СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год
Том 25, №4(92)
Октябрь - декабрь 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 519.71

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ДОЛГОСРОЧНОГО ТРЕКИНГА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ПРОЦЕССА ОРНШТЕЙНА — УЛЕНБЕКА

© 2022 Е. С. Паламарчук[1,2]

[1]*Центральный экономико-математический институт РАН,*
Нахимовский просп., 47, г. Москва 117418, Россия
[2]*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,*
Покровский бульвар, 11, г. Москва 109028, Россия

E-mail: e.palamarchuck@gmail.com

Поступила в редакцию 11.04.2022 г.; после доработки 16.06.2022 г.;
принята к публикации 22.06.2022 г.

Рассматривается задача оптимального трекинга траектории, задаваемой экспоненциальным процессом Орнштейна — Уленбека. Линейная система управления с квадратичным целевым функционалом, содержащем дисконтирование, путём замены переменных сводится к линейной неоднородной системе со случайными коэффициентами. Для построенной системы находится вид стратегии, оптимальной на бесконечном интервале времени. Полученные результаты применяются для определения оптимального управления в задаче трекинга с критериями долгосрочных потерь на единицу накопленного дисконта.

Ключевые слова: стохастический линейный регулятор, трекинг, экспоненциальный процесс Орнштейна — Уленбека, дисконтирование.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.410

ВВЕДЕНИЕ

Задачи трекинга являются важным приложением теории линейно-квадратического управления (см., например, монографии [1, разд. 4; 2, разд. 3]). Трекинг означает управление с целью поддержания состояния линейной системы вблизи заданного уровня на всём интервале планирования. При этом издержки, возникающие из-за отклонений, а также затраты по управлению учитываются в интегральном квадратичном целевом функционале, который также может содержать дисконтирование. В стандартных случаях плановые уровни предполагаются постоянными или генерируемыми другой детерминированной системой. Однако в различных приложениях, например в финансовых (см. [3]) или инженерных (см. [2, разд. 3]), возникает необходимость в отслеживании показателей с заранее неизвестной будущей динамикой, моделируемой при помощи случайного процесса. Тогда соответствующая система управления будет содержать случайные коэффициенты. В данной работе в качестве «эталонной» траектории для приближения рассматривается экспоненциальный процесс Орнштейна — Уленбека η_t, $t \geqslant 0$, заданный, как и все вводимые далее процессы, на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$.

Определение 1. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$, — стандартный процесс Орнштейна — Уленбека, удовлетворяющий уравнению $d\xi_t = -\alpha\xi_t\,dt + \sigma d\overline{w}_t$, $\xi_0 = 0$, где $\alpha > 0$, $\sigma \neq 0$ — известные константы; $\overline{w}_t$, $t \geqslant 0$, — одномерный винеровский процесс. Тогда экспоненциальный процесс Орнштейна — Уленбека (ЭкспОУ) определяется как $\eta_t = e^{\xi_t}$.

Работа выполнена в рамках НИР «Развитие теории и компьютерно-математического инструментария для исследования социально-экономических процессов» (проект АААА-А21-121012090157-9).

При каждом $t \geqslant 0$ случайная величина η_t имеет логнормальное распределение с параметрами
$$E\eta_t = \exp\{(4\alpha)^{-1}\sigma^2(1-e^{-2\alpha t})\}, \quad E\eta_t^2 = \exp\{(\alpha)^{-1}\sigma^2(1-e^{-2\alpha t})\}.$$
Такой тип распределения, наряду со свойством неотрицательности значений и эргодичностью, мотивирует использование ЭкспОУ (и его дискретного аналога) в различных приложениях — финансово-экономических [4, 5], химико-биологических [6, 7], физических [9] и инженерных системах [10]. В связи с этим изучение задачи трекинга ЭкспОУ представляется достаточно актуальным. Возможное увеличение горизонта планирования T ставит вопрос о долгосрочном отслеживании состояния, что приводит к постановке задачи управления на бесконечном интервале времени. Одной из сложностей здесь оказывается нелинейное изменение целевых функционалов относительно T, что требует перехода к соответствующим нормированным значениям (по типу «долговременных средних»). Другая особенность заключается в присутствии дисконтирующей функции и применении процедуры замены переменных для перехода к системе управления с функционалом стандартного вида (см. [11]). В третьих, наличие случайных коэффициентов приводит к необходимости в изучении обратных стохастических дифференциальных уравнений по аналогии с анализом при конечном горизонте [12].

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предполагается, что состояние системы описывает управляемый случайный процесс $\widetilde{X}_t$, $t \geqslant 0$, с динамикой
$$d\widetilde{X}_t = a\widetilde{X}_t\,dt + b\widetilde{U}_t\,dt + GdW_t, \quad \widetilde{X}_0 = \tilde{x}, \tag{1}$$
где $a, b \neq 0$, G — известные константы; $\tilde{x}$ — неслучайное начальное состояние; W_t, $t \geqslant 0$, — стандартный одномерный винеровский процесс, при этом W_t и процесс $\overline{w}_t$ из определения 1 предполагаются независимыми, $t \geqslant 0$; $\widetilde{U}_t$, $t \geqslant 0$, — допустимое управление, т. е. случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, $\mathcal{F}_t = \bar{\sigma}\{\overline{w}_s, W_s, s \leqslant t\}$, такой что уравнение (1) имеет решение ($\bar{\sigma}(\cdot)$ — знак σ-алгебры). Обозначим через $\mathcal{U}$ — множество допустимых управлений.

Целевой функционал на $[0, T]$ имеет вид
$$J_T^{(d)}(\widetilde{U}) = \int\limits_0^T f_t[q(\widetilde{X}_t - c_\eta\eta_t)^2 + r\widetilde{U}_t^2]\,dt, \tag{2}$$
где $q, r, c_\eta > 0$ — константы; $\widetilde{U} \in \mathcal{U}$; $T > 0$ — длина горизонта планирования; траектория η_t задаётся в определении 1; $f_t > 0$ — мотононная дисконтирующая функция, учитывающая приоритет потерь, относящихся к разным моментам времени. Возможны случаи постоянной f_t, убывающей $f_t \to 0$ или же $f_t \to \infty$, $t \to \infty$. Более подробно требования к свойствам f_t формулируются в следующем предположении.

Предположение 1. Дисконтирующая функция f_t является монотонной, дифференцируемой, $f_0 = 1$. При этом ставка дисконтирования $\phi_t = -\dot{f}_t/f_t$ является ограниченной функцией, $t \geqslant 0$, и $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_t = c_\phi$, где $c_\phi \leqslant 0$ — некоторая константа; $\dot{f}_t$ — производная функции f по времени.

В частности, предположению 1 удовлетворяют экспоненциальная дисконтирующая функция $f_t = e^{-\delta t}$, $\delta > 0$, и степенная $f_t = (1+t)^\theta$ (θ — вещественное число), используемая в экономических (обычно при $\theta < 0$, см. [13]) и инженерных (при $\theta > 0$, см. [14]) приложениях.

В (2) и далее соотношения в виде равенств и неравенств понимаются в смысле почти наверное, т. е. справедливы с вероятностью 1 (в случае отсутствия оператора математического ожидания).

Задача долгосрочного трекинга заключается в определении управления, которое при $T \to \infty$ обеспечит наименьший рост функционала (2) в том или ином вероятностном смысле.

Обычно рассматривается минимизация ожидаемых значений, а также более сильное свойство оптимальности, почти наверное возникающее при потраекторной оптимизации:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T^{(d)}(\widetilde{U})}{\int\limits_0^T f_t\,dt} \to \inf_{\widetilde{U}\in\mathcal{U}}, \quad \limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(d)}(\widetilde{U})}{\int\limits_0^T f_t\,dt} \to \inf_{\widetilde{U}\in\mathcal{U}} \quad \text{с вероятностью 1.} \tag{3}$$

В силу эргодичности процесса η_t, $t \geqslant 0$, используется нормировка $\int\limits_0^T f_t\,dt$ в виде накопленного дисконта, применяемая ранее для трекинга с детерминированной плановой траекторией (см. [11]). Для решения указанных выше задач система (1), (2) путём замены переменных

$$X_t = \sqrt{f_t}\widetilde{X}_t, \quad U_t = \sqrt{f_t}\widetilde{U}_t \tag{4}$$

сводится к системе, являющейся частным случаем неоднородного линейного регулятора. Коэффициенты такой системы управления зависят от двумерного экспоненциального процесса Орнштейна — Уленбека $\eta_t = (\eta_{1t}, \eta_{2t})'$ (штрих — знак транспонирования), где

$$\eta_{it} = e^{\xi_{it}}, \quad d\xi_{it} = -\alpha_i\xi_{it}\,dt + \sigma_i d\overline{w}_{it}, \quad \xi_{i0} = 0,$$

коэффициенты $\alpha_i > 0$, $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 0$; $\overline{w}_{it}$, $t \geqslant 0$, — одномерный винеровский процесс, $i = 1, 2$. Динамика состояния X_t, $t \geqslant 0$, задаётся при помощи уравнения

$$dX_t = a_tX_t\,dt + bU_t\,dt + m_t\eta_{1t}\,dt + G_t dW_t, \quad X_0 = x, \tag{5}$$

где a_t, G_t — ограниченные функции времени, $b \neq 0$ — константа; x — неслучайное начальное состояние; винеровский процесс W_t и процесс $\overline{W}_t = (\overline{w}_{1t}, \overline{w}_{2t})'$ предполагаются независимыми; допустимое управление U_t определяется по аналогии с описанием в (1); здесь фильтрация $\mathcal{F}_t = \bar{\sigma}\{\overline{W}_s, W_s, s \leqslant t\}$. Целевой функционал имеет вид

$$J_T(U) = \int\limits_0^T \left(qX_t^2 + 2\overline{m}_t\eta_{2t}X_t + rU_t^2\right) dt, \tag{6}$$

где $q, r > 0$, $U \in \mathcal{U}$. Функции m_t, $\overline{m}_t$ предполагаются такими, что выполнено следующее условие.

