

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год
Том 25, №4(92)
Октябрь - декабрь 2022 г.

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

СОДЕРЖАНИЕ

Аюпова Н. Б., Голубятников В. П., Минушкина Л. С. Об инвариантных поверхностях в фазовых портретах моделей кольцевых генных сетей.....	5
Боронина М. А., Куликов И. М., Черных И. Г., Винс Д. В. Использование комбинации схем Роу и Русанова для численного решения уравнений магнитной гидродинамики в задачах космической плазмы.....	14
Васильев В. И., Кардашевский А. М., Попов В. В. Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности с неоднородными граничными условиями Дирихле.....	27
Демиденко Г. В. Метод решения одной биологической задачи большой размерности.....	42
Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е. Эволюция волновой картины кусочно-линейного одноосного растяжения и сжатия разномодульного упругого стержня.....	54
Ермишина В. Е. Гиперболическая модель сильнонелинейных волн в двухслойных течениях неоднородной жидкости.....	71
Мишин А. В. Учёт обобщённой производной и коллективного влияния фаз на процесс гомогенизации.....	86
Нещадим М. В. Уравнение Лиувилля и точно транзитивные представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$	99
Остросаблин Н. И. Единственность решения граничных задач статических уравнений теории упругости с несимметричной матрицей модулей упругости.....	107
Паламарчук Е. С. Оптимальное управление в задаче долгосрочного трекинга экспоненциального процесса Орнштейна — Уленбека.....	116
Перцев Н. В., Бочаров Г. А., Логинов К. К. Численное моделирование динамики популяции Т-лимфоцитов в лимфоузле.....	136
• Петраков И. Е. Контактная задача изгиба многослойной композитной пластины с учётом различных модулей упругости при растяжении и сжатии.....	153
Селиверстов Е. Ю. Иерархический метод установки параметров параллельных популяционных метаэвристических алгоритмов оптимизации.....	164
Сказка В. В. Кососимметрические разностные аналоги четвёртого порядка аппроксимации первой производной.....	179
Скворцова М. А., Ыскак Т. Оценки решений дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием, описывающих конкуренцию нескольких видов микроорганизмов.....	193
Терсенов Ар. С. О существовании вязких решений анизотропных параболических уравнений с переменными показателями анизотропности.....	206
Чумаков Г. А., Чумакова Н. А. О локализации неустойчивого решения одной системы трёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром.....	221

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 539.378

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ИЗГИБА МНОГОСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЁТОМ РАЗЛИЧНЫХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

© 2022 И. Е. Петраков¹

¹*Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50, строение 44, Красноярск 660036, Россия*

E-mail: petrigr@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию 19.04.2022 г.; после доработки 05.06.2022 г.;
принята к публикации 22.06.2022 г.

Рассматривается контактная задача изгиба многослойной композитной пластины. Каждый слой композита представляет собой материал, армированный тонкими волокнами, расположенными параллельно друг другу. Математическая модель построена исходя из предположений существования в пластине нейтральной поверхности и выполнения гипотез Кирхгофа. При помощи вариационного принципа Лагранжа получено уравнение изгиба, обобщающее уравнение Софи Жермен. Получен функционал упругой энергии, учитывающий различное сопротивление материала растяжению и сжатию. Рассмотрена контактная задача изгиба пластин с помощью жёсткого штампа. Для решения контактной задачи изгиба пластины жёстким штампом построен лагранжиан с ограничением в виде неравенства. Для численного решения задачи применён метод конечных элементов с использованием треугольного элемента Белла. Приводятся результаты расчётов изгиба слоистых пластин прямоугольной формы с разными направлениями укладки волокон и различной формой штампа.

Ключевые слова: волокнистый композит, тонкая пластина, техническая теория пластин, изгибное состояние, контактная задача, разномодульная теория упругости, принцип минимума потенциальной энергии, МКЭ.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.412

ВВЕДЕНИЕ

Композитные материалы обладают сложной внутренней структурой и, как следствие, могут обладать такими свойствами, как разномодульность и разнопрочность, причём не только в различных направлениях (анизотропия), но и при растяжении и сжатии. Это свойство описано и экспериментально подтверждено в классических работах С. А. Амбарцумяна, А. А. Хачатуряна [1] и других авторов [2–5]. В работе [6] показано, что отношение модуля сжатия к модулю растяжения некоторых композитов, армированных стекловолокном, близко к восьми при комнатной температуре, а в работе [7] описано, что гофрированная золотая плёнка имеет асимметричное сопротивление изгибу, и это поведение можно приблизительно смоделировать бимодульной зависимостью между изгибающим моментом и кривизной тонкой золотой плёнки. Другими примерами таких материалов является рассматриваемый в работе углепластик, состоящий из углеродного волокна, расположенного в матрице из полимерных смол, и лёд, армированный геосинтетическими нитями, который применяется при постройке ледовых переправ [8, 9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-31-90032) и Красноярского математического центра (соглашение № 075-02-2022-873 с Минобрнауки РФ).

