(\lambda - 2\chi_{\pm}(\lambda + \mu))\sqrt{1 + 2\chi_{\pm}^2} = \nu \operatorname{sgn}(e)(1 - \chi_{\pm} + 4\chi_{\pm}^2)$ , полученного в рамках модельных соотношений (1) из условия отсутствия напряжений на боковой поверхности стержня. Отметим, что при выбранной форме упругого потенциала [9] значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона при растяжении и сжатии не симметричны относительно значений соответствующих параметров  $E_0 = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ ,  $\chi_0 = 0.5\lambda/(\lambda + \mu)$  линейной части модели (т. е.  $E_+ < E_0 < E_-$ ,  $\chi_+ < \chi_0 < \chi_-$  при  $\nu > 0$ , но  $|E_- - E_0| \neq |E_+ - E_0|$ ,  $|\chi_- - \chi_0| \neq |\chi_+ - \chi_0|$ ).

Если в силу предположения о малости деформаций в уравнении движения системы (1) пренебречь слагаемыми с квадратами производных функции перемещений, то его вариант для продольных перемещений с учётом (2) можно записать как

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c^2 = \begin{cases} a^2 = E_-/\rho_0 & \text{при } e \leq 0, \\ b^2 = E_+/\rho_0 & \text{при } e > 0, \end{cases} \quad (3)$$

где характеристическая скорость  $c$  имеет разные значения в зависимости от вида деформированного состояния:  $c = a$  при сжатии,  $c = b$  при растяжении. (Далее для определённости будем рассматривать материалы, у которых  $a > b$ .)

Уравнение движения (3) допускает решение в форме Даламбера  $u(x, t) = f(\eta) + g(\zeta)$  ( $\eta = t - x/c$ ,  $\zeta = t + x/c$ ), где неизвестные функции  $f(\eta)$  и  $g(\zeta)$  определяются из краевых условий задачи. Если краевые условия задают ударное воздействие, то в решении уравнения (3) возникают скачки первых производных всюду непрерывной функции перемещений — движущиеся поверхности сильных разрывов (волны деформаций). В [13–16, 18] показано, что в разномодульной среде одномерные сильные разрывы могут появляться не только вследствие удара по границе, но и при «переключении» значения характеристической скорости, вызванном сменой типа деформированного состояния в динамическом процессе.

Состояния среды в малых окрестностях фронта одномерного сильного разрыва  $x = S(t)$  связываются условием непрерывности перемещений и условиями совместности разрывов первого порядка [17], которые можно записать для случая продольных малых деформаций в следующей форме:

$$u^+ - u^- = 0, \quad \sigma^+ - \sigma^- = -\rho_0 \dot{S}(t)(v^+ - v^-), \quad v^+ - v^- = -\dot{S}(t)(e^+ - e^-). \quad (4)$$

В (4)  $\dot{S}(t)$  — скорость движения фронта сильного разрыва  $x = S(t)$ ; верхними индексами «+» и «-» обозначены значения разрывной функции в малой окрестности перед или сразу за фронтом  $S(t)$  соответственно. Из второго равенства (4) с учётом (2) получаем общую формулу для вычисления скорости одномерного сильного разрыва в разномодульном стержне:

$$\dot{S}(t) = \sqrt{\frac{E_{\pm}^-}{\rho_0} - \frac{E_{\pm}^+ - E_{\pm}^-}{\rho_0} \frac{e^+}{e^+ - e^-}}. \quad (5)$$

Соотношения (4), (5) являются общими для всех одномерных сильных разрывов, возможных в рамках принятых модельных уравнений (1)–(3). Следуя [18] и обозначая каждый тип сильного разрыва отдельным символом (для лучшего восприятия дальнейшего изложения), классифицируем одномерные сильные разрывы по значениям  $e^+$  и  $e^-$  при  $e^+ \neq e^-$ :

$e^+e^- < 0$  — ударная волна  $x = \Sigma(t)$ , изменяющая тип деформации;

$e^+e^- = 0$  — полусигнотон  $x = \gamma(t)$ , с одной стороны от которого деформации отсутствуют;

$e^+e^- > 0$  — простой разрыв  $x = \xi(t)$ , сохраняющий тип деформации.

Применяя такую классификацию к формуле (5), с учётом (2) и (3) можно показать, что скорость ударной волны  $\Sigma(t)$  в рамках модельных соотношений (1)–(4) удовлетворяет двойному неравенству  $b < |\dot{\Sigma}| < a$ , а полусигноны  $\gamma(t)$  и простые разрывы  $\xi(t)$  движутся с характеристическими скоростями и бывают быстрыми ( $|\dot{\gamma}| = |\dot{\xi}| = a$ ) и медленными ( $|\dot{\gamma}| = |\dot{\xi}| = b$ ). Кроме того, следует добавить, что согласно условию неубывания энтропии [17] ударная волна  $\Sigma(t)$  может изменить тип деформированного состояния только от растяжения к сжатию ( $e^+|_{\Sigma(t)} > 0$ ,  $e^-|_{\Sigma(t)} < 0$ ). В [12] для модели [9] показано, что обратный переход разномодульной среды от одноосного сжатия к растяжению происходит с образованием движущегося жёсткого слоя, ограниченного быстрым и медленным полусигнонами. Аналогичные выводы были сделаны в [15, 16, 18] для отличных от [9] модельных соотношений разномодульной среды.

Перечисленные здесь свойства одномерных сильных разрывов в обобщённом решении уравнения движения (3) являются основой для представленного далее исследования возможных путей эволюции волновой картины в разномодульном полубесконечном стержне под действием одноосного нестационарного нагружения.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Положим, что разномодульный полубесконечный стержень до нагружения не был деформирован. Совместим координатную ось  $x$  с осью стержня, а точку  $x = 0$  — с концом стержня  $O$ . Пусть с момента времени  $t_0 = 0$  перемещение точки  $O$  подчиняется кусочно-линейному закону  $u(0, t) = u_0(t)$  (см. рис. 1), где

$$u_0(t) = \begin{cases} \phi_1(t) = k_1 t, & t \in [0; t_1), \\ \phi_2(t) = k_2(t - t_1) + \phi_1(t_1), & t \in [t_1; t_2), \\ \phi_3(t) = k_3(t - t_2) + \phi_2(t_2), & t \in [t_2; t_3), \\ \phi_4(t) = k_4(t - t_3) + \phi_3(t_3), & t \in [t_3; +\infty), \end{cases} \quad (6)$$

что соответствует растяжению-сжатию стержня со сменой режима нагружения в момент времени  $t_2$ .