Предположение 2. Пусть выполнено условие

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m_t^2 + \overline{m}_t^2}{\int\limits_0^t (m_s^2 + \overline{m}_s^2)\,ds} = 0. \tag{7}$$

Таким образом, согласно предположению 2, исключается экспоненциальный рост множителей при компонентах случайного процесса η_t в (5) и (6), сама же зависимость m_t (и $\overline{m}_t$) от времени может использоваться, например, при учёте эффекта сезонности (см. [7]). Также отметим, что в (5) и (6) допускается неопределённость вида ЭкспОУ как в уравнении динамики, так и в аффинной части целевого функционала. Наличие в (6) случайного коэффициента может служить отражением неопределённости, связанной с учётом линейных издержек по состоянию (см. задачу управления запасами в дискретном времени [8], где η_{2t} обусловлен колебанием цен).

Необходимо отметить, что система, получаемая из (1), (2) заменой переменных (4), оказывается частным случаем (5), (6), если положить $a_t = a - (1/2)\phi_t$, $G_t \equiv G$, $m_t \equiv 0$, $\overline{m}_t = c_\eta\sqrt{f_t}$. При этом для целевых функционалов справедливо соотношение

$$J_T^{(d)}(\widetilde{U}) = J_T(U) + qc_\eta^2 \int\limits_0^T f_t\eta_t^2\,dt,$$

а условие (7) выполняется в силу сформулированного ранее предположения 1. Вводится нормирующая функция $\Gamma_T = \int\limits_0^T (m_t^2 + \overline{m}_t^2 + G_t^2)\,dt$. Решаемые далее задачи управления на бесконечном интервале времени имеют вид

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\Gamma_T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}, \quad \limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U)}{\Gamma_T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \quad \text{с вероятностью 1.} \tag{8}$$

В работе [11] рассматривались задачи управления по типу (8) для неоднородной системы с детерминированными коэффициентами. При построении оптимальной стратегии U^* применялся подход с нахождением установившегося управления вида $U_t^* = -r^{-1}b(\Pi_t X_t^* + p_t)$, где Π_t — решение уравнение Риккати, p_t — корректирующая аффинная компонента. В следующем разделе обсуждается существование U^* уже в ситуации системы со случайными множителями из вектора η_t, $t \geqslant 0$, процесса ЭкспОУ.

2. ОПИСАНИЕ УСТАНОВИВШЕЙСЯ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ

В силу ограниченности коэффициента a_t, а также условий $b \neq 0$; q, $r > 0$, существует (см., например, [2, разд. 3.4.2]) ограниченная функция Π_t, принимающая положительные значения, удовлетворяющая уравнению Риккати

$$\dot{\Pi}_t + 2a_t\Pi_t - r^{-1}b^2\Pi_t^2 + q = 0, \tag{9}$$

и при этом функция $\Phi(t,s) = \exp\left\{\int\limits_s^t (a_v - r^{-1}b^2\Pi_v)\,dv\right\}$ допускает экспоненциальную оценку вида $|\Phi(t,s)| \leqslant \varkappa_1 e^{-\varkappa(t-s)}$, $s \leqslant t$, где $\varkappa_1, \varkappa > 0$ — некоторые константы, $|\cdot|$ — знак модуля.

При описании установившейся стратегии управления используется подход из [11], с заменой линейного дифференциального уравнения для аффинной компоненты p_t на линейное обратное стохастическое дифференциальное уравнение (ОСДУ) на бесконечном интервале времени. Далее рассматривается уравнение

$$dp_t - a_t^* p_t\,dt + \Pi_t m_t \eta_{1t}\,dt + \overline{m}_t \eta_{2t}\,dt + z_t'\,d\overline{W}_t = 0, \quad t \in [0,\infty), \tag{10}$$

где процесс $z_t = (z_{1t}, z_{2t})'$, коэффициент $a_t^* = -(a_t - r^{-1}b^2\Pi_t)$, функция Π_t удовлетворяет (9). Под решением ОСДУ (10) (см. [15]) понимается пара $\mathcal{F}_t$-согласованных, квадратично интегрируемых процессов (p_t, z_t) таких, что с вероятностью 1 справедливо представление

$$p_t = p_T - \int\limits_t^T a_s^* p_s\,ds + \int\limits_t^T z_s'd\overline{W}_s + \int\limits_t^T (\Pi_s m_s \eta_{1s}\,dt + \overline{m}_s\eta_{2s})\,ds$$

для любых $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$.

Лемма 1. *Решением уравнения* (10) *является пара процессов* (p_t, z_t), $t \geqslant 0$, *где*

$$p_t = \int\limits_t^\infty \Phi(s,t)(\Pi_s m_s \hat\eta_1(s,t) + \overline{m}_s \hat\eta_2(s,t))\,ds, \tag{11}$$

с функцией Π_t, *удовлетворяющей* (9), *и компонентами*

$$\hat\eta_i(s,t) = \gamma_i \exp\{[1 - e^{-2\alpha_i(s-t)}]\}\exp\{e^{-\alpha_i(s-t)}\xi_{it}\}$$

при $\gamma_i = \exp\left\{\left(4\alpha_i\right)^{-1}\sigma_i^2\right\}$, $i = 1, 2$, *и*

$$z_{it} = -\int\limits_t^\infty \Phi(s,t)\beta_i(s,t)\hat\eta_i(s,t)\,ds \tag{12}$$

с коэффициентами $\beta_1(s,t) = \sigma_1 \Pi_s m_s e^{-\alpha_1(s-t)}$, $\beta_2(s,t) = \sigma_2 \overline{m}_s e^{-\alpha_2(s-t)}$.

Доказательство. Рассмотрим процесс

$$p_t = \int\limits_t^\infty \Phi(s,t) E[\Pi_s m_s \eta_{1s} + \overline{m}_s \eta_{2s} | \mathcal{F}_t]\,ds,$$

где $E[\cdot|\mathcal{F}_t]$ означает взятие условного математического ожидания). Вначале отметим, что p_t определён, так как существует

$$\chi_t = \int\limits_t^\infty \Phi(s,t)(\Pi_s m_s \eta_{1s} + \overline{m}_s \eta_{2s})\,ds$$

в силу выполнения условия $E(\chi_0)^2 < \infty$ из [16, разд. 5.4, с. 97]. Точнее, из (7) при любом $\varepsilon > 0$ справедливо $\left(m_t^2 + \overline{m}_t^2\right)e^{-\varepsilon t} \to 0$, $t \to \infty$. Тогда вследствие неравенства Коши — Буняковского и того, что $E(\eta_{1t})^2 + E(\eta_{2t})^2 \leqslant \tilde c$, справедливо неравенство

$$\sqrt{E\|\chi_0\|^2} \leqslant c \int\limits_0^\infty e^{-(\varkappa - \varepsilon)s}\sqrt{E(\eta_{1s}^2 + \eta_{1s}^2)}\,ds < \infty.$$

Здесь и далее в качестве c, $\tilde c$ обозначены некоторые положительные константы, конкретные значения которых не являются существенными и могут меняться от формулы к формуле. Введём обозначения $\hat\eta_i(s,t) = E[\eta_{is}|\mathcal{F}_t]$ и для каждой компоненты найдём $E[\exp(\xi_{is})|\mathcal{F}_t]$. Процесс $\xi_{is} = e^{-\alpha_i(s-t)}\xi_{it} + \nu$, где случайная величина $\nu = \sigma_i \int\limits_t^s e^{-\alpha_i(s-v)}\,d\overline{w}_{iv}$ не зависит от $\mathcal{F}_t$ и имеет нормальное распределение с параметрами

$$E\nu = 0, \quad E\nu^2 = \sigma_i^2(2\alpha_i)^{-1}[1 - e^{-2a_i(s-t)}].$$

Учитывая логнормальность $\exp(\nu)$, получаем

$$\hat\eta_i(s,t) = \exp\left\{(4\alpha_i)^{-1}\sigma_i^2[1 - e^{(-2\alpha_i(s-t))}]\right\}\exp\left\{e^{(-\alpha_i(s-t))}\xi_{it}\right\}.$$

Отмечаем, что при этом $\hat\eta_i(t,t) = \eta_{it}$ и приходим к (11). Выражение для процесса z_t определяется при помощи дифференцирования (11) по правилам стохастического исчисления и подстановки в уравнение (10). Так как $d\hat\eta_i(s,t) = \sigma_i e^{-\alpha_i(s-t)}\hat\eta_i(s,t)\,d\overline{w}_{it}$, то после приведения подобных слагаемых получаем, что p_t удовлетворяет (10) при

$$z_{it} = -\int\limits_t^\infty \Phi(s,t)\beta_i(s,t)\hat\eta_i(s,t)\,ds$$

с соответствующим образом определёнными коэффициентами $\beta_i(s,t),\ i=1,2$. Утверждение доказано. □

Процессы p_t и z_t представляют собой функционалы от компонент процесса η_t, задающего случайные коэффициенты в (5) и (6). Используя известные результаты для процесса Орнштейна — Уленбека, асимптотическое поведение траекторий решения (10) может быть оценено сверху при помощи неслучайных функций. Так как $\limsup\limits_{t\to\infty}\{|\xi_{it}|/\sqrt{\ln t}\} = |\sigma_i|(\sqrt{\alpha_i})^{-1}$ почти наверное (см. [17]), функция $\Phi(t,s)$ допускает экспоненциальную оценку, а Π_t ограничена, то оценивание (11), (12) приводит к следующему результату.

