СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год
Том 25, №4(92)
Октябрь - декабрь 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 517.9

УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ И ТОЧНО ТРАНЗИТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ $sl_2(\mathbb{R})$

© 2022 М.В.Нещадим

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия

E-mail: neshch@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 08.06.2022 г.; после доработки 08.06.2022 г.;
принята к публикации 22.06.2022 г.

Доказано, что точно транзитивные представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ в пространстве векторных полей $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^3$ определяются решениями уравнения Лиувилля. Также получена характеризация точно транзитивных представлений алгебры $so_3(\mathbb{R})$.

Ключевые слова: алгебры $sl_2(\mathbb{R})$, $so_3(\mathbb{R})$, точно транзитивные представления, уравнение Лиувилля.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.408

Представления алгебр Ли векторными полями естественно возникают в вопросах группового анализа дифференциальных уравнений [1], при этом, как правило, рассматриваются только локальные действия соответствующих групп Ли. Ограничения типа точной транзитивности, кратной транзитивности, обобщение условий транзитивности естественно появляются, например, при исследовании групповых симметрий физических структур [2–6].

Пусть L — некоторая конечномерная алгебра Ли, $\dim L = n$. Представлением алгебры Ли L в алгебру Ли $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^m$ векторных полей на пространстве $\mathbb{R}^m$ является любой гомоморфизм $\rho\colon L \to \operatorname{Vect}\mathbb{R}^m$ алгебр Ли. Будем говорить, что алгебра Ли L имеет точно транзитивное представление $\rho\colon L \to \operatorname{Vect}\mathbb{R}^m$, если $m = n$ и определитель, составленный из коэффициентов базисных операторов алгебры $\rho(L)$, невырожден. Данное определение равносильно тому, что соответствующая локальная группа Ли действует точно транзитивно на открытом подмножестве пространства $\mathbb{R}^n$ [7, 8]. Естественно предположить, что точно транзитивные представления алгебры Ли векторными полями должны иметь специальный вид.

В работе находятся точно транзитивные представления двух наименьших простых алгебр Ли $sl_2(\mathbb{R})$ и $so_3(\mathbb{R})$. Доказано, что точно транзитивные представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ в пространстве векторных полей $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^3$ соответствуют решениям уравнения Лиувилля [1, 9]:

$$z_{xy} = ke^z,$$

где $z = z(x, y)$, k — вещественное число. Уравнение Лиувилля относится к уравнениям второго порядка, которые имеют вид $z_{xy} = f(z)$. Известно [10], что единственным нелинейным уравнением такого вида, интегрируемым методом Дарбу (см. [9, гл. 4]), является уравнение Лиувилля. Кроме того, уравнение Лиувилля, как и линейные уравнения, инвариантно относительно бесконечной группы, содержащей две произвольные функции, но не линеаризуется точечными преобразованиями. С другой стороны, оно может быть линеаризовано преобразованием Ли — Бэклунда (см. [1, с. 222]). Также уравнение Лиувилля естественно появляется при классификации линейных дифференциальных уравнений второго порядка двух независимых

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

переменных с использованием инвариантов Лапласа (см. [1, гл. III, § 9]). Классификационные результаты по нелинейным дифференциальным уравнениям указанного вида могут быть найдены в работах [11–14].

В разд. 1 приводится описание всех точно транзитивных представлений алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ в пространстве векторных полей $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^3$. Все они определяются двумя функциями f, g двух переменных, которые удовлетворяют одному дифференциальному уравнению второго порядка. Оказалось, что данное уравнение является уравнением Лиувилля на произведение $h = fg$ этих функций. Как хорошо известно (см. [1, глава III, §9, с. 123]), решение уравнения Лиувилля определяется двумя функциями одного аргумента. Таким образом, транзитивные представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ определяются двумя функциями одного аргумента.

В разд. 2 приводится описание всех точно транзитивных представлений алгебры $so_3(\mathbb{R})$ в пространстве векторных полей $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^3$. Они также определяются двумя функциями f, g двух переменных, которые удовлетворяют одному дифференциальному уравнению второго порядка. Но получить единое уравнение на некоторую функцию $h = H(f, g)$ не удалось. Сформулирован соответствующий вопрос.

Все функции, рассматриваемые в работе, предполагаются достаточно гладкими, и вычисления производятся в предположении общего положения.

