СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год
Том 25, №4(92)
Октябрь - декабрь 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2022. Т. 25, № 4. С. 107–115

УДК 539.3:517.958

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЕЙ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ

© 2022 Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mail: o.n.i@ngs.ru

Поступила в редакцию 16.06.2022 г.; после доработки 18.08.2022 г.; принята к публикации 29.09.2022 г.

Доказана единственность решения граничных задач статических уравнений теории упругости для упругих по Коши материалов с несимметричной матрицей модулей упругости и с симметричной, но необязательно положительно определённой. С использованием собственных состояний (базисов) линейная связь напряжений и деформаций записана в инвариантной форме. Возможны разные варианты записи определяющих соотношений, в том числе с помощью симметричных матриц. Удельная энергия деформации для всех вариантов имеет канонический вид положительно определённой квадратичной формы.

Ключевые слова: упругость по Коши, собственные модули, собственный базис, граничные задачи, единственность решения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.409

В линейной теории упругости симметричный тензор напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и симметричный тензор деформаций $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} = (\partial_k u_l + \partial_l u_k)/2$ связаны взаимно обратными линейными соотношениями

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl}. \tag{1}$$

Здесь и далее используется декартова прямоугольная система координат x_i, $i = 1, 2, 3$; повторяющиеся индексы означают суммирование по допустимым значениям индексов; ∂_k — производные по координате x_k; u_l — компоненты вектора смещения. Постоянные тензоры четвёртого ранга в (1) имеют симметрию индексов

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk}, \quad a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk} \tag{2}$$

и не зависят от координат x_i точек тела. Для симметричных по двум индексам тензоров (1), (2) будем использовать формулы перехода от двух индексов к одному (переобозначение компонент тензоров):

$$\begin{gathered} \sigma_{11} = \sigma_1, \quad \sigma_{22} = \sigma_2, \quad \sigma_{33} = \sigma_3, \\ \sqrt{2}\,\sigma_{23} = \sqrt{2}\,\sigma_{32} = \sigma_4, \quad \sqrt{2}\,\sigma_{13} = \sqrt{2}\,\sigma_{31} = \sigma_5, \quad \sqrt{2}\,\sigma_{12} = \sqrt{2}\,\sigma_{21} = \sigma_6. \end{gathered} \tag{3}$$

С учётом (3) формулы (1) принимают вид

$$\sigma_i = A_{ij}\varepsilon_j, \quad \varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j, \quad i, j = \overline{1, 6}, \quad \sigma = A\varepsilon, \quad \varepsilon = A^{-1}\sigma, \quad a = A^{-1}. \tag{4}$$

В классическом случае гиперупругости или упругости по Грину [1, 2] матрицы A и $a = A^{-1}$ симметрические: $A_{ij} = A_{ji}$, $a_{ij} = a_{ji}$ и содержат в общем случае 21 независимую компоненту.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект № 2.3.1.3.1).

В случае упругости по Коши [1, 2] матрицы A и $a = A^{-1}$ несимметричные: $A_{ij} \neq A_{ji}$, $a_{ij} \neq a_{ji}$ или тензоры (2) не обладают главной симметрией: $A_{ijkl} \neq A_{klij}$, $a_{ijkl} \neq a_{klij}$. В общем случае они имеют 36 независимых компонент. В [3] приведён общий вид матриц (тензоров) A анизотропии для всех классов кристаллографических симметрий. Несимметричные матрицы (тензоры) A, $a = A^{-1}$ входят в определяющие уравнения наследственной упругости или вязкоупругости [4, 5] и фотоупругости [6], получаются при вычислении эффективных постоянных упругости перфорированных пластин [7, 8]. Некоторые двумерные краевые задачи с использованием несимметричной матрицы A решены в работах [9–11].