Лемма 2. *Пусть* $d_t = e^{\varkappa t}\int\limits_t^\infty e^{-\varkappa s}\big(m_s^2+\overline{m}_s^2\big)\,ds$. *Тогда существуют детерминированные константы* c_p *и* $\bar c_p$ *такие, что*

$$\limsup_{t\to\ \infty}\frac{Ep_t^2}{d_t} = \bar c_p, \quad \limsup_{t\to\ \infty}\frac{p_t^2+z_{1t}^2+z_{2t}^2}{d_t e^{\bar\varkappa\sqrt{\ln t}}} = c_p$$

почти наверное при любой константе $\bar\varkappa > 2(|\sigma_1|(\sqrt{\alpha_1})^{-1}+|\sigma_2|(\sqrt{\alpha_2})^{-1})$.

В силу леммы 1 установившийся закон управления U^* существует и имеет вид

$$U_t^* = -r^{-1}b\big(\Pi_t X_t^* + p_t\big), \tag{13}$$

где p_t задаётся в (11), функция Π_t удовлетворяет (9), процесс X_t^*, $t\geqslant 0$, является решением

$$dX_t^* = (a_t - r^{-1}b^2\Pi_t)X_t^*\,dt + m_t\eta_{1t}\,dt - r^{-1}b^2p_t dt + G_t\,dW_t, \quad X_0^* = x. \tag{14}$$

Также полезно отметить, что решение (14) представимо в виде $X_t^* = \mu_t + X_t^{(0)}$, где

$$X_t^{(0)} = \Phi(t,0)x + \int\limits_0^t \Phi(t,s)G_s\,dW_s$$

— решение линейного СДУ;

$$\mu_t = \int\limits_0^t \Phi(t,s)(m_s\eta_{1s} - r^{-1}b^2p_s)\,ds$$

— процесс. Используя экспоненциальную оценку для $\Phi(t,s)$ и неравенство Коши — Буняковского, можно выписать соотношение

$$X_t^2 \leqslant c_x\int\limits_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\big(m_s^2\eta_{1s}^2 + p_s^2\big)\,ds + 2\big(X_t^{(0)}\big)^2, \tag{15}$$

где $c_x>0$ — некоторая константа. Для процесса $\big(X_t^{(0)}\big)^2$ хорошо известно (см., напр., [18]), что $E\big(X_t^{(0)}\big)^2 \leqslant \bar c_x(e^{-2\varkappa t}x^2 + \hat d_t)$, где $\hat d_t = \int\limits_0^t e^{-2\varkappa(t-s)}G_s^2\,ds$, $\bar c_x>0$ — некоторая константа. При оценивании значения $E\mu_t^2$ учтём результаты леммы 2 и после интегрирования по частям получим, что

$$E\big(X_t^*\big)^2 \leqslant 2c_\mu(d_t+\bar d_t) + \bar c_x(e^{-2\varkappa t}x^2+\hat d_t), \tag{16}$$

где d_t определена в условиях леммы 2, а функция $\bar d_t = e^{-\varkappa t}\int\limits_0^t e^{\varkappa s}\big(m_s^2+\overline{m}_s^2\big)\,ds$, c_μ — некоторая константа. Из (16) с учётом ограниченности G_t и условия (7) следует, что при

$\Gamma_T=\int\limits_0^T\left(m_t^2+\overline{m}_t^2+G_t^2\right)dt$ имеет место $\lim\limits_{T\to\infty}\{E(X_T^*)^2/\Gamma_T\}=0$. Как говорилось ранее, наряду с задачей оптимального управления «в среднем» также будет рассматриваться и вопрос о потраекторной (т. е. с вероятностью 1) оптимизации. В связи с этим потребуется сформулировать более строгое

Предположение 3. Существует константа $0<\gamma<1$ такая, что

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\left(m_t^2+\overline{m}_t^2\right)e^{\bar{\varkappa}\sqrt{\ln t}}}{\left[\int\limits_0^t\left(m_s^2+\overline{m}_s^2\right)ds\right]^\gamma}<\infty$$

при некоторой константе $\bar{\varkappa}>2(|\sigma_1|(\sqrt{\alpha_1})^{-1}+|\sigma_2|(\sqrt{\alpha_2})^{-1})$ и при этом, если $\limsup\limits_{t\to\infty}\big(m_t^2+\overline{m}_t^2\big)=\infty$, то функция $m_t+\overline{m}_t^2$ не убывает.

Следующее далее утверждение выступает аналогом эргодического свойства для процессов $m_t^2\eta_{1t}^2$ и $\overline{m}_t^2\eta_{2t}^2$. Кроме того, приводимая ниже лемма окажется необходима для анализа поведения интегральных функционалов процесса $(X_t^*)^2$, соответствующего установившейся стратегии U_t^*, в задаче потраекторной оптимизации.

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть выполнено предположение 3 и* $\int\limits_0^T(m_s^2+\overline{m}_s^2)\,ds\to\infty$, $t\to\infty$. *Тогда существуют детерминированные константы* $\bar{c}_\eta$ *и* $\hat{c}_p$ *такие, что с вероятностью 1 выполняются соотношения*

$$\text{а) }\lim_{T\to\infty}\frac{\int\limits_0^T(m_t^2\eta_{1t}^2+\overline{m}_t^2\eta_{2t}^2)\,dt}{\int\limits_0^T(m_t^2+\overline{m}_t^2)\,dt}=\bar{c}_\eta,\qquad \text{б) }\limsup_{T\to\infty}\frac{\int\limits_0^T p_t^2\,dt}{\int\limits_0^T(m_t^2+\overline{m}_t^2)\,dt}=\hat{c}_p.$$

2. *Если* $\int\limits_0^\infty\left(m_t^2+\overline{m}_t^2\right)dt<\infty$, *то* $\lim\limits_{T\to\infty}\int\limits_0^T\left(m_t^2\eta_{1t}^2+\overline{m}_t^2\eta_t^2+p_t^2\right)dt=\bar{\eta}$ *почти наверное, где* $\bar{\eta}$ *— некоторая случайная величина.*

Доказательство. В условиях п. 1а) положим $\overline{\Gamma}_T=\int\limits_0^T\left(m_t^2+\overline{m}_t^2\right)dt$ и определим центрированный процесс $Y_T=\int\limits_0^T\left(m_t^2\eta_{1t}^2-m_t^2E\eta_{1t}^2\right)dt$. Так как $\overline{\Gamma}_T\to\infty$, $T\to\infty$, то можно воспользоваться утверждением типа усиленного закона больших чисел для процесса $Y_T/\overline{\Gamma}_T$. Для этого требуется оценить $EY_T^2=\int\limits_0^T\int\limits_0^T m_s^2m_t^2K(t,s)\,dsdt$, где $K(t,s)$ — ковариационная функция процесса $\eta_{1t}^2=e^{2\xi_{1t}}$, т. е. $K(t,s)=e^{(\delta_{1t}+\delta_{1s})/2}(\exp\{\delta_{1\min(t,s)}e^{-\alpha_1|t-s|}\}-1)$ и при этом $\delta_{1t}=4E\xi_{1t}^2$. Для ограниченных m_t^2 и $\overline{m}_t^2$ нетрудно выписать оценку $EY_t^2\leqslant c\overline{\Gamma}_T$ и согласно результату из [18, лемма 2] получить сходимость $Y_T/\overline{\Gamma}_T\to 0$ почти наверное при $T\to\infty$. Для случая $(m_t^2+\overline{m}_t^2)\to\infty$, $t\to\infty$, нахождение EY_T^2 приводит к оценке $EY_T^2\leqslant c\int\limits_0^T\left(m_t^4+\overline{m}_t^4\right)dt$, а применение условия в предположении 3 позволяет записать $EY_T^2\leqslant\tilde{c}\overline{\Gamma}_T^{2-\gamma}$. Далее, действуя по аналогии с [18, лемма 2], показывается, что приведённая выше оценка EY_T^2 обеспечит выполнение соотношения $Y_T/\overline{\Gamma}_T\to 0$ почти наверное при $T\to\infty$. Так как

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\int\limits_0^T m_t^2E\eta_{1t}^2\,dt\Big/\int\limits_0^T m_t^2\,dt\right\}=\lim_{T\to\infty}E\eta_{1T}^2=\exp\left\{(4\alpha_1)^{-1}\sigma_1^2\right\},$$

то после рассмотрения предельного поведения $\int\limits_0^T \overline{m}_t^2\eta_{2t}^2\,dt$ в п. 1а) получаем, что соотношение п. 1а) почти наверное выполняется при $\bar{c}_\eta = \lambda\exp\{(4\alpha_1)^{-1}\sigma_1^2\} + \bar{\lambda}\exp\{(4\alpha_2)^{-1}\sigma_2^2\}$, где $\lambda = 1$ для $\left(\int\limits_0^T m_t^2\,dt\right)^{-1} \to 0$ при $T \to \infty$; $\bar{\lambda} = 1$, для $\left(\int\limits_0^T \overline{m}_t^2\,dt\right)^{-1} \to 0$ при $T \to \infty$ и $\lambda = 0$ $(\bar{\lambda} = 0)$ в оставшихся случаях.