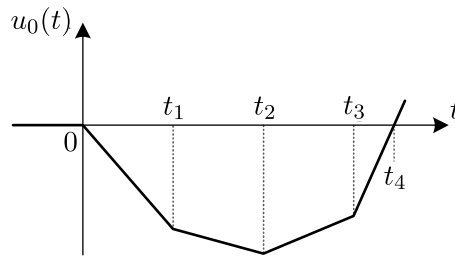


Рис. 1. Краевое условие задачи

Потребуем, чтобы функция (6) имела не менее одной узловой точки в каждом диапазоне  $(t_0; t_2)$  и  $(t_2; +\infty)$ . Можно задать и большее количество дополнительных узлов (например, для улучшения точности аппроксимации гладкого краевого условия), но это приведёт и к увеличению времени численного счёта. Значения угловых коэффициентов  $k_1 < 0$ ,  $k_2 < 0$ ,  $k_3 > 0$ ,  $k_4 > 0$  в (6) вычисляются по заданным координатам узловых точек  $(t_i, \phi_i(t_i))$ :

$$k_1 = \frac{\phi_1(t_1)}{t_1}, \quad k_2 = \frac{\phi_2(t_2) - \phi_1(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad k_3 = \frac{\phi_3(t_3) - \phi_2(t_2)}{t_3 - t_2}, \quad k_4 = -\frac{\phi_3(t_3)}{t_4 - t_3}.$$

Каждая узловая точка функции  $u_0(t)$  соответствует моменту времени, когда в решении уравнения (3) возникает первичный сильный разрыв, движущийся от точки  $O$  в положительном направлении оси  $x$ . Тип этого разрыва можно определить согласно принятой классификации по знакам деформаций  $e^+$  и  $e^-$  на соответствующем этапе времени. Для обозначения

быстрых и медленных фронтов, бегущих от точки  $O$ , будем использовать индексы  $a$  и  $b$  соответственно, а для бегущих в обратном направлении — индексы  $-a$ ,  $-b$ . Таким образом получаем, что при  $t = t_0$  появляется первичный медленный полусигнотон  $\gamma^b$  ( $e^+|_{\gamma^b}=0$ ,  $e^-|_{\gamma^b}>0$ ),  $t = t_1$  и  $t = t_3$  — моменты времени возникновения первичных простых разрывов  $\xi^b$  и  $\xi^a$  соответственно ( $e^+|_{\xi^b}>0$ ,  $e^-|_{\xi^b}>0$ ;  $e^+|_{\xi^a}<0$ ,  $e^-|_{\xi^a}<0$ ), при  $t = t_2$  появляется первичная ударная волна  $\Sigma$  ( $e^+|_{\Sigma}>0$ ,  $e^-|_{\Sigma}<0$ ).

Помимо первичного пакета сильных разрывов, инициированных кусочно-линейным движением граничных точек, в решениях краевых задач с модельными соотношениями (1)–(4) могут возникать вторичные сильные разрывы при попутных и встречных взаимодействиях фронтов разных типов. Возможность попутного столкновения волн — характерная особенность динамики одноосных деформаций разномодульной среды, где сильные разрывы могут двигаться с разными скоростями ( $b < |\dot{\Sigma}(t)| < a$ ). В [13] рассмотрен случай, когда ударная волна является последним первичным фронтом и попутно взаимодействует только с бегущими впереди неё первичными медленными разрывами. В настоящей работе последним первичным фронтом, созданным граничной нагрузкой в момент  $t_3$ , является быстрый простой разрыв  $\xi^a$ , который при определённых условиях может догнать первичную ударную волну  $\Sigma$  раньше её попутного столкновения с идущими впереди медленными фронтами  $\xi^b$ ,  $\gamma^b$ . Таким образом, кусочно-линейное краевое условие в форме (6) позволяет охватить полный спектр попутных и встречных взаимодействий сильных разрывов различных типов и исследовать сценарии развития волновой картины для поставленной задачи динамики одноосных деформаций разномодульного стержня.

### 3. АНАЛИЗ СТОЛКНОВЕНИЙ СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ

Исследуем возможные случаи взаимодействий сильных разрывов в решении задачи с краевым условием (6) и представим результаты в табличной форме (см. табл. 1). Для этого в верхней строке таблицы запишем первичные разрывы в порядке их следования от точки  $O$ . В первом столбце укажем первичные фронты, которые за расчётное время могут догнать бегущие впереди более медленные разрывы; сюда же будем добавлять вторичные волны, которые возникают в результате столкновения разнотиповых разрывов и могут участвовать в дальнейшем развитии волновой картины. В каждую ячейку на пересечении строк и столбцов запишем результат взаимодействия соответствующих сильных разрывов — пару вторичных фронтов (прямой и отражённый) в порядке их положения относительно точки  $O$ . Возможность попутного столкновения двух разнотиповых сильных разрывов определим по соотношению их скоростей и взаимному положению (волны из верхней строки «убегающие», из первого столбца «догоняющие» или «встречные»); невозможные варианты обозначим прочерком. Типы вторичных волн выберем по классификации сильных разрывов с учётом (6) и знаков деформаций  $e^+$ ,  $e^-$  в соответствующих интервалах  $x$ .

Таблица 1

Возможные взаимодействия сильных разрывов

$x$	$O$	$\xi^a$	$\Sigma_*$	$\xi^b$	$\gamma^b$
$\xi^a$	—	—	$\xi^{-a}\Sigma_{**}$ (a)	—	—
$\Sigma_*$	—	—	—	$\xi^{-a}\Sigma_{**}$ (b)	$\xi^{-a}\gamma^a$ (c)
$\xi^{-a}$	$\xi^a$ (d)	$\xi^{-a}\xi^a$ (e)	—	—	—

Табл. 1, построенная описанным способом, содержит всего пять случаев (a), (b), (c), (d), (e), к которым можно отнести все столкновения сильных разрывов в задаче с краевым условием (6). Все варианты с участием «догоняющей» ударной волны сведены в одну строку,

с участием «убегающей» ударной волны — в один столбец. Знак «\*» у фронта  $\Sigma$  означает или отсутствие индекса у первичной ударной волны, или любой индекс у вторичной ударной волны с изменённой скоростью ( $\dot{\Sigma} \neq \dot{\Sigma}_* \neq \dot{\Sigma}_{**} \neq \dots$ ), которая согласно (5) зависит от  $e^+$ ,  $e^-$ .

Обобщая результаты предварительного анализа (табл. 1), укажем закономерности развития волновой картины в полубесконечном разномодульном стержне при одноосном движении граничной точки  $O$  по кусочно-линейному закону (6):

1) любое столкновение сильных разрывов приводит к возникновению двух вторичных фронтов — прямого (попутного с положительным направлением оси  $x$ ) и отражённого (бегущего к точке  $O$ ), при этом типы новых разрывов могут отличаться от тех, что были до взаимодействия; два однотипных фронта после встречного столкновения расходятся без изменения типа разрыва;

2) прямые и отражённые вторичные волны также могут участвовать в столкновениях, производя новые пары сильных разрывов; для каждого такого взаимодействия снова выбирается случай из табл. 1;

3) только ударная волна и быстрый простой разрыв могут быть «догоняющими»; медленные разрывы — всегда «убегающие»;

4) если стадия сжатия продолжается при любом  $t \geq t_2$  после стадии растяжения, то при столкновении любых сильных разрывов отражённым фронтом всегда является быстрый простой разрыв  $\xi^{-a}$  независимо от количества узлов функции  $u_0(t)$  на интервалах  $t \in [0; t_2) \cup (t_2; +\infty)$ ;