При построении математических моделей изгиба слоистых пластин из волокнистых композитов необходимо учитывать тот факт, что армирующие волокна, как правило, являются существенно разномодульными. Ранее в работе [10] было показано, что в случае сильного изгиба стержня из композитного материала учёт различного сопротивления растяжению и сжатию имеет принципиальное значение и величина относительной ошибки при вычислении прогиба может достигать 30%, если при вычислении считать модули упругости равными. Существуют различные подходы для моделирования поведения таких материалов: модификация определяющих соотношений [11], получение аналитических решений [12, 13], разработка численных методов [14–16].

В данной работе рассматривается задача изгиба многослойной композитной пластины жёстким штампом. Предполагается, что для пластины выполняются гипотезы Кирхгофа, и в области пластины существует нейтральная плоскость. Исходя из этих предположений получено уравнение изгиба пластины и построен функционал упругой энергии. Для учёта ограничений был применён метод множителей Лагранжа. С помощью алгоритма Удзавы и метода конечных элементов с использованием треугольного элемента Белла производился поиск седловой точки лагранжиана.

1. УРАВНЕНИЕ ИЗГИБА СЛОИСТОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассматриваемая в работе пластина представляет собой пакет из нескольких слоёв, каждый из которых является однонаправленным волокнистым композитом. Волокна в каждом слое параллельны друг другу и для каждого слоя известен угол армирования относительно всей пластины. Будем считать, что слой пластины является трансверсально-изотропным материалом с плоскостью изотропии, расположенной перпендикулярно волокнам армирования.

Выпишем закон Гука для отдельного слоя композитной пластины. Введём декартову систему координат $Ox'_1x'_2x'_3$, связанную с волокнами армирования пластины в недеформированном состоянии так, что x'_1 направлена вдоль волокон армирования, а x'_3 — перпендикулярно плоскости пластины. Для каждого слоя известны следующие характеристики: E_1 — модуль Юнга вдоль волокон армирования, E_2 — модуль Юнга в направлении, перпендикулярном армированию, с соответствующими коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 ; G — модуль сдвига.

Для каждого отдельного слоя в системе координат, связанной с волокнами армирования, можно записать закон Гука для ортотропного материала:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1\nu_2} \begin{pmatrix} E_1 & \nu_1 E_2 & 0 \\ \nu_1 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - \nu_1\nu_2)G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим многослойную пластину в системе координат $Ox_1x_2x_3$, не связанной с направлениями армирования. В данной работе предполагается, что в области пластины существует нейтральная плоскость, в которой отсутствуют деформации. Такое предположение справедливо для некоторых частных случаев изгиба пластин. Для обоснования этого предположения в предыдущих работах проведена серия расчётов цилиндрического изгиба пластин на основе нелинейных уравнений разномодульной теории упругости без привлечения упрощающих гипотез теории пластин. Математическая модель и вычислительный алгоритм, на основе которых были проведены эти расчёты, описаны в работе [17].

В рамках технической теории пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява, в силу малости толщины пластины по сравнению с остальными размерами вектор перемещений может быть выписан следующим образом:

$$u_1 = -(x_3 - \eta) \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = -(x_3 - \eta) \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w(x_1, x_2),$$

где η — положение нейтральной плоскости. Одним из способов задания положения нейтральной плоскости является условие равенства нулю мембранного усилия в направлении укладки волокон. Этот способ рассмотрен в работе [18]. В классической теории пластин нейтральная плоскость совпадает с срединной плоскостью, а в случае учёта различного сопротивления растяжению и сжатию смещается в сторону повышения жёсткости. Компоненты тензора малых деформаций связаны с перемещениями следующей формулой:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Выпишем компоненты тензора малых деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= -(x_3 - \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, & \varepsilon_{22} &= -(x_3 - \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, & \varepsilon_{12} &= -(x_3 - \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \left(-\frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right) = 0, & \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \left(-\frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Зная толщину каждого слоя h_k , получим толщину всей пластины h . Параметр η может принимать значения от нуля до h , что соответствует существованию нейтральной плоскости в области пластины и при $x_3 = \eta$ все компоненты тензора малых деформаций принимают нулевые значения.

Запишем закон Гука для многослойной пластины в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Пусть α_k — угол армирования k -го слоя, $k = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1^k \nu_2^k} R(-\alpha_k) \begin{pmatrix} E_1^k & \nu_1^k E_2^k & 0 \\ \nu_1^k E_2^k & E_2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - \nu_1^k \nu_2^k)G^k \end{pmatrix} R(\alpha_k) \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix},$$

где $R(\alpha)$ — матрица поворота на угол α :

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ -(\sin 2\alpha)/2 & (\sin 2\alpha)/2 & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

В общем виде определяющие уравнения упругой слоистой пластины принимают следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & G_{11} \\ E_{12} & E_{22} & G_{22} \\ G_{11} & E_{22} & G_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Поскольку модуль Юнга в направлении волокон E_1^k может принимать значение модуля Юнга E_1^+ или E_1^- в зависимости от того, в зоне растяжения или сжатия соответственно находится k -й слой, то E_{ij} и G_{ij} являются кусочно-постоянными функциями по толщине пластины. Более подробно модель волокнистого композита, учитывающая разномодульность, рассмотрена в работе [17].