1. ТОЧНО ТРАНЗИТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ $sl_2(\mathbb{R})$

Алгебра $sl_2(\mathbb{R})$ порождается матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и имеет следующую таблицу коммутаторов:

	A	B	C
A	0	$2C$	$2B$
B	$-2C$	0	$2A$
C	$-2B$	$-2A$	0

Имеет место следующая

Теорема 1. *Любое точно транзитивное представление алгебры Ли $sl_2(\mathbb{R})$ в пространстве векторных полей $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^3$ эквивалентно одному из следующих представлений:*

$$a = \partial_x, \quad p = e^{2x} f\left(\frac{1}{2}(\ln g)_y \partial_x + \partial_y\right), \quad q = e^{-2x} g\left(-\frac{1}{2}(\ln f)_z \partial_x + \partial_z\right),$$

где функции f, g переменных y, z связаны равенством

$$\alpha'(y)\beta'(z) f g = -(\alpha(y) + \beta(z))^2$$

для некоторых функций $\alpha(y)$, $\beta(z)$, причём $\alpha'(y)\beta'(z) \neq 0$. Здесь и далее под производной вида $(\ln f)_z$ понимается дробь f_z/f.

Доказательство. Пусть представление алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ в пространстве векторных полей $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$A \mapsto a, \quad B \mapsto b, \quad C \mapsto c,$$

где

$$a = a^1\partial_x + a^2\partial_y + a^3\partial_z, \quad b = b^1\partial_x + b^2\partial_y + b^3\partial_z, \quad c = c^1\partial_x + c^2\partial_y + c^3\partial_z,$$

а коэффициенты a^i, b^i, c^i, $i=1,2,3$, зависят от переменных x,y,z. Транзитивность данного представления равносильна невырожденности определителя $\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$, составленного из коэффициентов операторов a, b, c.

Можно считать, что $a=\partial_x$. Из соотношений $[a,b]=2c$, $[a,2c]=4b$ получаем $b^i_{xx}=4b^i$, $i=1,2,3$, т. е. $b^i=p^ie^{2x}+q^ie^{-2x}$, где коэффициенты p^i, q^i, $i=1,2,3$, зависят от переменных y,z.

Следовательно,

$$b=(p^1e^{2x}+q^1e^{-2x})\partial_x+(p^2e^{2x}+q^2e^{-2x})\partial_y+(p^3e^{2x}+q^3e^{-2x})\partial_z,$$
$$c=\frac{1}{2}[a,b]=(p^1e^{2x}-q^1e^{-2x})\partial_x+(p^2e^{2x}-q^2e^{-2x})\partial_y+(p^3e^{2x}-q^3e^{-2x})\partial_z.$$

Рассмотрим операторы

$$p=\frac{1}{2}(b+c),\quad q=\frac{1}{2}(b-c).$$

Имеем

$$[a,p]=b+c,\quad [a,q]=c-b,\quad [p,q]=-a.$$

Итак, для операторов a, p, q имеем следующую таблицу коммутаторов:

	a	p	q
a	0	$2p$	$-2q$
p	$-2p$	0	$-a$
q	$2q$	a	0

Операторы p, q представим в виде

$$p=e^{2x}v,\quad q=e^{-2x}w,$$

где

$$v=p^1\partial_x+p^2\partial_y+p^3\partial_z,\quad w=q^1\partial_x+q^2\partial_y+q^3\partial_z.$$

Инварианты оператора v являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{p^1}=\frac{dy}{p^2}=\frac{dz}{p^3},$$

так как коэффициенты p^i, $i=1,2,3$, зависят от переменных y, z, то существует инвариант $t=T(y,z)$. Следовательно, в переменных x,y,t оператор v примет вид $v=v^1\partial_x+v^2\partial_y$, где v^1, v^2 зависят от переменных y,t, и соответственно

$$p=e^{2x}(v^1\partial_x+v^2\partial_y)=e^{2x}v,\quad q=e^{-2x}(w^1\partial_x+w^2\partial_y+w^3\partial_t)=e^{-2x}w,$$

где v^1, v^2, w^1, w^2, w^3 зависят от переменных y,t.