5) попутное столкновение ударной волны  $\Sigma_*$  с любым сильным разрывом («убегающим» медленным или «догоняющим» быстрым) приводит к скачкообразному изменению её скорости, которую согласно (5) и (3) можно вычислить как

$$\dot{\Sigma}_*(t) = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \frac{e^+}{e^+ - e^-}}, \quad e^\pm = e^\pm(\Sigma_*, t). \quad (7)$$

#### 4. ВЫБОР СЦЕНАРИЯ РАЗВИТИЯ ВОЛНОВОЙ КАРТИНЫ

Принимая во внимание перечисленные закономерности, общее решение задачи будем строить в виде совокупности локальных волновых картин на последовательных этапах времени, которые задаются узловыми точками условия (6) и моментами времени столкновений сильных разрывов. Решение на актуальном локальном этапе с соответствующей линейной частью (6) строится с учётом решения предыдущего этапа. Такой рекуррентный способ был использован ранее в [13] для задачи о растяжении-сжатии разномодульного упругого полупространства, где гладкая нелинейная функция граничного перемещения аппроксимировалась линейным сплайном с одним промежуточным узлом на этапе растяжения и линейным законом на этапе сжатия.

Пусть  $\Theta$  — множество точек, разбивающих открытый интервал  $t \geq 0$  на отдельные этапы. Основными элементами такого разбиения являются моменты  $t_0, t_1, t_2, t_3$  из условия (6). В процессе решения будем добавлять в множество  $\Theta$  точки  $T_1, T_2, \dots$ , соответствующие моментам времени столкновения сильных разрывов между собой и моментам времени отражений  $\xi^{-a}$  от граничной точки  $O$ . Считаем, что все моменты в  $\Theta$  различны. Очередность таких инцидентов не единственна и зависит от целого ряда факторов: положения узлов функции граничного перемещения, текущего распределения перемещений и деформаций в интервалах между сильными разрывами, механических параметров разномодульного материала в модели [9]. Следовательно, переход актуальной волновой картины к следующей изменённой конфигурации также может происходить не единственным образом.

Возможные сценарии эволюции волновой картины в описанной задаче представим в виде маркированного дерева локальных решений (рис. 2). Метка каждого узла дерева соответствует одному из возможных локальных решений в табл. 2, полученных с использованием табл. 1

в качестве предиктора волновых картин. Сильные разрывы в локальных решениях (табл. 2) расположены в порядке возрастания их координат относительно точки  $O$ . Для каждого узла-потомка указана причина его возникновения (связь с родителем) — граничное перемещение (6) или один из инцидентов (а)–(е) (табл. 1).

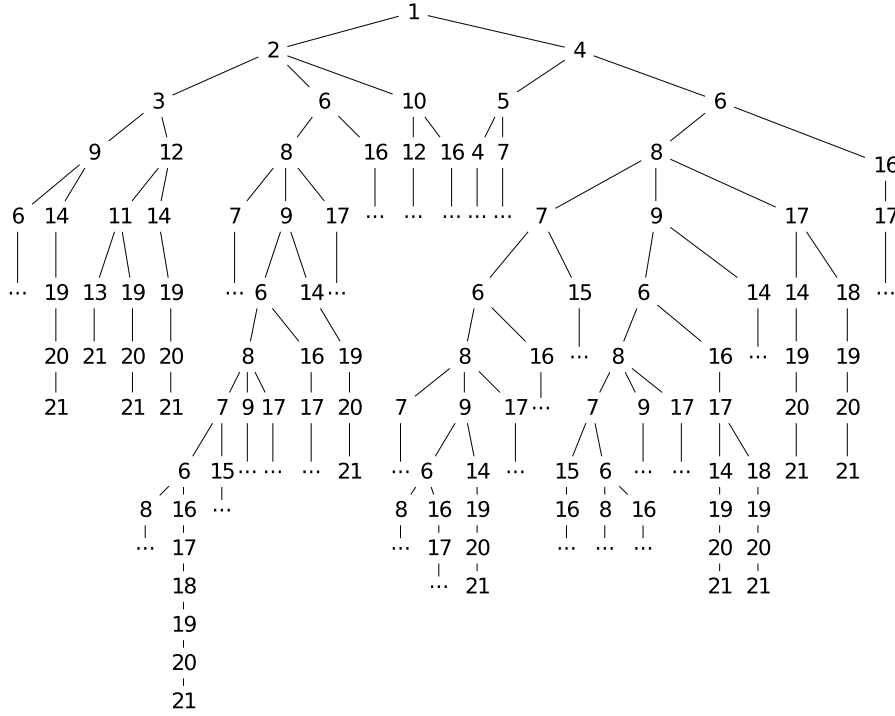


Рис. 2. Маркированное дерево локальных решений для задачи с краевым условием (6)

Решения в узлах 1–9 включают ударную волну, а в узлах 10–21 соответствуют времени, когда ударная волна уже догнала все идущие впереди медленные разрывы и вышла в недеформированную область, превратившись в быстрый полусигнотон  $\gamma^a$  ( $e^+ = 0, e^- \neq 0$ ). Узлы 1–3 и 10–13 описывают состояния при  $t < t_3$  (т. е. до образования первичного быстрого простого разрыва  $\xi^a$ ). Узлы с более чем одним потомком соответствуют локальным решениям, допускающим различные сценарии развития.

Корневым узлом 1 на рис. 2 считаем локальное решение  $\Sigma\xi^b\gamma^b$ , поскольку именно оно допускает первое ветвление в общем решении задачи. Цепочка из трёх локальных решений, однозначно описывающих последовательное возникновение первичных сильных разрывов  $\gamma^b, \xi^b, \Sigma$  в моменты времени  $t_0, t_1, t_2$ , в дерево не включена из-за ограниченного объёма статьи. По этой же причине многоточием на рис. 2 обозначены некоторые поддеревья с большим количеством узлов ветвления или большой глубиной листьев с меткой 21, соответствующим итоговой волновой картине  $\xi^a\xi^a\xi^a\gamma^a$  в табл. 2.

В каждом локальном решении (табл. 2) движущиеся сильные разрывы делят всю деформированную область на отдельные интервалы. Таким образом, перемещение  $u(x, t)$  в каждый момент времени является кусочно-линейной по  $x$  функцией, у которой подвижные узловые точки совпадают с текущими координатами сильных разрывов. При переходе некоторого локального решения к следующему состоянию в момент  $\theta_i \in \Theta$  появляется только один новый интервал  $\Omega_i$  и, возможно, одновременно исчезает один из существующих, если причина перехода — инцидент из табл. 1. Решение уравнения движения (3) в каждом новом интервале  $\Omega_i$  будем искать в форме

$$u_i(x, t)|_{x \in \Omega_i, t \geq 0} = A_i + B_i(t - \theta_i) + C_i x, \quad \Omega_i = [x_L, x_R], \quad \theta_i \in \Theta, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8)$$