Для нахождения распределения прогибов воспользуемся вариационными принципом Лагранжа. Выпишем функционал упругой энергии:

$$J(w) = \iint_{\Omega} \left(\int_0^h \Phi dx_3 - qw \right) dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left(Qw + M \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds, \quad (3)$$

где $\Phi = (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12})/2$ — потенциал напряжений, Ω — двумерная область с границей Γ , занятая нижней стороной пластины, $q(x_1, x_2)$ — поперечная нагрузка, $Q(x_1, x_2)$ и $M(x_1, x_2)$ — поперечное усилие и изгибающий момент на краях, $\frac{\partial}{\partial n}$ — оператор производной по направлению внешней нормали к границе, ds — элемент дуги. Граничные условия

$$w = w_0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \gamma_0(x_1, x_2) \quad (4)$$

являются неоднородными условиями Дирихле и задают прогиб пластины и угол поворота на границе. Функции Q и M должны быть определены в точках границы Γ , где прогиб и/или угол поворота не задан граничными условиями (4).

Подставив в выражение для потенциала (2) и (1), получим следующий вид функционала (3):

$$J(w) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & F_{11} \\ D_{12} & D_{22} & F_{22} \\ F_{11} & F_{22} & F_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix}^T - qw \, dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left(Qw + M \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds, \quad (5)$$

где D_{ij} и F_{ij} — изгибные жёсткости, которые вычисляются согласно формулам

$$D_{ij} = \int_0^h (x_3 - \eta)^2 E_{ij} dx_3, \quad F_{ij} = \int_0^h (x_3 - \eta)^2 G_{ij} dx_3.$$

Проварьируем функционал (5) и получим следующее дифференциальное уравнение для прогиба:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + (2D_{12} + F_{12}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 2F_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 2F_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} = q.$$

Это уравнение обобщает уравнение Софи Жермен в классической теории пластин для случая различных изгибных жесткостей по разным направлениям. Решение этого уравнения с соответствующими граничными условиями для прогиба позволяет определить напряжённое состояние в плоскости пластины в случаях существования нейтральной поверхности.

2. ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ ЖЁСТКИМ ШТАМПОМ

Рассмотрим задачу минимизации функционала (5). Эта задача эквивалентна вариационному уравнению

$$J(w) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & F_{11} \\ D_{12} & D_{22} & F_{22} \\ F_{11} & F_{22} & F_{12} \end{pmatrix} \delta \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix}^T - q\delta w \, dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left(Q\delta w + M\delta \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds \quad (6)$$

с произвольной в области Ω и равной нулю на части границы, где заданы граничные условия (4) вариацией вектора прогибов δw . Задача минимизации функционала (5) при некоторых

дополнительных требованиях гладкости на функции, входящие в граничные условия, корректно поставлена в пространстве Соболева $H^2(\Omega)$. Согласно теореме Лакса — Мильграма решение существует и единственно поскольку для функционала $J(w, w) = a(w, w)/2 - (f, w)$, $a(w, w)$ является билинейной формой, которая непрерывна и коэрцитивна в H^2 , а (f, w) является непрерывным функционалом.

Рассмотрим численное решение данной задачи методом конечных элементов. Воспользуемся треугольным элементом Белла класса C^1 с 18 степенями свободы. В области Ω строится нерегулярная треугольная сетка и вводится вектор обобщённых координат W размерности $6n$, где n — число узлов сетки, координатами которого служат узловые значения прогиба и его производных первого и второго порядков, т. е.

$$\begin{aligned} W_{6i} &= w(x_i, y_i), & W_{6i+1} &= \frac{\partial w(x_i, y_i)}{\partial x}, & W_{6i+2} &= \frac{\partial w(x_i, y_i)}{\partial y}, \\ W_{6i+3} &= \frac{\partial^2 w(x_i, y_i)}{\partial x^2}, & W_{6i+4} &= \frac{\partial^2 w(x_i, y_i)}{\partial x \partial y}, & W_{6i+5} &= \frac{\partial^2 w(x_i, y_i)}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

где (x_i, y_i) — координаты узла сетки. Ограничение (8) представим в виде совокупности неравенств в узлах сетки $W_{6i} \geq \Phi_i$, где $\Phi_i = \varphi(x_i, y_i)$.

Функционал $J(w)$ представляется в виде суммы интегралов по всем треугольникам сетки:

$$J(W) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \iint_{\Omega_l} (W^l)^T D_l^T K D_l W^l - Q^T W \, dx_1 dx_2,$$

где Ω_l — область l -го конечного элемента, W^l — локальный вектор обобщённых координат, K — матрица изгибных жесткостей, D_l — матрица дифференцирования, Q — глобальный вектор обобщённых сил, верхний индекс T означает транспонирование.

