СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год
Том 25, №4(92)
Октябрь - декабрь 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2022. Т. 25, № 4. С. 193–205

УДК 517.929.4

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ОПИСЫВАЮЩИХ КОНКУРЕНЦИЮ НЕСКОЛЬКИХ ВИДОВ МИКРООРГАНИЗМОВ

© 2022 **М. А. Скворцова**[a], **Т. Ыскак**[b]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]sm-18-nsu@yandex.ru, [b]istima92@mail.ru

Поступила в редакцию 20.06.2022 г.; после доработки 20.06.2022 г.;
принята к публикации 22.06.2022 г.

Рассматривается модель конкуренции n видов в хемостате. Данная модель является системой из $n+1$ дифференциальных уравнений с бесконечным распределённым запаздыванием. Одно уравнение отвечает за изменение концентрации питательного вещества, а остальные n — за изменение численности видов. Преобразование питательного вещества в жизнеспособные клетки происходит не моментально и требует некоторого времени, которое учитывается наличием запаздывания. При условии, когда концентрация вводимого питательного вещества ниже определённого уровня, были построены функционалы Ляпунова — Красовского, с помощью которых были получены оценки для всех компонент решений. Оценки характеризуют скорости вымирания всех видов в хемостате и скорость стабилизации концентрации питательного вещества к постоянной величине концентрации.

Ключевые слова: модель конкуренции видов, хемостат, уравнения с запаздывающим аргументом, бесконечное распределённое запаздывание, оценки решений, функционалы Ляпунова — Красовского.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.415

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом возникают во многих областях при моделировании реальных процессов, в том числе в биологии (см., например, монографии [1–4] и имеющуюся там литературу). В настоящей работе мы рассмотрим одну из моделей конкуренции видов в хемостате. Хемостат — это аппарат для непрерывного культивирования бактерий, обеспечивающий оптимальные температурные условия, в который постоянно добавляется свежая питательная среда, в то время как оставшиеся питательные вещества, конечные продукты метаболизма и микроорганизмы непрерывно удаляются с той же скоростью. Хемостат состоит из трёх основных частей: герметичного резервуара, заполненного питательным веществом (субстратом), устройства подачи питающего субстрата и отверстия для выхода приросшей биомассы. Обзоры результатов, посвящённых моделированию процессов, происходящих в хемостате с помощью дифференциальных уравнений с запаздыванием, содержатся, например, в работах [5, 6].

В настоящей работе рассматривается модель конкуренции n видов в хемостате, предложенная в [7]. Модель является системой дифференциальных уравнений с бесконечным рас-

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке (соглашение № 075-15-2022-281 с Минобрнауки РФ).

пределённым запаздыванием и имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}S(t) = (S^0 - S(t))D - \sum_{i=1}^{n} x_i(t)p_i(S(t)),$$
$$\frac{d}{dt}x_i(t) = -Dx_i(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} x_i(\theta)p_i(S(\theta))e^{-D(t-\theta)}K_i(t-\theta)\,d\theta, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где

$$K_i(s) = \frac{\alpha_i^{r_i+1}s^{r_i}}{r_i!}e^{-\alpha_i s}, \quad s > 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

$\alpha_i > 0$, $r_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Здесь $S(t)$ — концентрация питательного вещества (субстрата), $x_i(t)$ — концентрация i-й популяции микроорганизмов в хемостате. Коэффициенты имеют следующий смысл: $D > 0$ — скорость поступления питательного вещества, $S^0 > 0$ — концентрация вводимого питательного вещества в резервуаре. Показатели смертности, характерные для видов, считаются незначительными по сравнению со скоростью поступления питательного вещества и в данной модели не учитываются. Каждое ядро $K_i(s)$ связано с преобразованием питательного вещества в жизнеспособные клетки. Функции поглощения питательных веществ $p_i(\xi)$ предполагаются строго монотонно возрастающими, локально липшицевыми, при этом $p_i(0) = 0$.

Вместе с системой (1) рассмотрим начальные условия

$$\begin{gathered} S(t) = \varphi_0(t), \quad t < 0, \quad S(+0) = \varphi_0(0), \\ x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t < 0, \quad x_i(+0) = \varphi_i(0), \quad i = 1, \dots, n, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\varphi_i(t) \in C((-\infty, 0])$, $i = 0, 1, \dots, n$, — заданные непрерывные ограниченные функции. Также предполагается, что начальные данные неотрицательны:

$$\varphi_i(t) \geqslant 0, \quad t \leqslant 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{4}$$

Отметим, что начальная задача (1), (3) однозначно разрешима. В [7] было показано, что при условии (4) компоненты решения начальной задачи (1), (3) неотрицательны при всех $t > 0$ и ограничены сверху. Всюду далее будем предполагать, что условие (4) выполнено.