Общий вид матрицы A трансверсально-изотропной упругой по Коши среды (ось симметрии x_3) следующий [3, 12, 13]:

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} - B_{31} & 0 & 0 & -B_{61} \\ C_{21} & C_{11} & C_{31} - B_{31} & 0 & 0 & B_{61} \\ C_{31} + B_{31} & C_{31} + B_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & -B_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{54} & C_{44} & 0 \\ B_{61} & -B_{61} & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{21} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $C_{ij} = C_{ji}$ — симметричная часть, а $B_{ij} = -B_{ji}$ — кососимметричная часть матрицы A. Частные случаи матрицы (5) используются, например, в работах [3, 5, 9–11, 14–17]. В работах [9, 10, 14, 16, 17] и некоторых других упругие по Коши среды с несимметричной матрицей (тензором) модулей упругости $A \neq A'$ (штрих означает транспонирование матрицы) названы асимметричной моделью упругости.

Так как $A \neq A'$, то кроме (1), (4) возможен другой вариант записи определяющих соотношений с матрицей (тензором) A':

$$\sigma_{ij} = A_{klij}\varepsilon_{kl}, \quad \sigma_i = A_{ji}\varepsilon_j, \quad \sigma = A'\varepsilon. \tag{6}$$

Учитывая, что $A = C + B$, $C' = C$, $B' = -B$ и $A' = C - B$, получим, что записи (1), (4) и (6) отличаются только изменением знака у компонент кососимметричной матрицы B.

Невырожденная матрица A_{ij} может быть представлена в виде [3]

$$A = T\Lambda F', \quad A' = F\Lambda T', \tag{7}$$

где $F = [f_{ip}]$, $T = [t_{ip}]$ — ортогональные матрицы, т. е. $F'F = E$, $T'T = E$ (E — единичная матрица); $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$, $\lambda_i > 0$, — диагональная матрица. Величины λ_i являются собственными модулями, которые могут быть и кратными, а матрицы t_{ip}, f_{ip} — собственными состояниями. Каждый столбец этих матриц в силу (3) соответствует симметричному тензору второго ранга. С учётом (7) перепишем определяющие соотношения (4), (6):

$$\sigma = T\Lambda F'\varepsilon, \quad T'\sigma = \Lambda F'\varepsilon, \quad \tilde{\sigma} = \Lambda\tilde{\varepsilon}, \tag{8}$$

$$\sigma = F\Lambda T'\varepsilon, \quad F'\sigma = \Lambda T'\varepsilon, \quad \tilde{\sigma} = \Lambda\tilde{\varepsilon}. \tag{9}$$

Формулы (8) соответствуют матрице A, а формулы (9) соответствуют матрице A', где соответственно обозначили $\tilde{\sigma} = T'\sigma$, $\tilde{\varepsilon} = F'\varepsilon$ и $\tilde{\sigma} = F'\sigma$, $\tilde{\varepsilon} = T'\varepsilon$. Таким образом, формулы (8), (9) получаются друг из друга заменой матрицы F на матрицу T и наоборот.

Последние выражения (8), (9) представляют собой шесть отдельных независимых равенств

$$\tilde{\sigma}_1 = \lambda_1\tilde{\varepsilon}_1, \quad \tilde{\sigma}_2 = \lambda_2\tilde{\varepsilon}_2, \quad \tilde{\sigma}_3 = \lambda_3\tilde{\varepsilon}_3, \quad \tilde{\sigma}_4 = \lambda_4\tilde{\varepsilon}_4, \quad \tilde{\sigma}_5 = \lambda_5\tilde{\varepsilon}_5, \quad \tilde{\sigma}_6 = \lambda_6\tilde{\varepsilon}_6, \tag{10}$$