Переходя к доказательству п. 1б), используем экспоненциальную оценку для $\Phi(t,s)$ и неравенство Коши — Буняковского, чтобы записать $p_t^2 \leqslant cy_t$, где процесс $y_t = e^{\varkappa t}\int\limits_t^\infty e^{-\varkappa s}\tilde{\eta}(s,t)\,ds$ при $\tilde{\eta}_(s,t) = m_s^2\hat{\eta}_1^2(s,t) + \overline{m}_s^2\hat{\eta}_2^2(s,t)$ удовлетворяет линейному ОСДУ

$$dy_t - \varkappa y_t\,dt + \left(m_t^2\eta_{1t}^2 + \overline{m}_t^2\eta_{2t}^2\right)dt + \tilde{z}_t'\,d\overline{W}_t = 0, \tag{17}$$

где

$$\tilde{z}_{it} = -2e^{\varkappa t}\int\limits_t^\infty e^{-\varkappa s}\sigma_i\tilde{\beta}_i\hat{\eta}_i^2(s,t)\,ds, \quad \tilde{\beta}_1 = m_t^2 e^{-\alpha_1(t-s)}, \quad \tilde{\beta}_2 = \overline{m}_t^2 e^{-\alpha_2(t-s)}.$$

Очевидно, что для процессов y_t и $|\tilde{z}_{it}|$, $i = 1,2$, справедливы соотношения, аналогичные приведённым в лемме 2. Находим

$$\int\limits_0^T y_t\,dt = (\varkappa)^{-1}(y_T - y_0) + (\varkappa)^{-1}N_T + (\varkappa)^{-1}\mathcal{R}_T,$$

$$N_T = \int\limits_0^T \left(m_t^2\eta_{1t}^2 + \overline{m}_t^2\eta_{2t}^2\right)dt, \quad \mathcal{R}_T = \int\limits_0^T \tilde{z}_t'\,d\overline{W}_t.$$

Из результатов леммы 2 и условий предположения 3 следует, что при $\overline{\Gamma}_T = \int\limits_0^T \left(m_t^2 + \overline{m}_t^2\right)dt$ с вероятностью 1 будет выполнено $y_T/\overline{\Gamma}_T \to 0$, $\mathcal{R}_T/\overline{\Gamma}_T \to 0$, $T \to \infty$. При анализе отношения $\mathcal{R}_T/\Gamma_T$ также был использован закон повторного логарифма:

$$\limsup_{T\to\infty}\{|\mathcal{R}_T|(\sqrt{\langle\mathcal{R}_T\rangle\ln\ln\langle\mathcal{R}_T\rangle})^{-1}\} = c,$$

где квадратическая характеристика $\langle\mathcal{R}_T\rangle = \int\limits_0^T \left(\tilde{z}_{1t}^2 + \tilde{z}_{2t}^2\right)dt$ в силу предположения 3 оценена как $\langle\mathcal{R}_T\rangle \leqslant \tilde{c}h_T$, функция $h_T = \overline{\Gamma}_T^{1+\gamma}$ и $\sqrt{h_T\ln\ln h_T}/\overline{\Gamma}_T \to 0$. Ранее было установлено, что $\lim\limits_{T\to\infty}\{N_T/\overline{\Gamma}_T\} = \bar{c}_\eta$. Тогда имеем, что $\int\limits_0^T y_t\,dt/\overline{\Gamma}_T \to (\varkappa)^{-1}\bar{c}_\eta$ почти наверное при $T \to \infty$. Учитывая приведённую выше верхнюю оценку для p_t^2, получим, что $\limsup\limits_{T\to\infty}\left\{\int\limits_0^T p_t^2\,dt/\overline{\Gamma}_T\right\} \leqslant c(\varkappa)^{-1}\bar{c}_\eta$.

В условиях п. 2 очевидно, что для процесса Y_T, определённого в 1а), $EY_T^2 \leqslant c\overline{\Gamma}_T \leqslant c\overline{\Gamma}_\infty$. Тогда по достаточному условию (см. [16, разд. 5.4, с. 97]) $Y_T \to Y_\infty$, почти наверное при $T \to \infty$, и при этом также $\int\limits_0^\infty \left(m_t^2E\eta_{1t}^2 + \overline{m}_t^2E\eta_{2t}^2\right)dt < \infty$. Таким образом, существует $\int\limits_0^\infty \left(m_t^2\eta_{1t}^2 + \overline{m}_t^2\eta_{2t}^2\right)dt$. Существование $\int\limits_0^\infty p_t^2\,dt$ следует из оценки (см. п. 1б)) $p_t^2 \leqslant cy_t$ и того, что

$\int\limits_0^\infty y_t\,dt$ также определён в силу полученного из (17) представления и сходимостей $N_T \to N_\infty$, $\mathcal{R}_T \to \mathcal{R}_\infty$ и $y_T \to 0$ почти наверное при условии $\overline{\Gamma}_\infty < \infty$. Утверждение доказано. $\square$

Замечание. При моделировании в реальных приложениях часто вместо стандартного процесса Орнштейна — Уленбека используется его средневозвратная модификация $\tilde{\xi}_t$, $t \geqslant 0$, задаваемая при помощи СДУ:

$$d\tilde{\xi}_t = -\alpha(\tilde{\xi}_t - l_t)\,dt + \sigma\,d\overline{w}_t, \quad \tilde{\xi}_0 = 0, \tag{18}$$

где l_t — детерминированная функция. Тогда соответствующий экспоненциальный процесс определяется как $\tilde{\eta}_t = e^{\tilde{\xi}_t}$. Долгосрочный трекинг такого процесса также может быть осуществлён посредством сведения к системе управления (5), (6). Для этого заметим, что решение (18) представимо в виде $\tilde{\xi}_t = \xi_t + \tilde{k}_t$, где ξ_t, $t \geqslant 0$, — стандартный процесс Орнштейна — Уленбека, $\tilde{k}_t = \int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)} l_s\,ds$. Следовательно, $\tilde{\eta}_t = e^{\tilde{k}_t}\eta_t$, где η_t, $t \geqslant 0$, — процесс ЭкспОУ. При замене переменных (4) коэффициенты (5), (6) имеют форму $\overline{m}_t = \sqrt{f_t} e^{\tilde{k}_t}$, $m_t \equiv 0$, и соответственно далее требуется проверить для них предположения 2 и 3.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ОПТИМАЛЬНОМУ УПРАВЛЕНИЮ

Основной результат данного раздела заключается в оптимальности установившейся стратегии управления U^* на бесконечном интервале времени и формулируется в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение 2 и* $\Gamma_T = \int\limits_0^T \big(m_t^2 + \overline{m}_t^2 + G_t^2\big)\,dt$. *Тогда закон управления* U^*, *определённый в* (13), (14), *является решением задачи*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\Gamma_T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}. \tag{19}$$

Если выполнено предположение 3 и $\Gamma_T \to \infty$, $T \to \infty$, *то управление* U^* *является оптимальным в задаче*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U)}{\Gamma_T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \quad \text{с вероятностью } 1. \tag{20}$$

Доказательство. Для произвольного допустимого управления $U \in \mathcal{U}$ рассматривается процесс разности $\Delta_T(U) = J_T(U^*) - J_T(U)$. Введя переменные $x_t = X_t - X_t^*$, $u_t = U_t - U^*$, можно получить представление

$$\Delta_T(U) = 2x_T\Pi_T X_T^* + 2x_T p_T - \int\limits_0^T \big(qx_t^2 + ru_t^2\big)\,dt + 2\int\limits_0^T x_t z_t'\,d\overline{W}_t - 2\int\limits_0^T x_t\Pi_t G_t\,dW_t.$$

Далее отметим, что условие $q > 0$ влечёт неравенство $x_T^2 + c\int\limits_0^T x_t^2\,dt \leqslant \tilde{c}\int\limits_0^T \big(qx_t^2 + ru_t^2\big)\,dt$. Этот результат и использование элементарного неравенства $2\tilde{a}\tilde{b} \leqslant \tilde{a}^2\tilde{d} + \tilde{b}^2/\tilde{d}$, справедливого для произвольных чисел $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ и константы $\tilde{d} > 0$, при оценивании $2x_T\Pi_T X_T^* + 2x_T p_T$ дают соотношение

$$J_T(U^*) \leqslant J_T(U) + c_1\big(X_T^*\big)^2 + c_2 p_T^2 - c_0\int\limits_0^T x_t^2\,dt + 2\int\limits_0^T x_t z_t'\,d\overline{W}_t - 2\int\limits_0^T x_t\Pi_t G_t\,dW_t, \tag{21}$$

где c_0, c_1, $c_2 > 0$ — некоторые константы. Как было показано ранее, $E\big(X_T^*\big)^2/\Gamma_T \to 0$, $T \to \infty$, а соотношение $Ep_T^2/\Gamma_T \to 0$ получается после использования результата леммы 2 вместе с условием (7). Тогда предельный переход для ожидаемых значений (21) при нормировке обеих частей с помощью функции Γ_T даёт неравенство

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U^*)}{\Gamma_T} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\Gamma_T}.$$

Также отмечаем, что значение

$$\limsup_{T\to\infty} \{EJ_T(U^*)/\Gamma_T\} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \left\{ \left[\int_0^T (E\big(X_t^*\big)^2 + Ep_t^2)\, dt \right] \Big/ \Gamma_T \right\}$$

конечно в силу полученных ранее верхних оценок для $E\big(X_T^*\big)^2$ и Ep_t^2. Следовательно, управление U^* является решением задачи (19).