Таблица 2

## Узлы дерева локальных решений

Узел	Локальное решение	Потомки (связи)
1	$\Sigma\xi^b\gamma^b$	2(b), 4(6)
2	$\xi^{-a}\Sigma_*\gamma^b$	3(d), 6(6), 10(c)
3	$\xi^a\Sigma_*\gamma^b$	2(a), 9(6), 12(c)
4	$\xi^a\Sigma_*\xi^b\gamma^b$	5(a), 6(b)
5	$\xi^{-a}\Sigma_*\xi^b\gamma^b$	4(d), 7(b)
6	$\xi^a\xi^{-a}\Sigma_*\gamma^b$	8(e), 16(c)
7	$\xi^{-a}\xi^{-a}\Sigma_*\gamma^b$	6(d), 15(c)
8	$\xi^{-a}\xi^a\Sigma_*\gamma^b$	7(b), 9(d), 17(c)
9	$\xi^a\xi^a\Sigma_*\gamma^b$	6(b), 14(c)
10	$\xi^{-a}\xi^{-a}\gamma^a$	12(d), 16(6)
11	$\xi^{-a}\xi^a\gamma^a$	13(d), 19(6)
12	$\xi^a\xi^{-a}\gamma^a$	11(e), 14(6)
13	$\xi^a\xi^a\gamma^a$	21(6)
14	$\xi^a\xi^a\xi^{-a}\gamma^a$	19(e)
15	$\xi^{-a}\xi^{-a}\xi^{-a}\gamma^a$	16(d)
16	$\xi^a\xi^{-a}\xi^{-a}\gamma^a$	17(e)
17	$\xi^{-a}\xi^a\xi^{-a}\gamma^a$	14(d), 18(e)
18	$\xi^{-a}\xi^{-a}\xi^a\gamma^a$	19(d)
19	$\xi^a\xi^{-a}\xi^a\gamma^a$	20(e)
20	$\xi^{-a}\xi^a\xi^a\gamma^a$	21(d)
21	$\xi^a\xi^a\xi^a\gamma^a$	—

где  $x_L$ ,  $x_R$  — левая и правая границы интервала  $\Omega_i$ ; коэффициенты  $A_i$ ,  $B_i$  имеют размерность [м] и [м/сек] соответственно, коэффициент  $C_i$  — безразмерный. Если интервал  $\Omega_i$  образовался в результате столкновения двух сильных разрывов, то координаты его подвижных границ вычисляются в (8) как  $x_L = X_i + \dot{x}_L(t - \theta_i)$ ,  $x_R = X_i + \dot{x}_R(t - \theta_i)$ , где  $X_i$  — координата столкновения,  $\dot{x}_L$ ,  $\dot{x}_R$  — скорости движения точек  $x_L$  и  $x_R$  соответственно. Если интервал  $\Omega_i$  располагается между точкой  $O$  и ближайшим к ней сильным разрывом, то  $x_L = 0$ ,  $x_R = \dot{x}_R(t - \theta_i)$ .

Для определения коэффициентов  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  в (8) воспользуемся условиями непрерывности перемещений на границах интервала  $\Omega_i$ :

$$u_i(x_L, t) = u_L(x_L, t), \quad u_i(x_R, t) = u_R(x_R, t). \quad (9)$$

Перемещения  $u_L(x_L, t)$ ,  $u_R(x_R, t)$  в (9) можно представить в форме, аналогичной (8):

$$\begin{aligned} u_L(x_L, t) &= A_L + B_L(t - \theta_L) + C_L(X_i + \dot{x}_L(t - \theta_i)), \\ u_R(x_R, t) &= A_R + B_R(t - \theta_R) + C_R(X_i + \dot{x}_R(t - \theta_i)), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\theta_L$ ,  $\theta_R$  — моменты времени возникновения решений  $u_L(x, t)$ ,  $u_R(x, t)$  в «соседних» с  $\Omega_i$  интервалах  $\Omega_L$ ,  $\Omega_R$ , для которых коэффициенты  $A_L$ ,  $B_L$ ,  $C_L$ ,  $A_R$ ,  $B_R$ ,  $C_R$  уже известны из предыдущих этапов решения. Здесь стоит отметить, что границы интервалов  $\Omega_L$ ,  $\Omega_R$  с течением времени продолжают двигаться и изменяться, в том числе за счёт «набегания» на них расширяющегося интервала  $\Omega_i$ . Если уравнения (9) записываются для интервала  $\Omega_i = [O, x_R]$ ,

то  $u_L(x_L, t) = u_0(t)$ ; если  $x_R$  — передний фронт граничных возмущений ( $\gamma^b$  или  $\gamma^a$ ), то  $u_R(x_R, t) = 0$ .

Подставляя (8), (10) в (9) и приравнивая коэффициенты при  $(t - \theta_i)$ , получаем систему уравнений относительно неизвестных  $A_i, B_i, C_i$ :

$$\begin{aligned} A_i + C_i X_i &= A_R + B_R(\theta_i - \theta_R) + C_R X_i, \\ B_i + C_i \dot{x}_R &= B_R + C_R \dot{x}_R, \\ B_i + C_i \dot{x}_L &= B_L + C_L \dot{x}_L. \end{aligned} \quad (11)$$

Если в (11) обе границы интервала  $\Omega_i = [x_L, x_R]$  — вторичные сильные разрывы, то левая граница  $x_L = \xi^{-a}$  всегда движется со скоростью  $-a$  (табл. 1), а правой границей  $x_R$  могут быть быстрые разрывы ( $\xi^a, \gamma^a$ ), медленные разрывы ( $\xi^b, \gamma^b$ ) или ударная волна ( $\Sigma_*$ ). Скорости быстрых и медленных разрывов постоянны и равны  $a$  и  $b$  соответственно, поэтому при  $x_R \in \{\gamma^b, \gamma^a, \xi^b, \xi^a\}$  система уравнений (11) замкнута. Если правая граница интервала  $\Omega_i$  — ударная волна, то для вычисления её неизвестной скорости  $\dot{x}_R = \dot{\Sigma}_*$  к трём уравнениям (11) необходимо добавить уравнение, полученное из (7) с учётом (8), (10):

$$\dot{\Sigma}_*(\theta_i) = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \frac{C_R}{C_R - C_i}}. \quad (12)$$

Теперь вернёмся к вопросу выбора пути от корневого узла 1 до одного из листьев с меткой 21 на дереве решений (рис. 2). Как уже было сказано выше, эволюция общего решения от недеформированного состояния до итоговой волновой картины  $\xi^a \xi^a \xi^a \gamma^a$  (узел 21 в табл. 2) определяется очерёдностью возникновения сильных разрывов за счёт граничного перемещения (6) и различных взаимодействий (а)–(е) (табл. 1). Для инцидентов (а), (б), (с) и (е) момент времени столкновения двух сильных разрывов с координатами  $x_k(t) = X_k + \dot{x}_k(t - \theta_k)$  и  $x_l(t) = X_l + \dot{x}_l(t - \theta_l)$  ( $X_k \neq X_l, \theta_k \neq \theta_l$ ) вычисляется из условия совпадения их фронтов:

$$x_k(T^{(*)}) = x_l(T^{(*)}) \implies T^{(*)} = \frac{X_l - X_k + \dot{x}_k \theta_k - \dot{x}_l \theta_l}{\dot{x}_k - \dot{x}_l}, \quad (*) \in \{(a), (b), (c), (e)\}. \quad (13)$$

Момент времени отражения вторичного фронта  $x_k(t) = \xi^{-a}$  от границы  $O$  (случай (д) в табл. 1) определяется аналогично:

$$X_k - a(T^{(d)} - \theta_k) = 0 \implies T^{(d)} = \frac{X_k}{a} + \theta_k. \quad (14)$$

Моменты времени  $t_0, t_1, t_2, t_3$ , когда возникают первичные разрывы, уже заданы краевым условием (6).