которые являются инвариантной записью обобщённого закона Гука (4) или (6). В соответствии с (10) удельная энергия деформации записывается в каноническом виде

$$2\Phi = \tilde{\sigma}_p\tilde{\varepsilon}_p = \lambda_p\tilde{\varepsilon}_p^2 = \lambda_1\tilde{\varepsilon}_1^2 + \lambda_2\tilde{\varepsilon}_2^2 + \lambda_3\tilde{\varepsilon}_3^2 + \lambda_4\tilde{\varepsilon}_4^2 + \lambda_5\tilde{\varepsilon}_5^2 + \lambda_6\tilde{\varepsilon}_6^2, \quad \lambda_p > 0, \quad p = \overline{1, 6}, \tag{11}$$

положительно определённой квадратичной формы. Единая запись (11) для матриц (7) с учётом выражений для деформаций $\tilde{\varepsilon}_p$ принимает вид $2\Phi = \lambda_p(f_{ip}\varepsilon_i)^2$ или $2\Phi = \lambda_p(t_{ip}\varepsilon_i)^2$. Из последних выражений видно, что удельные энергии деформации для случаев матриц A и A' могут отличаться, так как меняются собственные состояния (базисы) f_{ip} и t_{ip} в пространствах деформаций, как и напряжений.

Определяющие соотношения (8), (9) можно записать с использованием симметричных матриц. Из (8), (9) получаем

$$\begin{gathered} \sigma = A\varepsilon = T\Lambda F'\varepsilon, \quad T'\sigma = T'A\varepsilon = \Lambda F'\varepsilon, \quad FT'\sigma = FT'A\varepsilon = F\Lambda F'\varepsilon, \quad \sigma^{(1)*} = S^{(1)}\varepsilon, \\ \sigma = A'\varepsilon = F\Lambda T'\varepsilon, \quad F'\sigma = F'A'\varepsilon = \Lambda T'\varepsilon, \quad TF'\sigma = TF'A'\varepsilon = T\Lambda T'\varepsilon, \quad \sigma^{(2)*} = S^{(2)}\varepsilon, \end{gathered} \tag{12}$$

где обозначили

$$\sigma^{(1)*} = FT'\sigma, \quad \sigma^{(2)*} = TF'\sigma, \quad S^{(1)} = F\Lambda F' = FT'A, \quad S^{(2)} = T\Lambda T' = TF'A'. \tag{13}$$

Как видно из (13), матрицы $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ являются симметричными положительно определёнными матрицами. Напряжения $\sigma^{(1)*}$, $\sigma^{(2)*}$ в (12) с учётом (13) в индексной записи имеют вид

$$\sigma_{ij}^{(1)*} = f_{ijpq}t_{klpq}\sigma_{kl} = f_{ijpq}\tilde{\sigma}_{pq}^{(1)}, \quad \sigma_{ij}^{(2)*} = t_{ijpq}f_{klpq}\sigma_{kl} = t_{ijpq}\tilde{\sigma}_{pq}^{(2)}, \tag{14}$$

где

$$\tilde{\sigma}_{pq}^{(1)} = t_{klpq}\sigma_{kl}, \quad \sigma_{kl} = t_{klpq}\tilde{\sigma}_{pq}^{(1)}, \quad \tilde{\sigma}_{pq}^{(2)} = f_{klpq}\sigma_{kl}, \quad \sigma_{kl} = f_{klpq}\tilde{\sigma}_{pq}^{(2)}. \tag{15}$$

Для определяющих соотношений (12) удельная энергия деформации с учётом (13)–(15) совпадает с выражением (11):

$$\begin{gathered} 2\Phi = \sigma_{ij}^{(1)*}\varepsilon_{ij} = f_{ijpq}t_{klpq}\sigma_{kl}\varepsilon_{ij} = \tilde{\sigma}_p^{(1)}\tilde{\varepsilon}_p = \lambda_p\tilde{\varepsilon}_p^2, \\ 2\Phi = \sigma_{ij}^{(2)*}\varepsilon_{ij} = t_{ijpq}f_{klpq}\sigma_{kl}\varepsilon_{ij} = \tilde{\sigma}_p^{(2)}\tilde{\varepsilon}_p = \lambda_p\tilde{\varepsilon}_p^2. \end{gathered} \tag{16}$$