При исследовании потраекторной оптимальности U^* обратимся к (21), записав эту оценку в виде

$$J_T(U^*) \leqslant J_T(U) + L_T + \mathcal{R}_T^{(1)} + \mathcal{R}_T^{(2)}, \tag{22}$$

где

$$L_T = c_1\big(X_T^*\big)^2 + c_2 p_T^2, \quad \mathcal{R}_T^{(1)} = -2\int_0^T x_t \Pi_t G_t dW_t - \tilde{c}_0 \int_0^T x_t^2\, dt, \quad \mathcal{R}_T^{(2)} = 2\int_0^T x_t z_t' d\overline{W}_t - \hat{c}_0 \int_0^T x_t^2\, dt,$$

а константы $\tilde{c}_0$, $\hat{c}_0 > 0$ такие, что $\tilde{c}_0 + \hat{c}_0 = c_0$. Применение утверждения леммы 2 и условий предположения 3 к оценке (15) в совокупности с известным результатом $\big(X_T^{(0)}\big)^2 \Big/ \int_0^T G_t^2\, dt \to 0$ при $T \to \infty$ почти наверное (см. [18]) приводят к соотношению $L_T/\Gamma_T \to \infty$ при $T \to \infty$ с вероятностью 1. Для слагаемого $\mathcal{R}_T^{(1)}$ также очевидно, что $\limsup_{T\to\infty}\big\{\mathcal{R}_T^{(1)}/\Gamma_T\big\} \leqslant 0$ почти наверное (см., напр., [18]). Процесс $\mathcal{R}_T^{(2)}$ в силу закона повторного логарифма для мартингала $2\int_0^T x_t z_t'\, d\overline{W}_t$, предположения 3 и утверждения леммы 2 допускает оценку $\mathcal{R}_T^{(2)} \leqslant c g_T$ почти наверное, где функция $g_T = h_T \ln\ln h_T$, $h_T = \Gamma_T^{1+\gamma}$. Так как $g_T/\Gamma_T \to 0$, $T \to \infty$, то также и $\mathcal{R}_T^{(2)}/\Gamma_T \to 0$ почти наверное. С учётом указанного выше асимптотического поведения нормированных слагаемых в правой части (22), в пределе при $T \to \infty$ получаем соотношение

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U^*)}{\Gamma_T} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U)}{\Gamma_T} \quad \text{с вероятностью 1.}$$

Также заметим, что $J_T(U^*) \leqslant c\int_0^T \big[\big(X_t^*\big)^2 + p_t^2 + \overline{m}_t^2 \eta_{2t}^2\big]\, dt$. При этом после интегрирования оценки (15) для $\big(X_t^*\big)^2$ имеем, что

$$\int_0^T (X_t^*)^2\, dt \leqslant \tilde{c} \int_0^T \big(m_t^2 \eta_{1t}^2 + p_t^2\big)\, dt + \int_0^T \big(X_t^0\big)^2\, dt.$$

Из этих неравенств после применение утверждений леммы 3 и результата об ограниченности $\int_0^T \big(X_t^{(0)}\big)^2\, dt/\Gamma_T$, $T \to \infty$ (см. [18]) следует, что $\limsup_{T\to\infty}\{J_T(U^*)/\Gamma_T\} \leqslant \bar{c}$ с вероятностью 1, где

$\bar{c} > 0$ — некоторая константа. Таким образом, значение критерия в (19) на управлении U^* является конечным числом и утверждение теоремы доказано. □

Заметим, что в общем случае ограниченной G_t и функций m_t, $\overline{m}_t$, удовлетворяющих предположению 2 (или 3), нормирующая функция $\Gamma_T \neq T$. Таким образом, согласно теореме 1, закон управления U^* является оптимальным по критериям, обобщающим долговременные средние. При этом нормировке Γ_T в (19) и (20) можно придать смысл индекса, измеряющего интегральное среднеквадратичное отклонение параметров системы управления от стандартного линейного регулятора без шумовых воздействий и неоднородной части.

4. ПРИМЕРЫ ПРИЛОЖЕНИЙ

4.1. Линейный регулятор с логнормальными внешними воздействиями

Рассмотрим случай, когда ЭкспОУ $\eta_t = e^{\xi_t}$ (см. уравнение в определении 1) присутствует в только форме внешних воздействий в уравнении динамики (5) без шума, а остальные коэффициенты постоянны, т. е. $a_t \equiv a$, $m_t \equiv m > 0$, $G_t \equiv 0$, $\overline{m}_t \equiv 0$. (Индексы 1 в процессе η_{1t} и константах α_1, σ_1 для удобства записи опускаются; см. определение 1.) В частности, такой вид будет иметь модель управления объёмом воды в резервуаре [19], если предположить логнормальный характер распределения наполняющих его осадков [7]. Отток воды выступает в качестве управляющей переменной. Тогда процесс X_t из (5) задаёт отклонение объёма от базового уровня, константы $a < 0$, $m = 1$, $G = 0$, а $b = -1$. Система управления формулируется как линейный регулятор. Очевидно, что предположения 2 и 3 выполнены, а задачи управления (19) и (20) становятся задачами с критериями долговременных средних. Дифференциальное уравнение Риккати (9) превращается в алгебраическое уравнение $2a\Pi - r^{-1}b^2\Pi^2 + q = 0$, имеющее единственный положительный корень $\Pi = (a + \sqrt{a^2 + r^{-1}b^2q})rb^{-2}$. При описании оптимальной стратегии управления $U^* = -r^{-1}b\big(\Pi X_t^* + p_t\big)$ отметим, что $X_t^* = \int\limits_0^t e^{-a^*(t-s)}(m\eta_s - r^{-1}b^2p_s)\,ds$, где $a^* = \sqrt{a^2 + r^{-1}b^2q} > 0$, процесс p_t согласно лемме 1 имеет вид

$$p_t = \Pi m \int\limits_t^\infty e^{-a^*(s-t)}\hat{\eta}(s,t)\,ds, \tag{23}$$

$$\hat{\eta}(s,t) = \exp\{(4\alpha)^{-1}\sigma^2[1 - e^{(-2\alpha(s-t))}]\}\exp\{e^{(-\alpha(s-t))}\xi_t\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant s.$$

В данном примере, помимо асимптотической верхней оценки для p_t^2 в форме неслучайной функции $h_t = m^2(a^*)^{-1}e^{\bar{\varkappa}\sqrt{\ln t}}$ (см. лемму 2), можно выписать стохастическую верхнюю и нижнюю границы при произвольном $t \geqslant 0$. Здесь важным моментом оказывается соотношение между константами a^* и α. В частности, для $a^* \geqslant \alpha$ имеем $e^{-a^*(s-t)} \leqslant e^{-\alpha(s-t)}$, $t \leqslant s$, и при оценивании p_t сверху достаточно однократного интегрирования по частям в $\Pi m\gamma_1 \int\limits_t^\infty e^{-a^*(s-t)}\exp\{e^{(-\alpha(s-t))}\xi_t\}\,ds$, где $\gamma_1 = e^{(4\alpha)^{-1}\sigma^2}$. Рассуждая аналогичным образом, приходим к следующим результатам.

Лемма 4. *Для процесса p_t, определённого в (23), с вероятностью 1 выполняется $(\Pi m)\bar{p}_t \leqslant p_t \leqslant \gamma_1(\Pi m)\hat{p}_t$, где константа $\gamma_1 = e^{(4\alpha)^{-1}\sigma^2}$. При этом процессы $\hat{p}_t$ и $\bar{p}_t$ задаются в виде:*

а) *для* $a^* \geqslant \alpha$ $\quad \hat{p}_t = (\alpha\xi_t)^{-1}(e^{\xi_t} - 1), \quad \bar{p}_t = \begin{cases} (a^*)^{-1}e^{\xi_t} & \text{при} \quad \xi_t \leqslant 0, \\ (a^*\xi_t)^{-1}(e^{\xi_t} - 1) & \text{при} \quad \xi_t \geqslant 0; \end{cases}$

б) *для* $a^* < \alpha$ $\quad \hat{p}_t = (a^*)^{-1}(e^{\xi_t} + |\xi_t|(\xi_t)^{-1}(e^{\xi_t} - 1)), \quad \bar{p}_t = (\alpha\xi_t)^{-1}(e^{\xi_t} - 1)$.

Утверждение теоремы 1 при этом можно уточнить в направлении эргодичности целевых функционалов на управлении U^*, а также оценить оптимальное значение критериев в соответствующих задачах.

Теорема 2. *Управление U^* является решением задач с критериями долговременных средних:*

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{EJ_T(U)}{T}\to\inf_{U\in\mathcal{U}},\quad \limsup_{T\to\infty}\frac{J_T(U)}{T}\to\inf_{U\in\mathcal{U}}\quad \text{с вероятностью 1.}$$

При этом почти наверное справедливо равенство

$$\lim_{T\to\infty}\frac{J_T(U^*)}{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{EJ_T(U^*)}{T}=J^*,$$

и величина J^* находится в пределах $\bar c_1\leqslant J^*\leqslant\bar c_2$, где

$$\bar c_2=2e^{(\alpha)^{-1}\sigma^2}m^2\Pi\frac{(a^*-a)}{(a^*)^2}\quad \bar c_1=2\alpha\sigma^{-2}m^2\Pi(a^*-a)k(a^*),$$

$$k(a^*)=\begin{cases}e^{(2\alpha)^{-1}\sigma^2}(a^*)^{-2} & \text{при}\quad a^*>\alpha,\\ (e^{(2\alpha)^{-1}\sigma^2}-1)(a^*\alpha)^{-1} & \text{при}\quad a^*\leqslant\alpha.\end{cases}$$

Доказательство. По формуле Ито с использованием (10)–(14) выписывается представление

$$J_T(U^*)=L_T-r^{-1}b^2\int_0^T p_t^2\,dt+2m\int_0^T\eta_t p_t\,dt+\mathcal{R}_T,$$

где

$$\mathcal{R}_T=-2\int_0^T X_t^*z_t d\overline{w}_t,\quad L_T=\Pi x^2+2xp_0-\Pi\big(X_T^*\big)^2-2X_T^*p_T$$

— процессы. Применение полученных ранее результатов (см. доказательство теоремы 1) о поведении процессов $\big(X_T^*\big)^2$ и p_T^2, а также их ожидаемых значений при $T\to\infty$ даёт соотношения $EL_T/T\to0$, $L_T/T\to0$ почти наверное. Для $\mathcal{R}_T$ из закона повторного логарифма, леммы 2 и того, что $\limsup\limits_{T\to\infty}\left\{\int_0^T(X_t^*)^2\,dt/T\right\}<\infty$, будет следовать сходимость $\mathcal{R}_T/T\to0$ почти наверное при $T\to\infty$. Для центрированных процессов $Y_T=\int_0^T[\eta_t p_t-E(\eta_t p_t)]\,dt$, $\widetilde Y_T=\int_0^T\big(p_t^2-Ep_t^2\big)\,dt$ имеют место оценки $E(Y_T)^2\leqslant cT$, $E(\widetilde Y_T)^2\leqslant\tilde cT$. Тогда (см. [18]) с вероятностью 1 справедливо $Y_T/T\to0$, $\widetilde Y_T/T\to0$ при $T\to\infty$. С учётом всех приведённых выше соотношений получаем, что

$$\lim_{T\to\infty}\{J_T(U^*)/T\}=\lim_{T\to\infty}\{EJ_T(U^*)/T\}=\lim_{T\to\infty}\{l_TT^{-1}\}=J^*,$$