Инварианты оператора w являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{w^1}=\frac{dy}{w^2}=\frac{dt}{w^3},$$

так как коэффициенты w^i, $i=1,2,3$, зависят от переменных y,t, то существует инвариант $s=S(y,t)$. Следовательно, в переменных x,s,t операторы v, w примут вид

$$v=\tilde{v}^1\partial_x+\tilde{v}^2\partial_s,\quad w=\widetilde{w}^1\partial_x+\widetilde{w}^3\partial_t,$$

где $\tilde{v}^1$, $\tilde{v}^2$, $\widetilde{w}^1$, $\widetilde{w}^3$ зависят от переменных t,s.

Итак, можно считать, что

$$a = \partial_x, \quad p = e^{2x}(p^1\partial_x + p^2\partial_y) = e^{2x}v, \quad q = e^{-2x}(q^1\partial_x + q^3\partial_z) = e^{-2x}w,$$

где коэффициенты p^1, p^2, q^1, q^3 зависят от переменных y, z, причём в силу условия точной транзитивности $p^2q^3 \neq 0$.

Из соотношения $[p, q] = -a$ получаем

$$v(q^1) - w(p^1) = 4p^1q^1 - 1, \quad w(p^2) = -2q^1p^2, \quad v(q^3) = 2p^1q^3.$$

Так как

$$v(q^1) = p^2q^1_y, \quad w(p^1) = q^3p^1_z, \quad w(p^2) = q^3p^2_z, \quad v(q^3) = p^2q^3_y,$$

то получаем систему соотношений

$$p^2q^1_y - q^3p^1_z = 4p^1q^1 - 1, \quad q^3p^2_z = -2q^1p^2, \quad p^2q^3_y = 2p^1q^3. \tag{1}$$

Из последних двух уравнений системы (1) находим

$$p^1 = \frac{1}{2}p^2(\ln q^3)_y, \quad q^1 = -\frac{1}{2}q^3(\ln p^2)_z.$$

Обозначим $p^2 = f$, $q^3 = g$, тогда

$$p^1 = \frac{1}{2}f(\ln g)_y, \quad q^1 = -\frac{1}{2}g(\ln f)_z$$

и операторы p, q принимают вид

$$p = e^{2x}f\left(\frac{1}{2}(\ln g)_y\partial_x + \partial_y\right), \quad q = e^{-2x}g\left(-\frac{1}{2}(\ln f)_z\partial_x + \partial_z\right).$$

Первое уравнение системы (1) в этих обозначениях примет вид

$$f\left(g(\ln f)_z\right)_y + g\left(f(\ln g)_y\right)_z = 2fg(\ln g)_y(\ln f)_z + 2.$$

После элементарных преобразований получаем $(fg)(\ln(fg))_{yz} = 2$. Обозначим $h = fg$. Функция h является решением уравнения Лиувилля [1, гл. III, § 9, с. 123]: $h(\ln h)_{yz} = 2$, и общее решение этого уравнения имеет вид

$$h = -\frac{(\alpha(y) + \beta(z))^2}{\alpha'(y)\beta'(z)}$$

для некоторых функций $\alpha(y)$, $\beta(z)$ таких, что $\alpha'(y)\beta'(z) \neq 0$. Теорема доказана. □

2. ТОЧНО ТРАНЗИТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ $so_3(\mathbb{R})$

Алгебра $so_3(\mathbb{R})$ порождается матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и имеет следующую таблицу коммутаторов:

	A	B	C
A	0	C	$-B$
B	$-C$	0	A
C	B	$-A$	0

Имеет место следующая

Теорема 2. *Любое точно транзитивное представление алгебры Ли $so_3(\mathbb{R})$ в пространстве векторных полей $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^3$ эквивалентно одному из следующих представлений:*

$$a = \partial_x, \quad b = p\cos x + q\sin x, \quad c = -p\sin x + q\cos x,$$

где

$$p = -g(\ln f)_z\partial_x + f\partial_y, \quad q = f(\ln g)_y\partial_x + g\partial_z$$

и функции f, g переменных y, z связаны равенством

$$f(f(\ln g)_y)_y + g(g(\ln f)_z)_z = g^2(\ln f)_z^2 + f^2(\ln g)_y^2 + 1.$$

Доказательство. Пусть представление имеет вид

$$A \mapsto a, \quad B \mapsto b, \quad C \mapsto c,$$

где

$$a = a^1\partial_x + a^2\partial_y + a^3\partial_z, \quad b = b^1\partial_x + b^2\partial_y + b^3\partial_z, \quad c = c^1\partial_x + c^2\partial_y + c^3\partial_z,$$

коэффициенты a^i, b^i, c^i, $i = 1, 2, 3$, зависят от переменных x, y, z. Транзитивность данного представления равносильна невырожденности определителя, составленного из коэффициентов a^i, b^i, c^i, $i = 1, 2, 3$.