Если некоторый узел дерева решений имеет несколько путей перехода к следующей волновой картине, то для выбора конкретного направления необходимо согласно (13), (14), (6) определить моменты времени появления всех потомков этого узла и из полученных значений выбрать наименьшее. Именно это значение включается в множество  $\Theta$  и используется как  $\theta_i$  (в паре с соответствующей ему координатой  $X_i = x_k(\theta_i)$ ) в системе (11), (12) для вычисления коэффициентов функции перемещения  $u_i(x, t)$  на новом интервале  $\Omega_i$ , который возник при переходе к выбранному узлу (рис. 2).

## 5. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Результаты разделов 3 и 4, описывающие процесс решения поставленной краевой задачи, можно представить в алгоритмической форме. Для выбора сценария динамического изменения волновой картины используем дерево локальных решений (рис. 2) и соответствующую ему таблицу узлов (табл. 2).

ШАГ 1. Объявляем корневым узел 1 с волновой картиной  $\Sigma\xi^b\gamma^b$  текущим узлом и строим для него первые три локальных решения. Для этого определяем перемещения (8) в трёх интервалах  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ , последовательно появившихся на этапе  $t \in [t_0, t_2]$ :

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= A_1 + B_1t + C_1x, & x \in \Omega_1 &= [b(t - t_1), bt], & t \geq (\theta_1 = t_0), \\ u_2(x, t) &= A_2 + B_2(t - t_1) + C_2x, & x \in \Omega_2 &= [\dot{\Sigma}(t - t_2), b(t - t_1)], & t \geq (\theta_2 = t_1), \\ u_3(x, t) &= A_3 + B_3(t - t_2) + C_3x, & x \in \Omega_3 &= [0, \dot{\Sigma}(t - t_2)], & t \geq (\theta_3 = t_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Неизвестные коэффициенты  $A_i, B_i, C_i$  и скорость  $\dot{\Sigma}$  в (15) вычисляем из (11), (12) с учётом (6):

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, & B_1 &= k_1, & C_1 &= -k_1/b, & A_2 &= \phi_1(t_1), & B_2 &= k_2, & C_2 &= -k_2/b, \\ A_3 &= k_2t_1 + \phi_1(t_1), & B_3 &= k_2(1 - \dot{\Sigma}/b) + R\dot{\Sigma}/a, & C_3 &= -R/a, \\ \dot{\Sigma} &= \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \frac{k_2/b}{k_2/b - R/a}}, & R &= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)k_2 + \sqrt{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 k_2^2 - 4k_3(2k_2 - k_3)}. \end{aligned}$$

Границы интервалов  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  в (15) соответствуют своему текущему положению в локальной волновой картине корневого узла 1, при этом левая граница каждого  $\Omega_j, j = 1, 2, 3$ , совпадает с точкой  $O$  до тех пор, пока от конца стержня не отойдёт следующий сильный разрыв, образующий новый интервал.

ШАГ 2. Если текущий узел имеет более одного потомка, то согласно (6), (13), (14) вычисляем моменты времени возникновения всех потомков текущего узла, выбираем из них минимальное значение, смещаемся к соответствующему потомку и переходим к шагу 3, иначе смещаемся к единственному потомку текущего узла и переходим к шагу 3.

ШАГ 3. Перемещение  $u_i(x, t)$  на новом интервале  $\Omega_i$ , появившемся у текущего узла (выбранного потомка), строим согласно (8), (11), (12) с учётом актуальной части краевого условия (6) и предыдущих решений в «соседних» интервалах  $\Omega_L, \Omega_R$ .

ШАГ 4. Если текущий узел — лист с меткой 21, соответствующий итоговой волновой картине  $\xi^a\xi^a\xi^a\gamma^a$  (которая уже не будет меняться с течением времени, если краевое условие задачи задано в форме (6)), то переходим к шагу 5, ИНАЧЕ возвращаемся к шагу 2.

ШАГ 5. Стоп.

Программная реализация алгоритма выполнена в системе компьютерной алгебры Maxima 5.45.1 с использованием графического интерфейса wxMaxima 21.05.02 (свободное ПО с лицензией GNU GPL).

Описанный алгоритм может быть сравнительно легко адаптирован к решению других одномерных задач динамики разномодульного материала с любой формой кусочно-линейного краевого условия, соответствующей произвольному режиму одноосного граничного нагружения. Для адаптации алгоритма к конкретному режиму нагружения необходимо изменить (дополнить) список возможных взаимодействий сильных разрывов (табл. 1), а затем произвести соответствующую трансформацию списка узлов и их потомков (табл. 2) в дереве локальных решений.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Получим несколько сценариев решения динамической краевой задачи (1)–(7) для одного и того же разномодульного материала, сохраняя общую конфигурацию краевого условия (6) и изменяя только некоторые его параметры.

Константами при вычислениях объявляем:

— механические параметры разномодульного материала  $\lambda = 19,8$  ГПа,  $\mu = 26,9$  ГПа,  $\nu = 15,3$  ГПа,  $\rho_0 = 7600$  кг/м<sup>3</sup> [10] (скорости  $a, b$  находим по заданным  $\lambda, \mu, \nu, \rho_0$  из (3), (2));

— уровень граничного перемещения (6) в фиксированные моменты времени  $t_0 = 0$ ,  $t_2 = 0,5 \cdot 10^{-3}$  с и  $t_4 = 0,8 \cdot 10^{-3}$  с:  $\phi_0(t_0) = \phi_4(t_4) = 0$ ,  $\phi_2(t_2) = -0,005$  м.

Изменяемыми параметрами краевого условия (6) считаем моменты времени  $t_1$ ,  $t_3$  и соответствующие им значения  $\phi_1(t_1)$ ,  $\phi_3(t_3)$ .

В табл. 3 представлены результаты решения краевой задачи для выбранного разномодульного материала при разных значениях изменяемых параметров  $t_1$ ,  $\phi_1(t_1)$ ,  $t_3$ ,  $\phi_3(t_3)$ . Получены три последовательности локальных решений (сценарии А, В, С), которые различаются количеством и порядком следования волновых картин (узлов из табл. 2).