где $l_T=\int_0^T\big[2mE(\eta_tp_t)-r^{-1}b^2Ep_t^2\big]\,dt$. При нахождении $E(\eta_tp_t)$ из (23) учтём, что

$$E(\exp\{\xi_t(1+e^{-2\alpha(s-t)})\}\to\exp\{\gamma_1(1+e^{-2\alpha(s-t)})^2\},\quad t\to\infty,$$

где $\gamma_1=(4\alpha)^{-1}\sigma^2$. Тогда

$$E(\eta_tp_t)\leqslant e^{(\alpha)^{-1}\sigma^2}\Pi m\int_t^\infty e^{-a^*(s-t)}\,ds,\quad J^*\leqslant\bar c_2,\quad \bar c_2=2e^{(\alpha)^{-1}\sigma^2}\Pi m^2(a^*)^{-1}.$$

Для определения нижней границы используется представление

$$-\int_0^T Ep_t^2\,dt = -(2a^*)^{-1}\big(Ep_0^2 - Ep_T^2\big) - 2(2a^*)^{-1}\Pi m\int_0^T E(\eta_t p_t)\,dt + \int_0^T Ez_t^2\,dt.$$

После приведения подобных слагаемых имеем

$$J^* \geqslant m[(a^*-a)/a^*]\lim_{T\to\infty}\left\{\int_0^T E(\eta_t p_t)\,dt/T\right\} \geqslant \bar c_1,$$

где различия в виде $\bar c_1$ для случаев $a^* \leqslant \alpha$ и $a^* > \alpha$ вызваны меняющейся оценкой функции $\int\limits_t^\infty e^{-a^*(s-t)}\exp\{\sigma^2(2\alpha)^{-1}e^{-\alpha(s-t)}\}\,ds$, ограничивающей снизу $E(\eta_t p_t)$. Утверждение доказано. □

Из результатов теоремы 2 видно, что параметры случайных внешних воздействий влияют на границы изменения J^*. Величины $\bar c_1$ и $\bar c_2$ находятся в зависимости от $\rho = (2\alpha)^{-1}\sigma^2$. Константа ρ является асимптотической дисперсией процесса Орнштейна — Уленбека ξ_t из определения 1, т. е. $\rho = \lim\limits_{t\to\infty} E\xi_t^2$. С ростом ρ при $\rho \geqslant 1$ одновременно увеличиваются как $\bar c_1$, так и $\bar c_2$. В случае $a^* > \alpha$ при малых ρ ($\rho < 1$) последующее изменение ρ до значения $\rho = 1$ приводит к сдвигу нижней границы $\bar c_1$ в сторону её уменьшения. При возрастании показателя $a^* = \sqrt{a^2 + r^{-1}b^2q} > 0$, характеризующего темп устойчивости в уравнении (14), происходит сужение границ, и в пределе при $a^* \to \infty$ имеем, что $\bar c_1 \to 0$, $\bar c_2 \to 0$ и, следовательно, величина $J^* \to 0$.

4.2. Решение задачи трекинга

В качестве примера системы управления в задаче трекинга можно привести модель динамического изменения денежного баланса страховой компании [20]. Тогда в (1) $\widetilde X_t$, $t \geqslant 0$, — текущий денежный баланс, $a > 0$ — ставка доходности безрискового актива. Предполагается, что на баланс $\widetilde X_t$ можно влиять посредством корректировки страховых премий $\widetilde U_t$, $t \geqslant 0$ (при этом $\widetilde U_t < 0$ означает выплату дивидендов), $G \neq 0$ задаёт волатильность случайных факторов. В [20] задача оптимизации $EJ^{(d)}(\widetilde U)$ рассматривалась на конечном горизонте T, использовались экспоненциальное дисконтирование $f_t = e^{\delta t}$ ($\delta > 0$), детерминированная плановая траектория и фиксированное терминальное значение $E\widetilde X_T$. Функционалу (2) придавался смысл функционала риска отклонения $\widetilde X_t$ от η_t, с учётом квадратичных издержек по управлению. Очевидно, что неслучайную траектории η_t можно заменить на процесс ЭкспОУ с целью отслеживания рыночной ситуации [4, 5], и взять дисконтирующую функцию f_t более общего вида (см. предположение 1). При анализе долгосрочных стратегий естественно перейти к $T \to \infty$ и решению задач управления вида (3). Используются результаты раздела 3 и также формулируется условие, выступающее аналогом предположения 3 для системы с дисконтированием.

Предположение 4. Существует константа $0 < \gamma < 1$ такая, что для дисконтирующей функции выполняется $\limsup\limits_{t\to\infty}\left\{e^{\bar\varkappa\sqrt{\ln t}} f_t\left(\int\limits_0^t f_s\,ds\right)^{\gamma-1}\right\} < \infty$ при некоторой константе $\bar\varkappa > 2(|\sigma|(\sqrt{\alpha})^{-1})$ и при этом $\int\limits_0^T f_t\,dt \to \infty$, $T \to \infty$.

Далее будут приведены примеры различных дисконтирующих функций, удовлетворяющих предположению 4 и известных из теории принятия решений (см. [21, разд. 15.4]). Проверить выполнимость предположения 4 оказывается возможным и при использовании более простых условий, основанных на сравнении дисконтирующей функции f_t и ставки дисконтирования $\phi_t = -\dot{f}_t/f_t$ со степенными функциями времени. Ключевое замечание здесь касается того, что $\limsup\limits_{t\to\infty}\{e^{\bar{\varkappa}\sqrt{\ln t}}t^{-\beta}\} = 0$ при любом $\beta > 0$, и можно рассмотреть предел

$$c_{\gamma\,\beta} = \lim_{t\to\infty}\left\{t^{\beta} f_t \left(\int\limits_0^t f_s\,ds\right)^{\gamma-1}\right\}. \tag{24}$$

Если $c_{\gamma\,\beta} = 0$, а $\int\limits_0^t f_s\,ds \to \infty$, $t \to \infty$, то предположение 4 также будет выполнено. Вначале предположим, что для данной f_t имеет место $f_t t^{\beta_0} \to 0$, $t \to \infty$, при некотором $\beta_0 > 0$, тогда очевидно, что $c_{\gamma\,\beta} = 0$. Далее, пусть $f_t t^{\beta} \to \infty$ для любого $\beta > 0$, а ставка дисконтирования и накопленный дисконт изменяются не быстрее, чем степенные функции. Точнее, существуют числа $k \geqslant 0$, $k_0 > 0$ такие, что

$$0 < \liminf_{t\to\infty}\{f_t t^{\beta}\}, \quad \limsup_{t\to\infty}\{f_t t^{-k}\} < \infty, \quad \lim_{t\to\infty}\{\phi_t t^{k_0}\} = 0, \tag{25}$$

где $\beta > 0$ — произвольное число, $\phi_t = -\dot{f}_t/f_t$. Тогда при нахождении $c_{\gamma\,\beta}$ можно воспользоваться правилом Лопиталя, условиями (25) и для некоторого $c > 0$ получить оценку

$$c_{\gamma\,\beta} = \lim_{t\to\infty}\left\{\beta t^{\beta-1} - t^{\beta}\phi_t(1-\gamma)^{-1}\left(\int\limits_0^t f_s\,ds\right)^{\gamma}\right\}$$
$$\leqslant \lim_{t\to\infty}\{(1-\gamma)^{-1}(\beta c t^{\beta-1+(k+1)\gamma} + c t^{\beta-k_0+(k+1)\gamma})\}.$$

Равенство нулю правой части достигается, если положить $0 < \gamma < (\min\{k_0, 1\} - \beta_0)/(k+1)$ при $\beta_0 < \min\{k_0, 1\}$. Так как при (25) также имеет место $\int\limits_0^t f_s\,ds \to \infty$, $t \to \infty$, то условия (25) оказываются достаточными для выполнения предположения 4.

Пример. Пусть θ, θ_0 — вещественные числа, являющиеся параметрами семейств дисконтирующих функций. Тогда следующие ниже виды функции f_t удовлетворяют предположению 4:

1) степенная $f_t = (1+t)^{\theta}$. Тогда $\int\limits_0^t f_s\,ds \to \infty$, $t \to \infty$, при $\theta \geqslant -1$. Если $-1 \leqslant \theta < 0$, то в (24) сразу получаем, что константа $c_{\gamma\,\beta} = 0$ при $0 < \beta < -\theta$. Для случая $\theta \geqslant 0$ воспользуемся условиями в (25). Ставка дисконтирования $\phi_t = -\theta(1+t)^{-1}$, т. е. в (25) константа $k_0 = 1$, а величина $k = \theta$;

2) логарифмическая $f_t = \ln^{\theta}(e+t)$ (e — постоянная Эйлера). Так как ставка дисконтирования $\phi_t = -\theta(e+t)^{-1}\ln^{-1}(e+t)$, то $k_0 = 1$, а k зависит от знака θ: при $\theta \leqslant 0$ полагаем $k = 0$, для $\theta > 0$ в (25) величина $k > 0$ может быть произвольной;

3) экспоненциально-логарифмическая $f_t = \exp\{\theta_0 \ln^{\theta}(e+t)\}$. Ставка дисконтирования $\phi_t = -\theta_0\theta_1(e+t)^{-1}\ln^{\theta-1}(e+t)$ даёт значение $k_0 < 1$, $k = 0$ при $\theta_0 \leqslant 0$ и произвольное $k > 0$, если $\theta > 0$.