Можно считать, что $a = \partial_x$. Из соотношений $[a, b] = c$, $[a, c] = -b$ получаем $b^i_{xx} + b^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, т. е.

$$b^i = p^i\cos x + q^i\sin x, \quad c^i = -p^i\sin x + q^i\cos x,$$

коэффициенты p^i, q^i, $i = 1, 2, 3$, зависят от переменных y, z.

Следовательно,

$$b = p\cos x + q\sin x, \quad c = -p\sin x + q\cos x,$$

где

$$p = p^1\partial_x + p^2\partial_y + p^3\partial_z, \quad q = q^1\partial_x + q^2\partial_y + q^3\partial_z.$$

Из соотношения $[b, c] = a$ получаем

$$[p, q] - p^1p - q^1q = \partial_x.$$

Инварианты оператора p являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{p^1} = \frac{dy}{p^2} = \frac{dz}{p^3}.$$

Так как коэффициенты p^i, $i = 1, 2, 3$, зависят от переменных y, z, т. е. инвариант $t = T(y, z)$. Следовательно, в переменных x, y, t оператор p примет вид $p = v^1\partial_x + v^2\partial_y$, где коэффициенты v^1, v^2 зависят от переменных y, t, а оператор q примет вид

$$q = w^1\partial_x + w^2\partial_y + w^3\partial_t,$$

коэффициенты w^1, w^2, w^3 зависят от переменных y, t.

Инварианты оператора q являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{w^1} = \frac{dy}{w^2} = \frac{dz}{w^3}.$$

Так как коэффициенты w^i, $i = 1, 2, 3$, зависят от переменных y, t, т. е. инвариант $s = S(y, t)$. В переменных x, t, s операторы p, q имеют вид

$$p = \tilde{v}^1\partial_x + \tilde{v}^2\partial_s, \quad q = \widetilde{w}^1\partial_x + \widetilde{w}^3\partial_t.$$

Следовательно, можно считать сразу, что

$$p = p^1\partial_x + p^2\partial_y, \quad q = q^1\partial_x + q^3\partial_z,$$

коэффициенты p^1, p^2, q^1, q^3 зависят от переменных y, z.

Из соотношения $[p, q] - p^1 p - q^1 q = \partial_x$ получаем

$$p^2 q^1_y - q^3 p^1_z = (p^1)^2 + (q^1)^2 + 1, \quad q^3 p^2_z = -p^1 p^2, \quad p^2 q^3_y = q^1 q^3. \tag{2}$$

Последние два равенства (2) запишем в виде

$$p^1 = -q^3(\ln p^2)_z, \quad q^1 = p^2(\ln q^3)_y.$$

Обозначая $p^2 = f$, $q^3 = g$, перепишем первое соотношение (2):

$$f(f(\ln g)_y)_y + g(g(\ln f)_z)_z = g^2(\ln f)^2_z + f^2(\ln g)^2_y + 1. \tag{3}$$

Теорема доказана. □

Вопрос. Можно ли соотношение (3) переписать как уравнение на одну функцию $h = H(f, g)$?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Михайличенко Г.Г.* Групповая симметрия физических структур. Барнаул: изд. Барнаул. гос. пед. ун-та, 2003.
3. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур. Новосибирск: Альфа Виста, 2004.
4. *Симонов А.А.* Обобщение точно транзитивных групп // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 6. С. 153–178.
5. *Кыров В.А.* Аналитический метод вложения многомерных псевдоевклидовых геометрий // Сиб. электрон. мат. известия. 2018. Т. 15, С. 741–758.
6. *Нещадим М.В., Симонов А.А.* Об алгебраических системах Кулакова на группах // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1357–1368.
7. *Горбацевич В.В., Онищик А.Л.* Группы Ли преобразований. Группы Ли и алгебры Ли. Т. 1 // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. Фундамент. направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 20. С. 103–240.
8. *Онищик А.Л.* Топология транзитивных групп преобразований. М.: Физматлит, 1995.
9. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
10. *Lie S.* Diskussion der differentiagleichung $\dfrac{d^2z}{dxdy} = F(z)$ // Arch. Math. 1881. Bd. 6, Heft 1. P. 112–124.
11. *Жибер А.В., Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б.* Уравнения Клейна — Гордона с нетривиальной группой // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 5. С. 1103–1107.
12. *Жибер А.В., Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б.* Уравнения типа Лиувилля // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 1. С. 26–29.
13. *Михайлов А.В., Шабат А.Б., Ямилов Р.И.* Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, № 4. С. 3–53.
14. *Жибер А.В., Соколов В.В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 1. С. 63–106.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.9