Глобальная матрица жёсткости C составляется путём сложения в определённых позициях элементов локальных матриц жёсткости $C_l = D_l^T K D_l$. В результате получается функционал $J(W) = W^T C/2W - Q^T W$, минимальное значение которого определяется системой уравнений, служащей для вычисления прогибов:

$$\frac{\partial J}{\partial W} \equiv C W - Q = 0. \quad (7)$$

Перейдём к контактной задаче изгиба пластины. Пусть задана функция $\varphi(x, y)$, которая задаёт форму штампа на всей области пластины Ω . Решив задачу минимизации функционала (5) с граничными условиями (4) и ограничением в виде неравенства

$$w(x, y) \geq \varphi(x, y), \quad (8)$$

получим распределение прогибов пластины.

Для решения этой задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа. Запишем лагранжиан, который представляется в виде суммы интегралов по всем треугольникам сетки:

$$L(W, \Lambda) = \Lambda_0 \sum_{l=1}^m \iint_{\Omega_l} (W^l)^T D_l^T K D_l W^l - Q^T W + \Lambda^T (\Phi - W) \, dx_1 dx_2,$$

где Λ — вектор множителей Лагранжа. Записав глобальную матрицу, получим функционал

$$L(W, \Lambda) = \Lambda_0 W^T C W - Q^T W + \Lambda(\Phi - W).$$

Поскольку $L(W, \Lambda)$ является квадратичным функционалом по W , а матрица C обладает диагональным преобладанием и является положительно определённой, то согласно теореме Куна — Таккера [20] для того, чтобы W^* являлся минимумом $J(W)$, необходимо, чтобы для неотрицательных множителей Λ выполнялись условия дополняющей нежесткости и стационарности. Для выполнения строгого неравенства $\Lambda_0 > 0$ достаточно выполнения условия Слейтера: должен существовать \widetilde{W} такой, что $\Phi - \widetilde{W} < 0$. Введём следующие требования для функции φ : $\varphi \in H^2(\Omega)$, и существует c : $w_0 \geq \varphi + c$. Возьмём $\widetilde{W} = w_0$ на границе Γ и $\widetilde{w} = \varphi + c$ в области Ω , тогда условие Слейтера выполняется. Для определённости возьмём $\lambda_0 = 1$. При выполнении условия Слейтера пара w^*, λ^* удовлетворяет всем перечисленным ограничениям тогда и только тогда, когда (w^*, λ^*) является седловой точкой лагранжиана $L(w, \lambda)$.

Для нахождения седловой точки воспользуемся алгоритмом Удзавы [20]. Алгоритм заключается в последовательном вычислении $\Lambda^1, W^1, \Lambda^2, W^2, \dots$ и состоит из следующих шагов:

1. Выбирается произвольное начальное приближение Λ^0 .
2. При фиксированном Λ^i ищется W^i , при котором достигается минимум лагранжиана, исходя из уравнения $\frac{\partial L}{\partial W} = 0$.

3. Определяется Λ^{i+1} из уравнения $\frac{\partial L}{\partial \Lambda} = 0$.

Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия $|\Lambda^{i+1} - \Lambda^i| \leq \tau \varepsilon$, где ε — заданная точность.

Вычисления второго шага алгоритма Удзавы выполнялись с помощью метода конечных элементов. Минимальное значение лагранжиана при фиксированном векторе Λ^i определяется системой уравнений, служащей для вычисления прогибов W^i :

$$\frac{\partial L}{\partial W} \equiv C W - Q - \Lambda^i = 0. \quad (9)$$

На третьем шаге алгоритма Удзавы вычисления производились с помощью метода простой итерации. При фиксированном W^i приравняем частную производную лагранжиана по Λ к нулю: $\frac{\partial L}{\partial \Lambda} \equiv \Phi - W^i = 0$. Вычислим Λ^{i+1} по следующей формуле: $\Lambda^{i+1} = P_+(\Lambda^i + \tau(\Phi - W^i))$, где τ — итерационный параметр, P_+ — проекция на положительную часть числовой оси. Итерационный параметр τ выбирался как среднее между итерационными параметрами для каждого элемента вектора W при их поиске методом простой итерации.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Компьютерная программа, реализующая метод конечных элементов и поиск седловой точки, составлена на языке программирования Python. Для решения системы уравнений (9) в ней используются встроенные библиотечные процедуры. Глобальная матрица жёсткости является сильно разрежённой, содержит около 95% нулей, поэтому для её хранения применяются специальные структуры для работы с разрежёнными матрицами [21].

При проведении вычислительных экспериментов были рассмотрены двухслойные композитные пластины размером 100×100 мм с толщиной слоёв $h = 5$ мм. Параметры упругости взяты для углепластика с объёмным содержанием армирующего углеграфитового волокна 50%: $E_1^+ = 114$, $E_1^- = 57$, $E_2 = 6$, $G = 3.5$ ГПа, $\nu_1 = 0.19$, $\nu_2 = 0.02$. В случаях учёта разномодульности параметр η принят равным $0.59 h$ исходя из расчётов, проведённых для композитных балок. Для всех представленных в работе примеров расчётов были взяты следующие граничные условия: на двух противоположных сторонах заданы условия жёсткого закрепления $w_0 = 0$ и $\gamma_0 = 0$, на двух других сторонах заданы условия, соответствующие свободному краю $Q = 0$ и $M = 0$.