Подставляя матрицы $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ из (13) в (16), получим выражения

$$\begin{gathered} 2\Phi^{(1)} = S_{ijkl}^{(1)}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} = f_{ijpq}\lambda_{pqrs}f_{klrs}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} = \lambda_p(f_{ip}\varepsilon_i)^2, \quad (pq) = (rs), \\ 2\Phi^{(2)} = S_{ijkl}^{(2)}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} = t_{ijpq}\lambda_{pqrs}t_{klrs}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} = \lambda_p(t_{ip}\varepsilon_i)^2, \end{gathered} \tag{17}$$

уже приведённые выше. Очевидно, все формы записи (4), (6), (8), (9), (10), (12) обобщённого закона Гука являются эквивалентными. Для этих вариантов выражение удельной энергии деформации также имеет одинаковый вид (11), (16), (17).

В упругом теле, имеющем объём V и поверхность тела $S = S_\sigma + S_u$, составленную из двух частей, выполняются уравнения равновесия [1] (F_i — компоненты объёмных сил)

$$\partial_j\sigma_{ij} + F_i = 0, \tag{18}$$

обобщённый закон Гука (1)

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl} = A_{ijkl}\partial_k u_l, \tag{19}$$

где матрица A (или тензор A_{ijkl}) необязательно симметричная. На поверхности тела могут быть заданы граничные условия в напряжениях

$$\sigma_{ij}n_j = p_i, \quad x_i \in S_\sigma, \tag{20}$$

и в смещениях

$$u_i = g_i, \quad x_i \in S_u. \tag{21}$$

Здесь n_j — компоненты единичной внешней нормали к поверхности S; p_i, g_i — заданные функции на границе тела. Предполагается, что поверхность S и заданные функции имеют необходимые свойства гладкости. Граничные условия (20) или (21) могут быть заданы по отдельности на всей поверхности S (см. [1, 18, 19]).

Если напряжения (19) подставить в уравнения равновесия (18) и граничные условия (20), то получим уравнения в смещениях

$$A_{ijkl}\partial_{jk}u_l + F_i = 0 \tag{22}$$

и граничные условия

$$A_{ijkl}n_j\partial_k u_l = p_i, \quad x_i \in S_\sigma. \tag{23}$$

Для классического случая с симметричной матрицей $A = A'$ доказательство единственности решения основных граничных задач (18)–(23) известно достаточно давно [1, 18–20]. Возникает необходимость доказать единственность решения граничных задач (18)–(23) для случая упругости по Коши, т. е. когда $A \neq A'$ или $A_{ijkl} \neq A_{klij}$.

Умножим уравнения (18) на u_i и проинтегрируем по объёму тела:

$$\int\limits_V u_i\partial_j\sigma_{ij}\,dV + \int\limits_V u_iF_i\,dV = 0. \tag{24}$$

Имеет место соотношение $u_i\partial_j\sigma_{ij} = \partial_j(u_i\sigma_{ij}) - (\partial_j u_i)\sigma_{ij}$, с помощью которого преобразуем (24):

$$\int\limits_V [\partial_j(u_i\sigma_{ij}) - (\partial_j u_i)\sigma_{ij}]\,dV + \int\limits_V u_iF_i\,dV = 0,$$

$$\int\limits_V \partial_j(u_i\sigma_{ij})\,dV + \int\limits_V u_iF_i\,dV = \int\limits_V \sigma_{ij}(\partial_j u_i)\,dV,$$

$$\int\limits_S u_i\sigma_{ij}n_j\,dS + \int\limits_V u_iF_i\,dV = \int\limits_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dV;$$

$$\int\limits_S u_ip_i dS + \int\limits_V u_iF_i\,dV = \int\limits_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dV. \tag{25}$$

При получении (25) использовали формулу (20), симметрию тензора напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и формулу Гаусса — Остроградского преобразования объёмного интеграла в поверхностный. Соотношение (25) соответствует обычной теореме Клайперона (см. [1, 18]).