THE LIOUVILLE EQUATION AND EXACTLY TRANSITIVE REPRESENTATIONS OF ALGEBRA $sl_2(\mathbb{R})$

© 2022 M. V. Neshchadim

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: neshch@math.nsc.ru

Received 08.06.2022, revised 08.06.2022, accepted 22.06.2022

Abstract. It is proved that exactly transitive representations of the algebra $sl_2(\mathbb{R})$ in the space of vector fields $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^3$ are classified by solutions of the equation Liouville. We also obtain a characterization of exactly transitive representations of the algebra $so_3(\mathbb{R})$.

Keywords: algebras $sl_2(\mathbb{R})$, $so_3(\mathbb{R})$, exactly transitive representations, equation Liouville.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.408

REFERENCES

1. Ovsyannikov L.V. Group Analysis of Differential Equations. N. Y.: Academic Press. 1982.
2. Mikhalichenko G.G. Gruppovaya simmetriya fizicheskikh struktur [Group symmetry of physical structures]. Barnaul: izd. Barnaul. Gos. Ped. Un-ta, 2003 (in Russian).
3. Kulakov Yu.I. Teoriya fizicheskikh struktur [Teoriya fizicheskikh struktur]. Novosibirsk: Al'fa Vista, 2004.
4. Simonov A.A. Obobshchenie tochno tranzitivnykh grupp [On generalized sharply n-transitive groups]. *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 2014, Vol. 78, No. 6, pp. 153–178 (in Russian).
5. Kyrov V.A. Analiticheskii metod vlozheniya mnogomernykh psevdoevklidovykh geometrii [The analytical method for embedding multidimensional pseudoEuclidean geometries]. *Siber. Electron. Mat. Izv.*, 2018, Vol. 15, pp. 741–758 (in Russian).
6. Neshchadim M.V., Simonov A.A. Ob algebraicheskikh sistemakh Kulakova na gruppakh [Kulakov algebraic systems on groups]. *Siber. Mat. Zhurn.*, 2021, Vol. 62, No. 6, pp. 1357–1368.
7. Gorbatsevich V.V., Onishchik A.L. Lie transformation groups. Lie groups and Lie algebras. *Encyclopaedia Math. Sci.*, Berlin: Springer-Verl., 1993, Vol. 20, pp. 95–235.
8. Onishchik A.L. Topology of Transitive Transformation Groups. Leipzig: J. Ambrosius Barth Verl., 1994.
9. Ibragimov N.H. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. Dordrecht: Riedel, 1985.
10. Lie S. Diskussion der differentiagleichung $\dfrac{d^2z}{dxdy} = F(z)$. *Arch. Math.*, 1881, Bd. 6, Heft 1, pp. 112–124.
11. Zhiber A.V., Ibragimov N.Kh., Shabat A.B. Uravneniya Kleina—Gordona s netrivial'noi gruppoi [Klein—Gordon equations with nontrivial group]. *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, 1979, Vol. 247, No. 5, pp. 1103–1107 (in Russian).
12. Zhiber A.V., Ibragimov N.H., Shabat A.B. Uravneniya tipa Liuvillya [Equations of Liouville type]. *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, 1979, Vol. 249, No. 1, pp. 26–29 (in Russian).
13. Mikhailov A.V., Shabat A.B., Yamilov R.I. The symmetry approach to the classification of non-linear equations. Complete lists of integrable systems. *Russian Math. Surveys*, 1987, Vol. 42, No. 4, pp. 1–63.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 4.

14. Zhiber A.V., Sokolov V.V. Tochno integriruemye giperbolicheskie uravneniya liuvillevskogo tipa [Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type]. *Uspekhi Mat. Nauk*, 2001, Vol. 56, No. 1, pp. 63–106 (in Russian).