Чтобы показать важность учёта разного сопротивления материала растяжению и сжатию, была проведена серия вычислительных экспериментов, в которых параметры упругости композита при сжатии считались равными параметрам упругости при растяжении.

На рис. 1 изображён прогиб пластины с конфигурацией слоёв $(90^\circ, 0^\circ)$ под действием штампа $\varphi_3 = 0.002$ при $0.04 < x_1 < 0.06$, $0.04 < x_2 < 0.06$ и $\varphi_3 = -0.001$ в остальных точках. Пластина жёстко закреплена по двум боковым сторонам. При расчёте модуль Юнга при сжатии считался равным 114 ГПа, т. е. равен модулю при растяжении. На рис. 2 показано сравнение линий уровня прогиба при расчётах с учётом разномодульности и без учёта. В случае неучёта пластина считается более жёсткой и прогиб от воздействия штампа уменьшается.

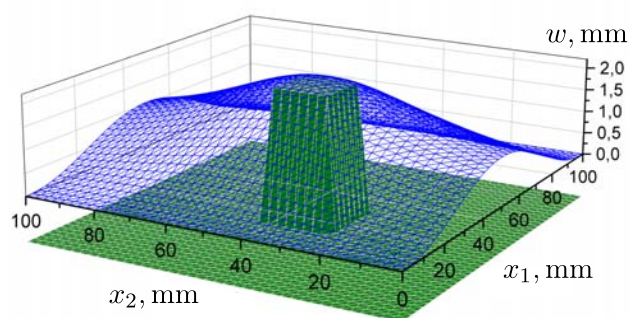


Рис. 1. Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоёв $(90^\circ, 0^\circ)$ под действием штампа φ_3 без учёта разномодульности

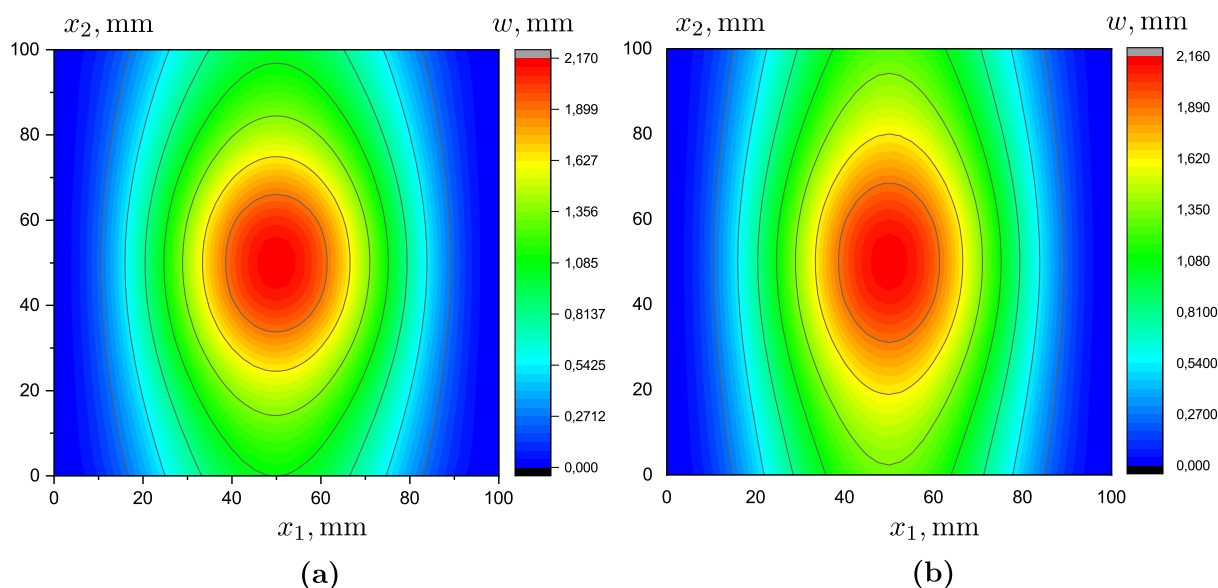


Рис. 2. Линии уровня прогиба без учёта (а) и при учёте разномодульности (б)

В последней серии вычислительных экспериментов было показано влияние направления армирования на прогиб пластины. Рассматривались пластины с конфигурациями слоёв $(0^\circ, 90^\circ)$ и $(90^\circ, 0^\circ)$ под действием штампа $\varphi_4 = 0.002$ при $0.03 < x_1 < 0.07$, $0.03 < x_2 < 0.07$ и $\varphi_4 = -0.001$ в остальных точках, жёстко закреплённые во двум противоположным боковым сторонам. На рис. 3 показан прогиб пластины с конфигурацией $(0^\circ, 90^\circ)$, а на рис. 4 $(90^\circ, 0^\circ)$. Можно заметить, что величина прогиба на свободной части границы значительно больше в случае армирования верхнего слоя под углом 90° к оси x_1 , поскольку пластина

в этом случае закреплена в направлении, перпендикулярном направлению армирования растягиваемого слоя.