Если имеет место упругость по Коши, то тогда

$$A_{ijkl} = C_{ijkl} + B_{ijkl}, \quad A = C + B, \quad C_{klij} = C_{ijkl}, \quad B_{klij} = -B_{ijkl}. \tag{26}$$

При этом с учётом (26) выражение $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ принимает вид [3]

$$2\Phi^{(s)} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = (C_{ijkl} + B_{ijkl})\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = C_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j \tag{27}$$

и не зависит от кососимметричной части $B' = -B$.

Пусть имеем два решения $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$ удовлетворяющих уравнениям (18)–(23), тогда разности $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}$ удовлетворяют однородным уравнениям (18)–(23) и из (25), (27) следует

$$2\int\limits_V \Phi^{(s)}dV = \int\limits_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dV = \int\limits_V C_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j\,dV = 0. \tag{28}$$

Интеграл (28) для разности решений равняется нулю, но выражение (27) не является удельной энергией деформации и не должно быть положительно определённой квадратичной формой [3], и нельзя сказать, что оно равно нулю во всех точках области V.

В нашем случае удельная энергия деформации имеет вид (см. (11), (16), (17))

$$2\Phi = \sigma^*_{ij}\varepsilon_{ij} = \lambda_p(f_{ip}\varepsilon_i)^2 = \lambda_{pq}(f_{ip}\varepsilon_i)(f_{jq}\varepsilon_j), \quad p = q, \tag{29}$$

или

$$2\Phi = \sigma^*_{ij}\varepsilon_{ij} = \lambda_p(t_{jp}\varepsilon_j)^2 = \lambda_{pq}(t_{ip}\varepsilon_i)(t_{jq}\varepsilon_j), \quad p = q, \tag{30}$$

и является положительно определённой квадратичной формой. Тогда интегралы вида (28) не отрицательны

$$\int\limits_V \sigma^*_{ij}\varepsilon_{ij}\,dV = \int\limits_V \lambda_p(f_{ip}\varepsilon_i)^2\,dV \geqslant 0, \quad \int\limits_V \sigma^*_{ij}\varepsilon_{ij}\,dV = \int\limits_V \lambda_p(t_{jp}\varepsilon_j)^2\,dV \geqslant 0.$$

Перепишем выражение (27):

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} = A_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j = t_{ip}\lambda_{pq}f_{jq}\varepsilon_i\varepsilon_j = \lambda_{pq}(t_{ip}\varepsilon_i)(f_{jq}\varepsilon_j), \quad p = q. \tag{31}$$

Выражение (31) одинаково для матриц A и A' и является полярой (билинейной формой) для квадратичных форм (29), (30) (см. [21]). Билинейную форму (31) можно выразить через квадратичные формы (29), (30):

$$\lambda_{pq}(t_{ip}\varepsilon_i)(f_{jq}\varepsilon_j) = \frac{1}{2}[\lambda_{pq}(t_{ip}\varepsilon_i + f_{ip}\varepsilon_i)(t_{jq}\varepsilon_j + f_{jq}\varepsilon_j) - \lambda_{pq}(t_{ip}\varepsilon_i)(t_{jq}\varepsilon_j) - \lambda_{pq}(f_{ip}\varepsilon_i)(f_{jq}\varepsilon_j)].$$

С учётом (31) записываем интеграл (28) для разности двух решений:

$$0 = \int\limits_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dV = \int\limits_V \lambda_{pq}(t_{ip}\varepsilon_i)(f_{jq}\varepsilon_j)\,dV, \quad p = q. \tag{32}$$

Выражение (32) является полярной билинейной формой для квадратичных форм (см. [21])

$$\int\limits_V \sigma^*_{ij}\varepsilon_{ij}\,dV = \int\limits_V \lambda_{pq}(f_{ip}\varepsilon_i)(f_{jq}\varepsilon_j)\,dV, \quad \int\limits_V \sigma^*_{ij}\varepsilon_{ij}\,dV = \int\limits_V \lambda_{pq}(t_{ip}\varepsilon_i)(t_{jq}\varepsilon_j)\,dV. \tag{33}$$

Очевидно, формы (33) положительно определённые и записаны в каноническом виде.