Из формул (13), (14) при $\overline{m}_t = qc_{\eta}\sqrt{f_t}$ путём обратной замены переменных к (4) определяется оптимальный закон управления $\widetilde{U}^*$ и соответствующий ему процесс $\widetilde{X}_t^*$. Получаем, что

$$\widetilde{U}_t^* = -r^{-1}b\big(\Pi_t\widetilde{X}_t^* + \tilde{p}_t\big), \tag{26}$$

где функция Π_t удовлетворяет уравнению Риккати $\dot{\Pi}_t+2a\Pi_t-\phi_t\Pi_t-r^{-1}b^2\Pi_t^2+q=0$, процесс $\tilde{p}_t$ имеет вид

$$\tilde{p}_t=-qc_\eta\int\limits_t^\infty\tilde{\Phi}(s,t)\tilde{\eta}(s,t)\,ds, \tag{27}$$

где функция $\tilde{\Phi}(t,s)=\exp\left\{\int\limits_s^t(a-\phi_v-r^{-1}b^2\Pi_v)\,dv\right\}$, ставка дисконтирования $\phi_t=-\dot{f}_t/f_t$,

$$\tilde{\eta}(s,t)=\exp\{(4\alpha)^{-1}\sigma^2[1-e^{(-2\alpha(s-t))}]\}\exp\{e^{(-\alpha(s-t))}\xi_t\},\quad 0\leqslant t\leqslant s. \tag{28}$$

Динамика оптимальной траектории

$$d\widetilde{X}_t^*=(a-r^{-1}b^2\Pi_t)\widetilde{X}_t^*\,dt-r^{-1}b^2\tilde{p}_t\,dt+GdW_t,\quad \widetilde{X}_0^*=\tilde{x}. \tag{29}$$

Также полезно указать (см. [22]), что $\Pi_t\to\overline{\Pi}$, $t\to\infty$, где $\overline{\Pi}$ — положительный корень алгебраического уравнения Риккати $2a\overline{\Pi}-c_\phi\overline{\Pi}-r^{-1}b^2\overline{\Pi}^2+q=0$, $c_\phi=\lim\limits_{t\to\infty}\phi_t\leqslant 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда управление* $\widetilde{U}^*$, *определённое в* (26)–(29), *является решением задачи*

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{EJ_T^{(d)}(\widetilde{U})}{\int\limits_0^T f_t\,dt}\to\inf_{\widetilde{U}\in\mathcal{U}}.$$

Если при этом выполняется предположение 4, то $\widetilde{U}^*$ *также оптимально для задачи управления*

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{J_T^{(d)}(\widetilde{U})}{\int\limits_0^T f_t\,dt}\to\inf_{\widetilde{U}\in\mathcal{U}}\quad \textit{с вероятностью } 1,$$

и при этом

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{J_T^{(d)}(\widetilde{U})}{\int\limits_0^T f_t\,dt}=\limsup_{T\to\infty}\frac{EJ_T^{(d)}(\widetilde{U})}{\int\limits_0^T f_t\,dt}=\tilde{J}^*\quad \textit{почти наверное},$$

где

$$\tilde{c}_1\leqslant\tilde{J}^*\leqslant\tilde{c}_2,\quad \tilde{c}_2=qc_\eta^2\bar{c}+\overline{\Pi}G^2,\quad \tilde{c}_1=qc_\eta^2\bar{c}(1-r^{-1}b^2q/\bar{a})+\overline{\Pi}G^2,$$
$$\bar{c}=\exp\{(4\alpha)^{-1}\sigma^2,\quad \bar{a}=a^2+r^{-1}b^2q.$$

Доказательство. Пусть выполнено предположение 4. Имеет место равенство $J_T^{(d)}(\widetilde{U}^*)=J_T(U^*)+qc_\eta^2D_T$, где управление U^* определено в (13), (14), $D_T=\int\limits_0^T f_t\eta_t^2\,dt$ — процесс. Как было показано в лемме 3, $D_T/\int\limits_0^T f_t\,dt\to\bar{c}_\eta$, здесь $\bar{c}_\eta=\exp\{(4\alpha)^{-1}\sigma^2\}=\bar{c}$. Также при этом

$$J_T(U^*)=L_T-r^{-1}b^2\int\limits_0^T p_t^2\,dt+\int\limits_0^T f_tG^2\Pi_t\,dt+\widetilde{\mathcal{R}}_T,$$

где

$$L_T = \Pi_T \tilde{x}^2 + 2\tilde{x}p_0 - \Pi_T\big(X_T^*\big)^2 - 2X_T^* p_T, \quad \widetilde{\mathcal{R}}_T = -2\int\limits_0^T X_t^* z_t\, d\overline{w}_t + 2\int\limits_0^T G\sqrt{f_t}\Pi_t\, dW_t$$

— процессы. Применение предположения 3 при $\overline{m}_t = qc_\eta\sqrt{f_t}$, утверждений лемм 2 и 3, а также закона повторного логарифма приводят к соотношению $(L_T + \widetilde{\mathcal{R}}_T)/\int\limits_0^T f_t\, dt \to 0$ почти наверное при $T \to \infty$. Тогда

$$\lim_{T\to\infty}\left\{J_T^{(d)}(\widetilde{U}^*)\Bigg/\int\limits_0^T f_t\, dt\right\} = \lim_{T\to\infty}\left\{EJ_T^{(d)}(\widetilde{U}^*)\Bigg/\int\limits_0^T f_t\, dt\right\}$$

$$= \overline{\Pi}G^2 + qc_\eta^2\bar{c} - r^{-1}b^2\lim_{T\to\infty}\left\{\tilde{l}_T\Bigg/\int\limits_0^T f_t\, dt\right\} = \tilde{J}^*,$$

где

$$\tilde{l}_T = \int\limits_0^T Ep_t^2\, dt, \quad \lim_{T\to\infty}\{\tilde{l}_T/\int\limits_0^T f_t\, dt\} \leqslant \bar{c}q^2c_\eta^2(a^2 + r^{-1}b^2q)^{-1}$$

в силу свойства $\Pi_t \to \overline{\Pi}$, $t \to \infty$, и оценки $Ep_t^2 \leqslant q^2c_\eta^2\int\limits_t^\infty \Phi(s,t)\, ds\int\limits_t^\infty \Phi(s,t)f_sE\eta_s^2\, ds$. Утверждение доказано. □

Следует отметить, что при решении задач оптимального управления эффект дисконтирующей функции f_t проявляется в нескольких аспектах. Во-первых, $\Gamma_T = \int\limits_0^T f_t\, dt$ определяет при $T \to \infty$ порядок роста ожидаемого значения целевого функционала $EJ_T^{(d)}(\widetilde{U}^*)$ на управлении $\widetilde{U}^*$, а в случае $\Gamma_T \to \infty$ — также и самого функционала $J_T^{(d)}(\widetilde{U}^*)$ (см. утверждение теоремы 3). Кроме того, известно (см. [22]), что при помощи ставки дисконтирования ϕ_t оценивается скорость сходимости $\Pi_t \to \overline{\Pi}$ и выявляется устойчивость коэффициента $\tilde{a}_t = a - r^{-1}b^2\Pi_t$ в уравнении (29). Соответственно дисконтирование оказывает влияние на формирование процесса $\tilde{p}_t$ (см. (27)) в неоднородной по времени аффинной части оптимальной установившейся стратегии управления $\widetilde{U}^*$. Анализируя полученные соотношения в теореме 3 далее, можно сделать следующее наблюдение. Очевидно, что границы изменения $\tilde{J}^*$ естественным образом зависят от параметров, характеризующих неопределённость в системе. Величины $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ увеличиваются с ростом $\rho = (2\alpha)^{-1}\sigma^2$ (дисперсии процесса ξ_t, задающего траекторию для трекинга) и G^2 (дисперсии шумовых воздействий, влияющих на динамику состояния). При этом также интересно отметить влияние коэффициента a из уравнения динамики (1) на значение нижней границы $\tilde{c}_1$. Малое $|a|$ даёт $\tilde{c}_1$, близкое к нулю, а при $|a| \to \infty$ окажется, что $\tilde{c}_1 \to \tilde{c}_2$, т. е. происходит сужение интервала оценки $\tilde{J}^*$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача трекинга траектории, задаваемой экспоненциальным процессом Орнштейна — Уленбека, при использовании целевого функционала, включающего дисконтирование. Путём замены переменных система управления сведена к линейному регулятору со случайными коэффициентами вида ЭкспОУ. Для такой неоднородной системы управления доказано существование установившейся стратегии U^* в форме линейной обратной связи по состоянию и со сдвигом, удовлетворяющем линейному ОСДУ (см. (13) и лемму 1). Показано, что U^* является оптимальным законом управления по критериям, обобщающим долговременные средние (см. теорему 1). В случае системы с постоянными коэффициентами при наличии процесса внешних воздействий в виде ЭкспОУ данные критерии превращаются в обычные долговременные средние (см. разд. 4.1). С использованием полученных результатов установлен вид оптимальной стратегии $\widetilde{U}^*$ для задачи трекинга с критериями долгосрочных потерь на единицу накопленного дисконта (см. разд. 4.2 и теорему 3). В качестве направления дальнейших исследований можно выделить анализ ситуации, когда процесс ЭкспОУ в уравнении динамики не доступен прямому наблюдению, т. е. имеет характер шума. Тогда управление в системе будет осуществляться в условиях неполной информации и потребует привлечения методов из теории фильтрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal Control: Linear Quadratic Methods. N. Y.: Dover Publ., 2007.
2. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Наука, 1977.
3. *Yao D.D., Zhang S., Zhou X.Y.* Tracking a financial benchmark using a few assets // Oper. Res. 2006. V. 54, N 2. P. 232–246; https://doi.org/10.1287/opre.1050.0260
4. *Schwartz E.S.* The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging // J. Finance. 1997. V. 52, N 3. P. 923–973; https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1997.tb02721.x
5. *Lutkepohl H., Xu F.* The role of the log transformation in forecasting economic variables // Empir. Economics. 2012. V. 42, N 3. P. 619–638; https://doi.org/10.1007/s00181-010-0440-1
6. *Gutierrez R., Nafidi A., Sanchez R.G.* Forecasting total natural-gas consumption in Spain by using the stochastic Gompertz innovation diffusion model // Appl. Energy. 2005. V. 80, N 2. P. 115–124; https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2004.03.012
7. *Sharma T.C.* Stochastic characteristics of rainfall-runoff processes in Zambia // Hydrolog. Sci. J. 1985. V. 30, N 4. P. 479–512; https://doi.org/10.1080/02626668509491014
8. *Maccini L.J., Moore B.J., Schaller H.* The interest rate, learning, and inventory investment // Amer. Econom. Rev. 2004. V. 94, N 5. P. 1303–1327; https://doi.org/10.1257/0002828043052295
9. *Girimaji S.S., Pope S.B.* A diffusion model for velocity gradients in turbulence // Phys. Fluids. A: Fluid Dynamics. 1990. V. 2, N 2. P. 242–256; https://doi.org/10.1063/1.857773
10. *Verdejo H., Awerkin A., Kliemann W., Becker C.* Modelling uncertainties in electrical power systems with stochastic differential equations // Internat. J. Electr. Power Energy Systems. 2019. V. 113. P. 322–332; https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2019.05.054
11. *Palamarchuk E.* On infinite time linear-quadratic Gaussian control of inhomogeneous systems // Control Conf. (ECC), 2016. N. Y.: IEEE, 2016. P. 2477–2482; DOI:10.1109/ECC.2016.7810662
12. *Chen S., Zhou X.Y.* Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs. II // SIAM J. Control Optimization. 2000. V. 39, N 4. P. 1065–1081; https://doi.org/10.1137/S0363012998346578
13. *Loewenstein G., Prelec D.* Anomalies in intertemporal choice: Evidence and an interpretation // Quarterly J. Economics. 1992. V. 107, N 2. P. 573—597; https://doi.org/10.2307/2118482
14. *Bonkas E.K., Liu Z. K.* Suboptimal design of regulators for jump linear system with time-multiplied quadratic cost // IEEE Trans. Automat. Control. 2001. V. 46, N 1. P. 131-–136; DOI:10.1109/9.898705
15. *Fuhrman M., Tessitore G.* Infinite horizon backward stochastic differential equations and elliptic equations in Hilbert spaces // Annals of Probability. 2004. V. 32, N 1B. P. 607–660; https://doi.org/10.1214/aop/1079021459
16. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.
17. *Al-Azzawi S., Liu J., Liu X.* Convergence rate of synchronization of systems with additive noise // Ser. Discrete Contin. Dyn. Systems. B. 2017. V. 22, N 2. P. 227–245; http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2017012