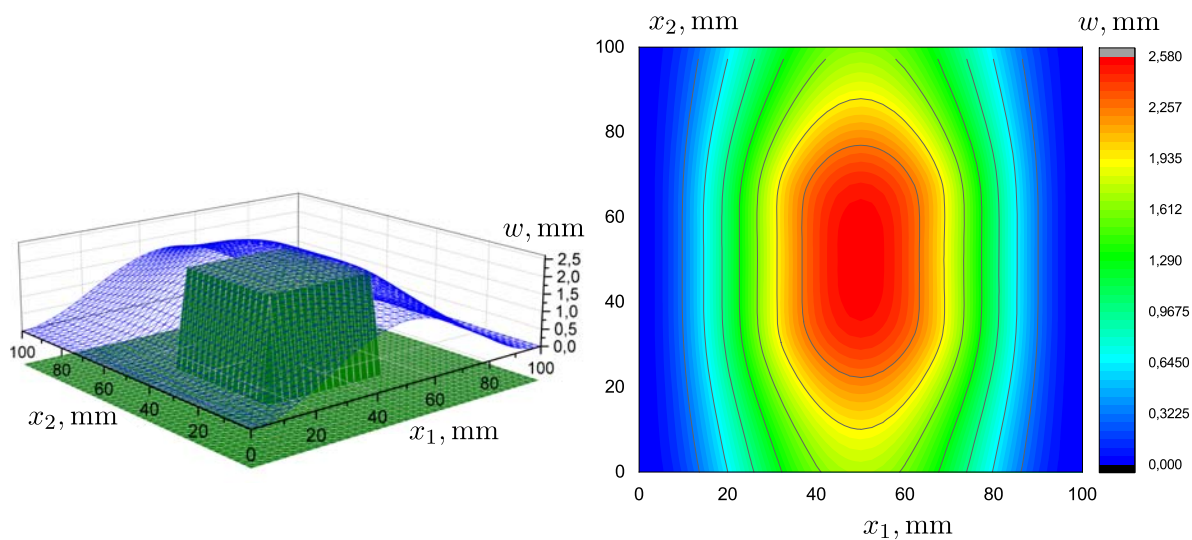


Рис. 3. Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоёв ($0^\circ, 90^\circ$) под действием штампа φ_4