Так как билинейная форма (32) симметрична, то её левое и правое нулевые подпространства совпадают и нульмерны в силу невырожденности квадратичных форм (33). Нулевое подпространство квадратичных форм (33) равно нулевому подпространству её полярной билинейной формы (32) (см. [21]). Тогда из (32) следует, что почти всюду

$$t_{ip}\varepsilon_i = \tilde{\varepsilon}_p = 0, \quad f_{jq}\varepsilon_j = \tilde{\varepsilon}_q = 0 \tag{34}$$

во всём объёме V, при этом равны нулю и интегралы (33) (квадратичные формы). Из (34) находим

$$\varepsilon_i = t_{ip}\tilde{\varepsilon}_p = 0, \quad \varepsilon_j = f_{jq}\tilde{\varepsilon}_q = 0. \tag{35}$$

Далее, с учётом (10), (34), (15) получаем, что

$$\sigma_i = t_{ip}\tilde{\sigma}_p = 0, \quad \sigma_j = f_{jq}\tilde{\sigma}_q = 0. \tag{36}$$

Деформации (35) и напряжения (36), соответствующие разности двух решений, равны нулю, т. е. решение граничных задач (18)–(23) единственно. В общем случае решения могут отличаться только на множестве меры нуль. При нулевых деформациях (35) смещения могут различаться только на смещения и инфинитезимальные повороты тела как жёсткого целого (см. [1, 18–20]) в окрестности точки x_0:

$$u_i(x) = u_i(x_0) + \omega_{ij}(x_0)(x_j - x_{j0}), \quad \omega_{ji} + \omega_{ij} = 0.$$

В классическом случае $A = C$, т. е. $B = 0$ (см. (26)), и считается, что квадратичная форма (27) положительно определённая и тогда имеет место единственность решения граничных задач (18)–(23) (см. [1, 18–20]). Если $A = A'$ и нет положительной определённости квадратичной формы (27), тогда всё равно имеют место представление (7) $A = T\Lambda F'$ с $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,6}$, (см. [3, 22]) и все последующие формулы. При этом приведённое выше доказательство единственности решения граничных задач (18)–(23) сохраняется и в данном случае.

Таким образом, граничные задачи для статических уравнений упругих по Коши материалов с несимметричной матрицей модулей упругости, как и с симметричной, но необязательно положительно определённой, могут иметь единственное решение. Доказательство существования решения граничных задач является в общем случае трудной математической задачей (см. [1, 18]). В конкретных задачах решение должно строиться непосредственно.