18. *Паламарчук Е.С.* Асимптотическое поведение решения линейного стохастического дифференциального уравнения и оптимальность «почти наверное» для управляемого случайного процесса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 1. С. 89–103.

19. *Ozelkan E.C., Galambosi A., Fernandez-Gaucherand E., Duckstein L.* Linear quadratic dynamic programming for water reservoir management // Appl. Math. Model. 1997. V. 21, N 9. P. 591–598; https://doi.org/10.1016/S0307-904X(97)00078-4

20. *Huang J., Wang G., Wu Z.* Optimal premium policy of an insurance firm: full and partial information // Insurance: Math. Econom. 2010. V. 47, N 2. P. 208–215; https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2010.04.007

21. *Takemura K.* Behavioral Decision Theory. Singapore: Springer-Verl., 2021.

22. *Паламарчук Е.С.* Теорема сравнения для одного класса дифференциальных уравнений Риккати и её приложение // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 8. С. 1020–1025.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.71

ON OPTIMAL CONTROL IN THE PROBLEM OF LONG-RUN TRACKING THE EXPONENTIAL ORNSTEIN—UHLENBECK PROCESS

© 2022 E. S. Palamarchuk[1,2a]

[1]*Central Economics and Mathematics Institite RAS, Nakhimovsky prosp. 47, Moscow 117418, Russia,*
[2]*Higher School of Economics, Pokrovsky bul. 11, Moscow 109028, Russia*

E-mail: e.palamarchuck@gmail.com

Received 11.04.2022, revised 16.06.2022, accepted 22.06.2022

Abstract. We consider a problem of optimal tracking the exponential Ornstein—Uhlenbeck process. By change of variables, the linear-quadratic control system with discounting has been transformed into linear inhomogeneous system with random coefficients. For such a system, we obtain an optimal control law over an infinite time-horizon. The results are applied to derive an optimal control in the tracking problem with respect to criteria of long-term losses per unit of accumulated discount.

Keywords: linear stochastic controller, tracking, exponential Ornstein—Uhlenbeck process, discounting.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.410

REFERENCES

1. Anderson B.D.O., Moore J.B. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. N. Y.: Dover Publ., 2007.
2. Kwakernaak H., Sivan R. Linear optimal control systems. N. Y.: Wiley-Interscience, 1972.
3. Yao D.D., Zhang S., Zhou X.Y. Tracking a financial benchmark using a few assets. *Oper. Res.*, 2006, Vol. 54, No. 2, pp. 232–246; https://doi.org/10.1287/opre.1050.0260
4. Schwartz E.S. The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *J. Finance*, 1997, Vol. 52, No. 3, pp. 923–973; https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1997.tb02721.x
5. Lutkepohl H., Xu F. The role of the log transformation in forecasting economic variables. *Empir. Econom.*, 2012, Vol. 42, No. 3, pp. 619–638; https://doi.org/10.1007/s00181-010-0440-1
6. Gutierrez R., Nafidi A., Sanchez R.G. Forecasting total natural-gas consumption in Spain by using the stochastic Gompertz innovation diffusion model. *Appl. Energy*, 2005, Vol. 80, No. 2, pp. 115–124; https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2004.03.012
7. Sharma T.C. Stochastic characteristics of rainfall-runoff processes in Zambia. *Hydrolog. Sci. J.*, 1985, Vol. 30, No. 4, pp. 479–512; https://doi.org/10.1080/02626668509491014
8. Maccini L.J., Moore B.J., Schaller H. The interest rate, learning, and inventory investment. *Amer. Econom. Rev.*, 2004, Vol. 94, No. 5, pp. 1303–1327; https://doi.org/10.1257/0002828043052295
9. Girimaji S.S., Pope S.B. A diffusion model for velocity gradients in turbulence. *Phys. Fluids. A: Fluid Dynamics*, 1990, Vol. 2, No. 2, pp. 242–256; https://doi.org/10.1063/1.857773
10. Verdejo H., Awerkin A., Kliemann W., Becker C. Modelling uncertainties in electrical power systems with stochastic differential equations. *Internat. J. Electr. Power Energy Systems*, 2019, Vol. 113, pp. 322–332; https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2019.05.054

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 4.

11. Palamarchuk E. On infinite time linear-quadratic Gaussian control of inhomogeneous systems. *Control Conf. (ECC)*, N. Y.: IEEE, 2016. P. 2477–2482; DOI:10.1109/ECC.2016.7810662
12. Chen S., Zhou X.Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs. II. *SIAM J. Control Optim.*, 2000, Vol. 39, No. 4, pp. 1065–1081; https://doi.org/10.1137/S0363012998346578
13. Loewenstein G., Prelec D. Anomalies in intertemporal choice: Evidence and an interpretation. *Quarterly J. Economics*, 1992, Vol. 107, No. 2, pp. 573—597; https://doi.org/10.2307/2118482
14. Bonkas E.K., Liu Z. K. Suboptimal design of regulators for jump linear system with time-multiplied quadratic cost. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2001, Vol. 46, No. 1, pp. 131-–136; DOI:10.1109/9.898705
15. Fuhrman M., Tessitore G. Infinite horizon backward stochastic differential equations and elliptic equations in Hilbert spaces. *Annals of Probability*, 2004, Vol. 32, No. 1B, pp. 607–660; https://doi.org/10.1214/aop/1079021459
16. Cramer H., Leadbetter M.R. Stationary and Related Stochastic Processes: Sample Function Properties and Their Applications. N. Y.: John Wiley & Sons, 1967.
17. Al-Azzawi S., Liu J., Liu X. Convergence rate of synchronization of systems with additive noise. *Discrete Contin. Dyn. Systems. B*, 2017, Vol. 22, No. 2, pp. 227–245; http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2017012
18. Palamarchuk E. S. Asymptotic behavior of the solution to a linear stochastic differential equation and almost sure optimality for a controlled stochastic process. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, Vol. 54, No. 1, pp. 83–96; https://doi.org/10.1134/S0965542514010114
19. Ozelkan E.C., Galambosi A., Fernandez-Gaucherand E., Duckstein L. Linear quadratic dynamic programming for water reservoir management. *Appl. Math. Model.*, 1997, Vol. 21, No. 9, pp. 591–598; https://doi.org/10.1016/S0307-904X(97)00078-4
20. Huang J., Wang G., Wu Z. Optimal premium policy of an insurance firm: full and partial information. *Insurance: Math. Econom.*, 2010, Vol. 47, No. 2, pp. 208–215; https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2010.04.007
21. Takemura K. Behavioral Decision Theory. Singapore: Springer-Verl., 2021.
22. Palamarchuk E. S. Comparison theorem for a class of Riccati differential equations and its application. *Differ. Equ.*, 2016, Vol. 52, No. 8, pp. 981–986; https://doi.org/10.1134/S0012266116080036