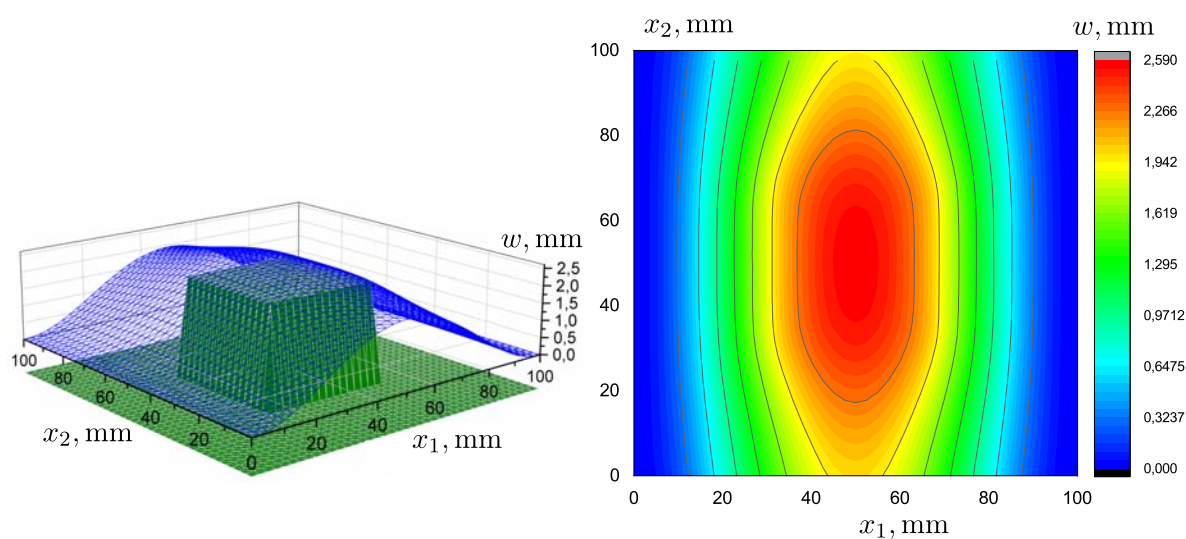


Рис. 4. Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоёв ($90^\circ, 0^\circ$) под действием штампа φ_4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено уравнение изгиба, обобщающее уравнение Софи Жермен, и функционал упругой энергии, учитывающий различное сопротивление материала растяжению и сжатию. Разработан вычислительный алгоритм решения контактной задачи для многослойной композитной пластины, учитывающий различное сопротивление материала растяжению и сжатию. Проведена серия вычислительных экспериментов, в результате которых показано влияние разномодульности и направления армирования на прогиб композитной пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. К разномодульной теории упругости // Инж. журн. Механика твёрдого тела. 1966. № 6. С. 64–67.
2. Матченко Н.М., Толоконников Л.А. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1968. № 6. С. 108–111.
3. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. М.: Наука, 1985.
4. Бессонов Д.Е., Зезин Ю.П., Ломакин Е.В. Разносопротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров // Изв. Саратовю госю ун-та. Новая сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, № 4(2). С. 9–13.
5. Meng M., Le H.R., Rizvi M.J., Grove S.M. The effects of unequal compressive/tensile moduli of composites // Composite Structures. 2015. V. 126. P. 207–215.
6. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982
7. Sun J.Y., Xia S., Moon M.W., Oh K.H., Kim K.S. Folding wrinkles of a thin stiff layer on a soft substrate // Proc. Royal Soc. A: Math., Phys. Engrg Sci. 2012. V. 468, N 2140. P. 932–953.
8. Ипатов К.И., Васильев А.С., Земляк В.Л. Исследование влияния поверхностного армирования на несущую способность льда // Вычисл. механика сплошных сред. 2019. Т. 12, № 1. С. 98–105.
9. Якименко О.В., Сиротюк В.В. Усиление ледовых переправ геосинтетическими материалами: монография. Омск: изд. СибАДИ, 2015.
10. Annin B.D., Sadovskii V.M., Petrakov I.E., Vlasov A.Yu. Strong bending of a beam from a fibrous composite, differently resistant to tension and compression // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys. 2019. V. 12, N 5. P. 533–542.
11. Patel B.P., Khan K., Nath Y. A new constitutive model for bimodular laminated structures: application to free vibrations of conical/cylindrical panels // Composite Structures. 2014. V. 110. P. 183–191.
12. He X., Sun J., Wang Z., Chen Q., Zheng Z. General perturbation solution of large-deflection circular plate with different moduli in tension and compression under various edge conditions // Internat. J. Nonlinear Mech. 2013. V. 55, P. 110–119.
13. Rosakis P., Notbohm J., Ravichandran G. A model for compression-weakening materials and the elastic fields due to contractile cells // J. Mech. Phys. Solids. 2015. V. 85. P. 16–32.
14. Yang H.T., Wang B. An analysis of longitudinal vibration of bimodular rod via smoothing function approach // J. Sound and Vibration. 2008. V. 317. P. 419–431.
15. Zhang L., Gao Q., Zhang H.W. An efficient algorithm for mechanical analysis of bimodular truss and tensegrity structures // Internat. J. Mech. Sci. 2013. V. 70. P. 57–68.
16. Zhang L., Dong K. J., Zhang H.T., Yan B. A 3D PVP co-rotational formulation for large-displacement and small-strain analysis of bi-modulus materials // Finite Elements in Analysis and Design. 2015. V. 110. P. 20–31.
17. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Petrakov I.E. On the theory of constitutive equations for composites with different resistance in compression and tension // Composite Structures. 2021. V. 268. Article 113921.
18. Петраков И.Е., Садовский В.М., Садовская О.В. Анализ изгиба композитных пластин с учётом различия сопротивлений растяжению и сжатию // Прикл. математика и техн. физика. 2021. Т. 62, № 5. С. 172–183.
19. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
20. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
21. Писсанецки С. Технология разрежённых матриц. М.: Мир, 1988.

UDC 539.378

**CONTACT PROBLEM OF BENDING OF A MULTILAYER COMPOSITE
PLATE TAKING INTO ACCOUNT DIFFERENT MODULI
OF ELASTICITY FOR TENSION AND COMPRESSION**

© 2022 I. E. Petrakov^a

*Institute of Computational Modeling SB RAS,
Akademgorodok 50, str. 44, Krasnoyarsk 660036, Russia*

E-mail: petrigr@icm.krasn.ru

Received 19.04.2022, revised 05.06.2022, accepted 22.06.2022

Abstract. The paper considers the contact problem of bending a multilayer composite plate. Each layer of the composite is a material reinforced with thin parallel fibers. The mathematical model is constructed based on the assumptions of the existence of a neutral surface in the plate and the fulfillment of Kirchhoff's hypotheses. Using the Lagrange variational principle, the bending equation generalizing the Sophie—Germain equation is obtained. The elastic energy functional is obtained taking into account the different resistance of the material to tension and compression. The contact problem of bending plates and membranes with the of a rigid contact is considered. To solve the contact problem of bending a plate with a rigid stamp, a Lagrangian was constructed with a constraint in the form of an inequality. For the numerical solution of the problem, the finite element method using the triangular Bell element was applied. The results of calculations of the bending of laminated rectangular plates with different directions of fiber laying and different shapes of the stamp are presented.