Статья написана по предложению академика РАН Б. Д. Аннина. Автор благодарит Б. Д. Аннина и Р. И. Угрюмова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хан Х.* Теория упругости. Основы линейной теории и её применения. М.: Мир, 1988.
2. *Чёрных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988.
3. *Остросаблин Н.И.* Классы симметрии тензоров анизотропии квазиупругих материалов и обобщение подхода Кельвина // Прикл. механика и техн. физика. 2017. Т. 58, № 3. С. 108–129.
4. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твёрдых тел. М.: Наука, 1977.
5. *Rogers T.G., Pipkin A.C.* Asymmetric relaxtion and compliance matrices in linear viscoelasticity // Z. Angew. Math. Phys. 1963. Bd. 14, H. 4. S. 334–343.
6. *Желудев И.С.* Симметрия и её приложения. М.: Атомиздат, 1976.
7. *Мокряков В.В.* Исследование зависимости эффективных податливостей плоскости с решёткой круговых отверстий от параметров решётки // Вычисл. механика сплошных сред. 2010. Т. 3, № 3. С. 90–101.
8. *Лаврентьев С.Ю., Мокряков В.В., Ченцов А.В.* Эффективные упругие модули перфорированных пластин, содержащих прямоугольную решётку круглых отверстий // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 2021. № 3. С. 7–12.
9. *Бытев В.О., Слезко И.В., Николаев Д.Е.* Точные решения некоторых задач плоской асимметричной теории упругости // Вестн. Тюмен. гос. ун-та. 2007. № 5. С. 32–43.
10. *Бытев В.О., Слезко И.В.* Решение задач асимметричной упругости // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. 2008. № 6. С. 238–243.
11. *Остросаблин Н.И.* Общее решение двумерной системы статических уравнений Ламе линейной упругости с несимметричной матрицей модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 1. С. 61–71.
12. *Андреев В.К., Бублик В.В., Бытев В.О.* Симметрии неклассических моделей гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2003.
13. *Podio-Guidugli P., Virga E.G.* Transversely isotropic elasticity tensors // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1987. V. 411, N 1840. P. 85–93.
14. *Бельмецев Н.Ф., Чиркунов Ю.А.* Точные решения уравнений динамической асимметричной модели теории упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 38–50.

15. *Geymonat G., Gilormini P.* On the existence of longitudinal plane waves in general elastic anisotropic media // J. Elasticity. 1999. V. 54, N 3. P. 253–266.

16. *Слезко И.В.* Моделирование некоторых процессов асимметричной упругости: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тюмень: Тюмен. гос. ун-т, 2009.

17. *Бельмецев Н.Ф.* Построение и исследование подмоделей асимметричной и трансверсально-изотропной моделей упругих сред: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2020.

18. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1979.

19. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.

20. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

21. *Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.

22. *Годунов С.К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.3:517.958

UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF STATIC EQUATIONS OF ELASTICITY THEORY WITH AN ASYMMETRIC MATRIX OF ELASTIC MODULES

© 2022 N. I. Ostrosablin[a]

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: o.n.i@ngs.ru

Received 16.06.2022, revised 18.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. The uniqueness of the solution of boundary value problems of static equations of elasticity theory for Cauchy elastic materials with an asymmetric matrix of elastic modules and with a symmetric matrix, but not necessarily positive definite, is proved. Using eigenstates (bases), the linear relationship of stresses and deformations is written in an invariant form. There are different ways of writing defining relations, including using symmetric matrices. The specific strain energy for all variants has the canonical form of a positive definite quadratic form.

Keywords: Cauchy elasticity, proper modules, proper basis, boundary value problems, uniqueness of the solution.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.409

REFERENCES

1. Khan Kh. Teoriya uprugosti. Osnovy lineinoi teorii i ee primeneniya [Theory of elasticity. Fundamentals of linear theory and its applications]. Moscow: Mir, 1988 (in Russian).
2. Chernykh K.F. Vvedenie v anizotropnuyu uprugost' [Introduction to anisotropic elasticity] Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
3. Ostrosablin N.I. Klassy simmetrii tenzorov anizotropii kvaziuprugikh materialov i obobshchenie podkhoda Kel'vina [Symmetry classes of anisotropy tensors of quasi-elastic materials and a generalization of the Kelvin approach]. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fizika*, 2017, Vol. 58, No. 3, pp. 108–129 (in Russian).
4. Rabotnov Yu.N. Elementy nasledstvennoi mekhaniki tverdykh tel [Elements of hereditary mechanics of solids.]. Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
5. Rogers T.G., Pipkin A.C. Asymmetric relaxtion and compliance matrices in linear viscoelasticity. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1963, Bd. 14, H. 4, s. 334–343.
6. Zheludev I.S. Simmetriya i ee prilozheniya [Symmetry and its applications]. Moscow: Atomizdat, 1976 (in Russian).
7. Mokryakov V.V. Issledovanie zavisimosti effektivnykh podatlivostei ploskosti s reshetkoi krugovykh otverstii ot parametrov reshetki [Investigation of the dependence of the effective compliance of a plane with a lattice of circular holes on the lattice parameters]. *Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred*, 2010, Vol. 3, No. 3 pp. 90–101 (in Russian).
8. Lavrent'ev S.Yu., Mokryakov V.V., Chentsov A.V. Effektivnye uprugie moduli perforirovannykh plastin, soderzhashchikh pryamougol'nuyu reshetku kruglykh otverstii [Effective elastic modules of perforated plates containing a rectangular grid of round holes]. *Izv. RAN. Mekh. Tverdogo Tela*, 2021, No. 3, pp. 7–12 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 4.