Таблица 3

Результаты решения краевой задачи

Сценарий	$t_1 \cdot 10^{-3}$ с	$\phi_1(t_1) \cdot 10^{-3}$ м	$t_3 \cdot 10^{-3}$ с	$\phi_3(t_3) \cdot 10^{-3}$ м	Последовательность локальных решений
А	0,45	-4,9	0,74	-4,0	1-2-6-8-9-6-8-7-6-16-17-18-19-20-21
В	0,30	-4,5	0,60	-4,0	1-4-6-8-7-6-8-9-14-19-20-21
С	0,30	-4,5	0,75	-1,5	1-4-6-8-9-6-16-17-18-19-20-21

Выбирая другие разномодульные материалы или изменяя координаты и количество узловых точек в условии (6), таблицу сценариев решения краевой задачи можно продолжить, если общая конфигурация функции  $u_0(t)$  сохранится (т. е. после стадии сжатия не произойдёт, например, остановка движения точки  $O$  или повторное растяжение стержня). Однако следует отметить, что решение задачи с помощью дерева (рис. 2) может заиклиться при попадании на «бесконечную» ветвь (например, 2-3-2-3-..., 4-5-4-5-..., 6-7-8-6-7-8-... в табл. 2), поэтому при вычислениях необходимо ограничивать максимальную длину пути от корневого узла 1 до листа 21.

Характеристические плоскости с диаграммами сильных разрывов для каждого полученного сценария (табл. 3) показаны на рис. 3. Тип деформированного состояния обозначен римскими цифрами и фоном разной интенсивности: прозрачная область 0 не деформирована, светлая область I соответствует растяжению, тёмная область II — сжатию.

Сильные разрывы, разделяющие области I и II на подобласти локальных решений, отмечены на рис. 3 значениями их скоростей. Полусигнотоны и простые разрывы движутся с характеристическими скоростями: медленные фронты растяжения — со скоростью  $b$ , быстрые фронты сжатия — со скоростью  $a$  или  $-a$  в зависимости от направления движения.

Ударная волна, разделяющая области растяжения и сжатия, обозначена на рис. 3 толстой линией. Её скорость (7) в результате серии столкновений с медленными и быстрыми фронтами изменяется от начального значения  $\dot{\Sigma}(t_2)$  до скорости быстрой характеристики  $a$ , когда ударная волна выходит в недеформированную зону 0. Соответствующие трансформации происходят и с фронтом ударной волны, что хорошо видно на всех диаграммах на рис. 3.

Поэтапное изменение распределения продольной деформации  $e(\tilde{x}, t)$  в разномодульном стержне при развитии решения динамической задачи по сценарию В = {1-4-6-8-7-6-8-9-14-19-20-21} представлено на рис. 4. Графики для сценариев А и С здесь не представлены из-за ограничения на объём статьи. Ось  $\tilde{x}$  на каждом графике масштабирована на координату переднего волнового фронта, входящего в локальное решение:  $\tilde{x} = x/\gamma^b$  ( $\tilde{x}|_{\gamma^b} = 1$ ) или  $\tilde{x} = x/\gamma^a$  ( $\tilde{x}|_{\gamma^a} = 1$ ); числовые значения  $t$  для узлов сценария В указаны в подписи к рис. 4 и обозначены соответствующими номерами на рис. 3(b).

Диаграммы сильных разрывов на рис. 3 показывают, что область сжатия II позади ударной волны формируется с течением времени не только за счёт сжимающего воздействия на торец стержня при  $t \geq t_2$ , но и вследствие многократных отражений быстрых простых разрывов

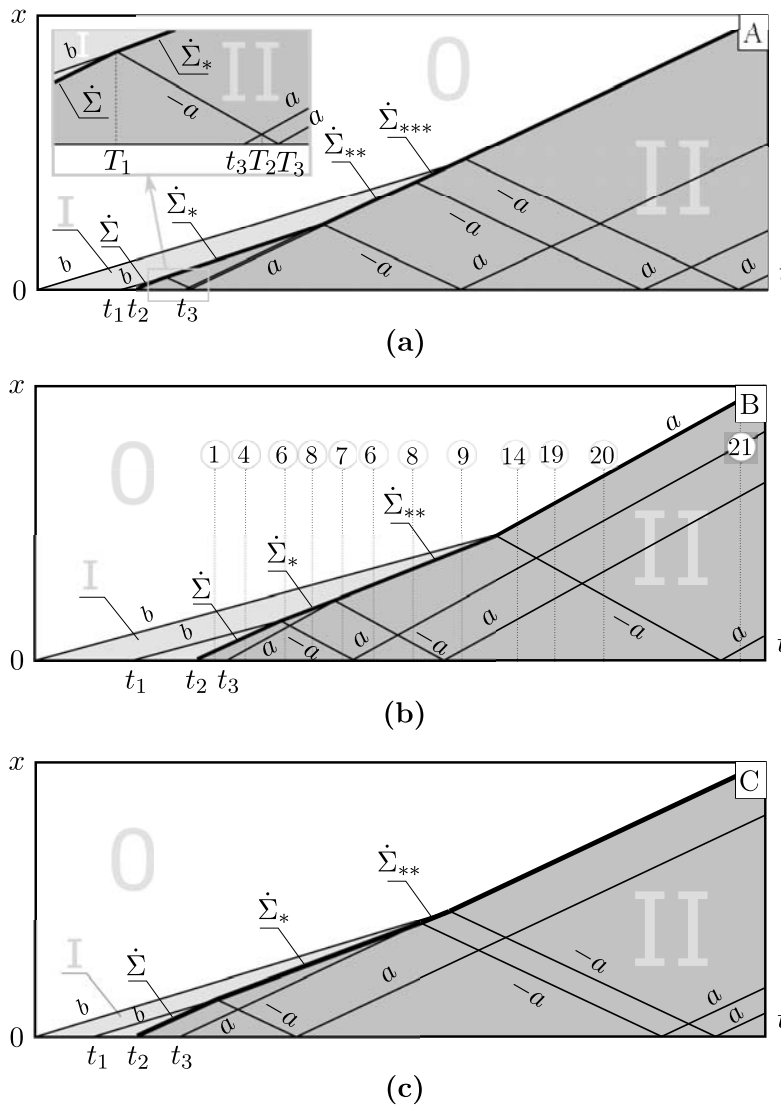


Рис. 3. Диаграммы сильных разрывов для сценариев А, В, С

от ударного фронта и границы  $x = 0$ . Изменяя положение точек  $t_1, t_3$  в краевом условии (6), можно управлять моментом первого отражения. При различных значениях  $t_1, t_3$  первый отражённый фронт  $\xi^{-a}$  может появиться в решении как до возникновения первичного простого разрыва  $\xi^a$  (рис. 3(a)), так и после него (рис. 3(b,c)). Последующие процессы отражения и взаимодействия вторичных простых разрывов  $\xi^a$  и  $\xi^{-a}$  продолжают влиять на распределение деформаций сжатия за ударной волной даже после её выхода в недеформированную зону 0.

Из графиков на рис. 4 следует, что итоговое поле деформаций сжатия (локальная диаграмма 21) складывается из нескольких интервалов с различным уровнем  $e < 0$ . Количество таких локальных интервалов при любом сценарии решения задачи совпадает с суммарным количеством первичных сильных разрывов, возникших за всё время деформирования стержня как на этапе сжатия ( $t \geq t_2$ ), так и на этапе растяжения ( $t \in [0; t_2]$ ). Это объясняется тем, что ударная волна, двигаясь со скоростью выше  $b$ , последовательно уничтожает бегущие впереди медленные фронты и интервалы предварительного растяжения и одновременно транслирует информацию о локальных решениях из этих интервалов в область сжатия позади себя.