Keywords: fibrous composite, thin plate, technical theory of the plates, bending state, contact problem, multi-modulus theory of elasticity, principle of minimum potential energy, FEM.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.412

REFERENCES

1. Ambarcumyan S.A., Hachatrjan A. A. K raznomodul'noi teorii uprugosti [On the multi-modulus theory of elasticity]. *Inzh. Zhurn. Mehanika Tverdogo Tela*, 1966, No. 6, pp. 64–67 (in Russian).
2. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A. O svyazi mezhdu napryazheniyami i deformatsiyami v raznomodul'nykh izotropnykh sredakh [On the relation between stresses and strains in isotropic media of different modulus]. *Izv. AN SSSR. Mehanika Tverdogo Tela.*, 1968, No. 6, pp. 108–111 (in Russian).
3. Kravchuk A.S., Majboroda V.P., Urzhumcev Ju.S. Mekhanika polimernykh kompozitsionnykh materialov. Eksperimental'nye i chislennyye metody [Mechanics of polymer composite materials. Experimental and numerical methods]. Moscow: Nauka, 1985 (in Russian).
4. Bessonov D.E., Zezin Ju.P., Lomakin E.V. Raznosoprotivlyaemost' zernistykh kompozitov na osnove nenasyshchennykh poliefirov [Differential resistance of granular composites based on unsaturated polyesters]. *Izv. Saratov. Gos. Un-ta. Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2009, Vol. 9, No. 4(2), pp. 9–13 (in Russian).
5. Meng M., Le H.R., Rizvi M.J., Grove S.M. The effects of unequal compressive/tensile moduli of composites. *Composite Structures*, 2015, Vol. 126, pp. 207–215.
6. Ambarcumyan S.A. Raznomodul'naya teoriya uprugosti [Multimodular theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).

7. Sun J.Y., Xia S., Moon M.W., Oh K.H., Kim K.S. Folding wrinkles of a thin stiff layer on a soft substrate. *Proc. Royal Soc. A: Math., Phys. Engrg. Sci.*, 2012, Vol. 468, No. 2140, pp. 932–953.
8. Ipatov K.I., Vasil'ev A.S., Zemljak V.L. Issledovanie vliyaniya poverkhnostnogo armirovaniya na nesushchuyu sposobnost' l'da [Study of the influence of surface reinforcement on the bearing capacity of ice]. *Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred*, 2019, Vol. 12, No. 1, pp. 98–105 (in Russian).
9. Jakimenko O.V., Sirotjuk V.V. Usilenie ledovykh pereprav geosinteticheskimi materialami [Strengthening ice crossings with geosynthetic materials]. Omsk: SibADI, 2015 (in Russian).
10. Annin B.D., Sadovskii V.M., Petrakov I.E., Vlasov A.Yu. Strong bending of a beam from a fibrous composite, differently resistant to tension and compression. *J. Siberian Federal Univ. Math. Phys.*, 2019, Vol. 12, No. 5, pp. 533–542.
11. Patel B.P., Khan K., Nath Y. A new constitutive model for bimodular laminated structures: application to free vibrations of conical/cylindrical panels. *Composite Structures*, 2014, Vol. 110, pp. 183–191.
12. He X., Sun J., Wang Z., Chen Q., Zheng Z. General perturbation solution of large-deflection circular plate with different moduli in tension and compression under various edge conditions. *Internat. J. Nonlinear Mech.*, 2013, Vol. 55, pp. 110–119.
13. Rosakis P., Notbohm J., Ravichandran G. A model for compression-weakening materials and the elastic fields due to contractile cells. *J. Mech. Phys. Solids*, 2015, Vol. 85, pp. 16–32.
14. Yang H.T., Wang B. An analysis of longitudinal vibration of bimodular rod via smoothing function approach. *J. Sound and Vibration*, 2008, Vol. 317, pp. 419–431.
15. Zhang L., Gao Q., Zhang H.W. An efficient algorithm for mechanical analysis of bimodular truss and tensegrity structures. *Internat. J. Mech. Sci.*, 2013, Vol. 70, pp. 57–68.
16. Zhang L., Dong K. J., Zhang H.T., Yan B. A 3D PVP co-rotational formulation for large-displacement and small-strain analysis of bi-modulus materials. *Finite Elements Anal. Design*, 2015, Vol. 110, pp. 20–31.
17. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Petrakov I.E. On the theory of constitutive equations for composites with different resistance in compression and tension. *Composite Structures*, 2021, Vol. 268, article 113921.
18. Petrakov I.E., Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Analiz izgiba kompozitnykh plastin s uchetom razlichiya soprotivlenii rastyazheniyu i szhatiyu [Analysis of the bending of composite plates, taking into account the difference in tensile and compression resistances]. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 2021, Vol. 62, No. 5 pp. 172–183 (in Russian).
19. Mihajlov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial differential equations]. Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).
20. Jekland I., Temam R. *Vypuklyi analiz i variatsionnye problemy* [Convex analysis and variational problems]. Moscow: Mir, 1979 (in Russian).
21. Pissanecki S. *Tekhnologiya razrezhenykh matrits* [Sparse matrix technology]. Moscow: Mir, 1988 (in Russian).