9. Bytev V.O., Slezko I.V., Nikolaev D.E. Tochnye resheniya nekotorykh zadach ploskoi asimmetrichnoi teorii uprugosti [Exact solutions of some problems of the plane asymmetric theory of elasticity]. *Vestn. Tyumen. Gos. Univ.*, 2007, No. 5, pp. 32–43 (in Russian).
10. Bytev V.O., Slezko I.V. Reshenie zadach asimmetrichnoi uprugosti [Solving problems of asymmetric elasticity]. *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauch. ser.*, 2008, No. 6, pp. 238–243 (in Russian).
11. Ostrosablin N.I. Obshchee reshenie dvumernoi sistemy staticheskikh uravnenii Lame lineinoi uprugosti s nesimmetrichnoi matritsei modulei uprugosti [General solution of a two-dimensional system of static Lame equations of linear elasticity with an asymmetric matrix of elastic modulus]. *Siber. Zhurn. Indust. Mat.*, 2018, Vol. 21, No. 1, pp. 61–71 (in Russian).
12. Andreev V.K., Bublik V.V., Bytev V.O. Simmetrii neklassicheskikh modelei gidrodinamiki [Symmetries of non-classical models of hydrodynamics]. Novosibirsk: Nauka, 2003.
13. Podio-Guidugli P., Virga E.G. Transversely isotropic elasticity tensors. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, 1987, Vol. 411, No. 1840, pp. 85–93 (in Russian).
14. Bel'metsev N.F., Chirkunov Yu.A. Tochnye resheniya uravnenii dinamicheskoi asimmetrichnoi modeli teorii uprugosti [Exact solutions of the equations of the dynamic asymmetric model of elasticity theory]. *Siber. Zhurn. Indust. Mat.*, 2012, Vol. 15, No. 4, pp. 38–50 (in Russian).
15. Geymonat G., Gilormini P. On the existence of longitudinal plane waves in general elastic anisotropic media. *J. Elasticity*, 1999, Vol. 54, No. 3, pp. 253–266.
16. Slezko I.V. Modelirovanie nekotorykh protsessov asimmetrichnoi uprugosti: Avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk [Modeling of some processes of asymmetric elasticity: Thes. dis. ... cand. phys. math. sci.]. Tyumen: Tyumen Gos. Univ., 2009 (in Russian).
17. Bel'metsev N.F. Postroenie i issledovanie podmodelei asimmetrichnoi i transversal'no-izotropnoi modelei uprugikh sred: Avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk [Construction and investigation of submodels of asymmetric and transversally isotropic models of elastic media: Thes. diss. ... cand. phys. math. sci.]. Novosibirsk: IM SB RAS, 2020 (in Russian).
18. Rabotnov Yu.N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of a deformable solid]. Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
19. Novatskii V. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow: Mir, 1975 (in Russian).
20. Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
21. Efimov N.V., Rozendorn E.R. Lineinaya algebra i mnogomernaya geometriya [Linear algebra and multidimensional geometry]. Moscow: Nauka, 1970 (in Russian).
22. Godunov S.K. Elementy mekhaniki sploshnoi sredy [Elements of continuum mechanics]. Moscow: Nauka, 1978.