Отметим, что решения, подобные представленным в графической форме на рис. 3 и 4, могут возникать только в разномодульном материале и их невозможно построить для анало-

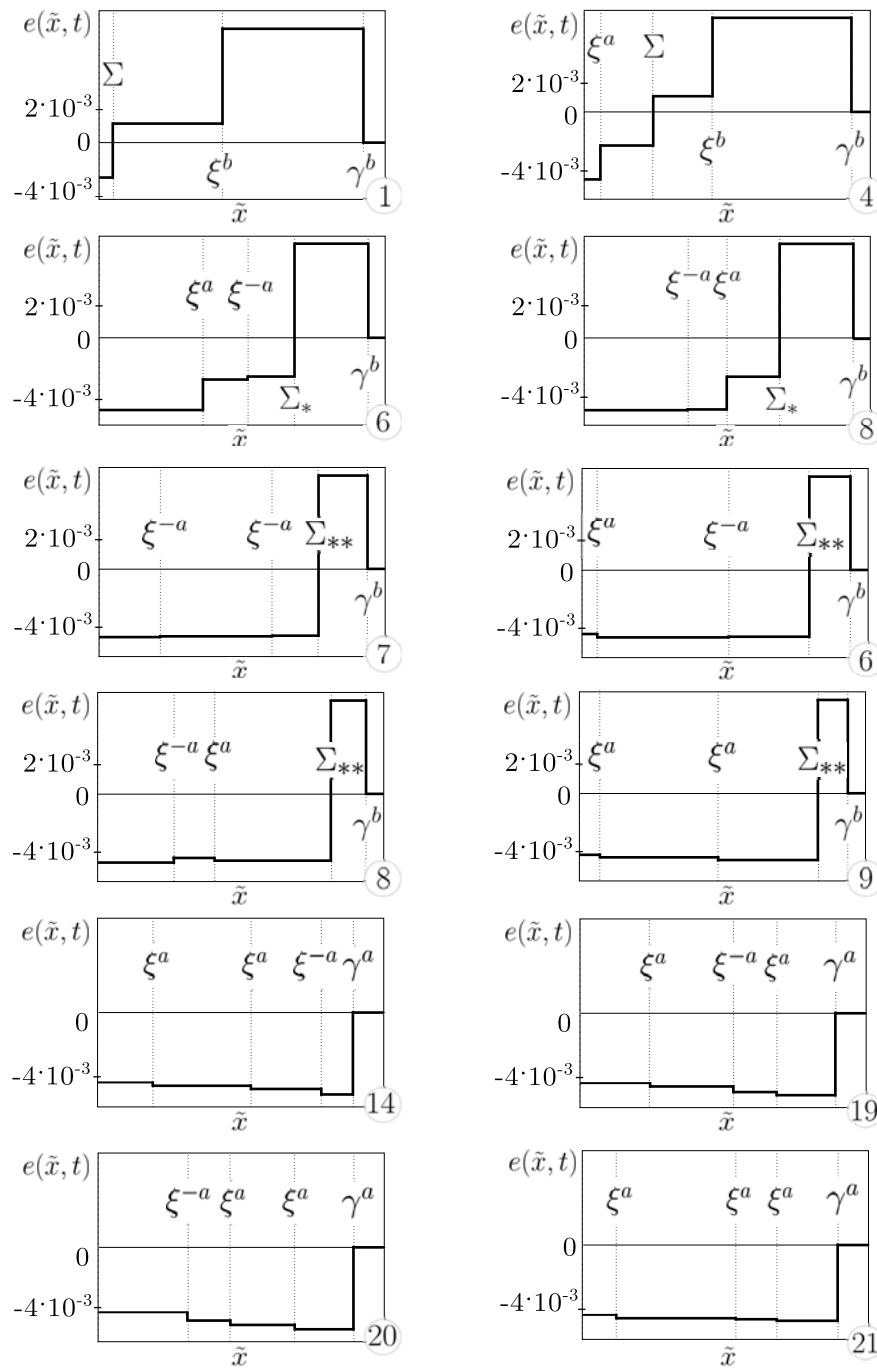


Рис. 4. Распределение продольной деформации в стержне при  $t = 0,510; 0,610; 0,777; 0,808; 0,950; 1,007; 1,149; 1,291; 1,461; 1,589; 1,731; 2,172 \cdot 10^{-3}$  с (сценарий В)

гичной постановки задачи в рамках линейной упругости. Таким образом, полученные результаты показывают, что физическая нелинейность модели разномодульной среды [9] сохраняется даже при одновременной кусочной линейризации модельных соотношений (1)–(4) и краевого условия (6).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что в зависимости от соотношения моментов времени перехода к новому звену краевого условия (6) и моментов времени взаимодействия сильных разрывов между собой

общее решение описанной краевой задачи определяется однозначно как путь по дереву локальных решений (рис. 2). Что особенно важно, наличие таких путей решения не зависит от количества узловых точек функции граничных перемещений  $u(0, t) = u_0(t)$ .

Таким образом, полученные результаты можно считать демонстрацией эффективного подхода к моделированию динамики одномерного деформирования разномодульной среды [9]. Представленный в статье подход фактически сводит задачу к решению алгебраических уравнений и тем самым показывает достаточно эффективное применение кусочной линеаризации краевых условий (в том числе в качестве аппроксимации исходно нелинейной функции) для конструирования методов точного и приближённого решений краевых задач в нелинейной модели разномодульной среды [9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механика горных пород. М.: Недра, 1975.
2. Заалишвили В.Б. Нелинейные свойства грунтов // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2015. № 4. С. 22–37.
3. Lomakin E.V., Fedulov B.N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. V. 50, N 6. P. 1527–1535; DOI: 10.1007/s11012-015-0104-5
4. Ершова А.Ю., Мартиросов М.И. Экспериментальное исследование разномодульных полимерных композитов с мелкодисперсным наполнителем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 5. С. 68–72.
5. Fouremau M., Borvik T., Benallal A., Hopperstad O.S. Anisotropic failure modes of high-strength aluminium alloy under various stress states // Internat. J. Plasticity. 2013. N 48. P. 34–53; DOI: 10.1016/j.ijplas.2013.02.004
6. Олейников А.И., Овчаров И.О. Определяющие уравнения связи напряжений с деформациями для чугуна // Учёные записки Комсомольск.-на-Амуре гос. техн. ун-та. 2013. Т. 1, № 3(15). С. 42–46.
7. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1978. № 6. С. 29–34.
8. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.
9. Ляховский В.А., Мясников В.П. О поведении упругой среды с микронарушениями // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 10. С. 71–75.
10. Мясников В.П., Олейников А.И. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. Владивосток: Дальнаука, 2007.
11. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: Физматлит, 2008.
12. Дудко О.В., Лаптева А.А., Семенов К.Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Дальневосточный мат. журн. 2005. Т. 6, № 1–2. С. 94–105.
13. Дудко О.В., Лаптева А.А., Рагозина В.Е. Нестационарные одномерные динамические задачи разномодульной упругости с кусочно-линейной аппроксимацией краевых условий // Вестн. Пермского национального исследовательского политех. ун-та. Механика. 2019. № 4. С. 37–47; DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.04
14. Dudko O.V., Lapteva A.A., Ragozina V.E. Solving nonstationary boundary value problem with piecewise linear boundary condition for one-dimensional dynamics of deformable heteromodal elastic solid // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2448, N 1. Article 020003; DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0073464>
15. Gavrilov S.N., Herman G.C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodal elastic bar subjected to a harmonic loading // J. Sound and Vibration. 2012. V. 331, N 40. P. 4464–4480; DOI: 10.1016/j.jsv.2012.05.022
16. Kuznetsova M., Khudyakov M., Sadovskii V. Wave propagation in continuous bimodular media // Mech. Adv. Mater. Struct. April 2021. P. 1–16; DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1889725>

17. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998.
18. Maslov V.P., Mosolov P.P. General theory of the solutions of the equations of motion of an elastic medium of different moduli // J. Appl. Math. Mech. 1985. V. 49, N 3. P. 322–336;  
DOI: 10.1016/0021-8928(85)90031-0



UDC 539.3:517.958

## EVOLUTION OF THE WAVE PATTERN FOR PIECEWISE LINEAR UNIAXIAL TENSION AND COMPRESSION OF A HETEROMODULUS ELASTIC BAR

© 2022 O. V. Dudko<sup>a</sup>, A. A. Lapteva<sup>b</sup>, V. E. Ragozina<sup>c</sup>

*Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS  
ul. Radio 5, Vladivostok 690041, Russia*

E-mails: <sup>a</sup>dudko@iacp.dvo.ru, <sup>b</sup>lanastal@mail.ru, <sup>c</sup>ragozina@vlc.ru

Received 30.05.2022, revised 15.07.2022, accepted 29.09.2022

**Abstract.** The process of changing the wave pattern in the problem of non-stationary deformation of a heteromodulus elastic bar under uniaxial piecewise linear tension and following compression is described as a connected sequence of local solutions on successive time intervals. All possible variants and results of collisions of primary and secondary strong discontinuities are indicated for a given piecewise linear function of boundary displacements. An efficient algorithm for solving one-dimensional boundary value problems of the dynamics of deformation of a heteromodulus elastic medium under a piecewise linear boundary condition is proposed. The algorithm is based on finding a path in a local decision tree.

**Keywords:** heteromodulus elasticity, tension and compression of bar, piecewise-linear boundary condition, collision of strong discontinuities, exact solution on graph.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.405

### REFERENCES

1. Baklashov I.V., Kartoziya B.A. Mekhanika gornykh porod [Mechanics of rocks.] Moscow: Nedra, 1975 (in Russian).
2. Zaalishvili V.B. Nelineynyye svoystva gruntov [Nonlinear properties of soils]. *Seysmostoykoye stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzheniy* [Earthquake engineering. Constructions safety], 2015, No. 4, pp. 22–37 (in Russian).
3. Lomakin E.V., Fedulov B.N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites. *Meccanica*, 2015, Vol. 50, No. 6, pp. 1527–1535; DOI: 10.1007/s11012-015-0104-5
4. Yershova A.U., Martirosov M.I. Eksperimental'noye issledovaniye raznomodul'nykh polimernykh kompozitov s melkodispersnym napolnitelem [Experimental study heterogeneous polymer composites with finely divided filler], *Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernykh Konstruktsii i Sooruzhenii* [Structural Mech. Engrg. Construct. Buildings], 2015, No. 5, pp. 68–72 (in Russian).
5. Fouremau M., Borvik T., Benallal A., Hopperstad O.S. Anisotropic failure modes of high-strength aluminium alloy under various stress states. *Internat. J. Plasticity*, 2013, No. 48, pp. 34–53; DOI: 10.1016/j.ijplas.2013.02.004
6. Oleinikov A.I., Ovcharov I.O. Opredelyayushchiye uravneniya svyazi napryazheniy s deformatsiyami dlya chuguna [Constitutive equations relating stresses to strains for cast iron]. *Uchenye zapiski Komsomol'sk.-na-Amure gos. tekhn. un-ta* [Scholarly Notes of Komsomolsk-na-Amure State Technical University], 2013, Vol. 1, No. 3(15), pp. 42–46 (in Russian).
7. Lomakin E.V., Rabotnov Yu.N. A theory of elasticity for an isotropic body with different moduli in tension and compression. *Mech. Solids*, 1978, Vol. 13, No. 6, pp. 25–30.

8. Ambartsumyan S. A. Raznomodul'naya teoriya uprugosti [Theory of heteromodular elasticity]. Moscow: Nauka, 1982 (In Russian).
9. Lyakhovskiy V.A., Myasnikov V.P. O povedenii uprugoy sredy s mikronarusheniyami [The elastic behavior of microfractured media]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Fizika Zemli* [Izv. USSR Acad. Sciences. Physics of the Earth], 1984, No. 10, pp. 71–75 (in Russian).
10. Myasnikov V.P., Oleinikov A.I. Osnovy mekhaniki geterogenno-soprotivlyayushchikhsya sred [Fundamentals of mechanics of heterogeneous-resisting media]. Vladivostok: Dal'nauka, 2007 (in Russian).
11. Sadovskaya O., Sadovskii V. Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials. Heidelberg: Springer-Verl., 2012.
12. Dudko O.V., Lapteva A.A., Semyonov K. T. O rasprostraneni ploskikh odnomernykh voln i ikh vzaimodeystvii s pregradami v srede, po-raznomu soprotivlyayushchejsya rastyazheniyu i szhatiyu [About distribution of flat one-dimensional waves and their interaction with obstacles in a medium differently reacting to stretching and compression]. *Dal'nevostochnyi Mat. Zhurn.* [Far Eastern Math. J.], 2005, Vol. 6, No. 1–2, pp. 94–105 (in Russian).
13. Dudko O.V., Lapteva A.A., Ragozina V.E. Nonstationary 1D dynamics problems for heteromodular elasticity with piecewise-linear approximation of boundary conditions. *PNRPU Mech. Bull.*, 2019, Vol. 4, pp. 37–47; DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.04
14. Dudko O.V., Lapteva A.A., Ragozina V.E. Solving nonstationary boundary value problem with piecewise linear boundary condition for one-dimensional dynamics of deformable heteromodular elastic solid. *AIP Conf. Proc.*, 2021, Vol. 2448, No. 1, article 020003; DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0073464>
15. Gavrilov S.N., Herman G.C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading. *J. Sound Vibration*, 2012, Vol. 331, No. 40, pp. 4464–4480; DOI: 10.1016/j.jsv.2012.05.022
16. Kuznetsova M., Khudyakov M., Sadovskii V. Wave propagation in continuous bimodular media. *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2021, pp. 1–16; DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1889725>
17. Kulikovskii A.G., Sveshnikova E.I. Nonlinear Waves in Elastic Media. Boca Raton: CRC Press, 1995.
18. Maslov V. P., Mosolov P. P. General theory of the solutions of the equations of motion of an elastic medium of different moduli. *J. Appl. Math. Mech.*, 1985, Vol. 49, No. 3, pp. 322–336; DOI: 10.1016/0021-8928(85)90031-0