Отметим, что у системы (1) имеется положение равновесия $(S^0, 0, \dots, 0)$, соответствующее полному вымиранию всех видов. В работе [7] было показано, что если при некотором $i = 1, \dots, n$ выполнено условие

$$p_i(S^0) \leqslant D\left(\frac{D + \alpha_i}{\alpha_i}\right)^{r_i+1}, \tag{5}$$

то компонента $x_i(t)$ решения начальной задачи (1), (3) стремится к нулю при $t \to +\infty$. Более того, было установлено, что если неравенство (5) справедливо для всех $i = 1, \dots, n$, то для решения начальной задачи (1), (3) имеет место сходимость

$$(S(t), x_1(t), \dots, x_n(t)) \to (S^0, 0, \dots, 0) \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Цель данной работы состоит в получении оценок, характеризующих скорость сходимости решений к положению равновесия $(S^0, 0, \dots, 0)$.

Стоит отметить, что для систем с запаздывающим аргументом при проведении исследований в данном направлении активно применяются функционалы Ляпунова — Красовского (для уравнений с сосредоточенным запаздыванием см., например, [8–20], для уравнений с ограниченным распределённым запаздыванием см., например, [21–24]). В настоящей работе мы будем использовать аналоги функционалов из [21–24] для случая бесконечного распределённого запаздывания. Данная работа продолжает исследования [25–31] асимптотических свойств решений биологических моделей.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть* $(S(t), x_1(t), \dots, x_n(t))$ *— решение начальной задачи* (1), (3). *Тогда для первой компоненты решения* $S(t)$ *справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $\varphi_0(0) \geqslant 0$, *то*

$$0 \leqslant S(t) \leqslant S^0 + (\varphi_0(0) - S^0)e^{-Dt}, \quad t > 0; \tag{6}$$

2) *если* $0 \leqslant \varphi_0(0) \leqslant S^0$, *то*

$$0 \leqslant S(t) \leqslant S^0, \quad t > 0. \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку $\varphi_i(t) \geqslant 0$ при $t \leqslant 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, то все компоненты решения $(S(t), x_1(t), \dots, x_n(t))$ неотрицательны при $t > 0$. Следовательно, из первого уравнения системы (1) вытекает неравенство $\dfrac{d}{dt}S(t) \leqslant (S^0 - S(t))D$. Из данного неравенства следует справедливость оценки (6). Если при этом $\varphi_0(0) \leqslant S^0$, то оценка (7) является следствием оценки (6). Лемма доказана. $\square$

Для получения оценок на компоненты $x_i(t)$ решения начальной задачи (1), (3) мы будем использовать функционалы Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$v_i(t, x_i) = x_i^2(t) + \int\limits_0^\infty \int\limits_{t-\theta}^t Q_i(t, \eta, \theta) x_i^2(\eta)\, d\eta d\theta, \quad i = 1, \dots, n, \tag{8}$$

где функции $Q_i(t, \eta, \theta)$ будут определены ниже.

Теорема 1. *Пусть* $(S(t), x_1(t), \dots, x_n(t))$ *— решение начальной задачи* (1), (3) *и при некотором* $i = 1, \dots, n$ *выполнено неравенство*

$$p_i(S^0) < D\left(\frac{\alpha_i + D}{\alpha_i}\right)^{r_i+1}. \tag{9}$$

Выберем число $k_i > 0$ *так, что*

$$p_i(S^0) < D\left(\frac{\alpha_i + D - k_i/2}{\alpha_i}\right)^{r_i+1}. \tag{10}$$

1. *Если* $\varphi_0(t) \leqslant S^0$ *при всех* $t \leqslant 0$, *то справедлива оценка*

$$x_i^2(t) \leqslant e^{-\delta_i t} v_i(0, \varphi_i), \quad t > 0, \tag{11}$$

где

$$\delta_i = \min\left\{2D - 2p_i(S^0)\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i + D - k_i/2}\right)^{r_i+1}, k_i\right\}, \tag{12}$$

$$v_i(0, \varphi_i) = \varphi_i^2(0) + \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\theta}^0 p_i(S^0) e^{k_i\eta} e^{(\frac{k_i}{2} - D)\theta} K_i(\theta) \varphi_i^2(\eta)\, d\eta d\theta.$$

2. *Если* $\varphi_0(0) \leqslant S^0$ *и существует* $t^* < 0$ *такое, что* $\varphi_0(t^*) > S^0$, *то справедлива оценка*

$$x_i^2(t) \leqslant e^{J_i} e^{-\delta_i t} v_i(0, \varphi_i), \quad t > 0, \tag{13}$$

где

$$J_i = \frac{p_i^2(\Phi) - p_i^2(S^0)}{p_i(S^0)} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i + D - k_i/2} \right)^{r_i+1} \frac{(r_i+1)}{(\alpha_i + D - k_i/2)}, \tag{14}$$

$$\Phi = \sup_{s \leqslant 0} \varphi_0(s). \tag{15}$$

3. *Если* $\varphi_0(0) > S^0$, *то справедлива оценка*

$$x_i^2(t) \leqslant e^{J_i + G_i} e^{-\delta_i t} v_i(0, \varphi_i), \quad t > 0, \tag{16}$$

где

$$G_i = L_i(\varphi_0(0) - S^0) \frac{p_i(\varphi_0(0)) + p_i(S^0)}{p_i(S^0)} \frac{\alpha_i^{r_i+1}}{(\min\{D, (\alpha_i + D - k_i/2)\})^{r_i+2}}, \tag{17}$$

$L_i > 0$ — *такая константа Липшица, что справедливо неравенство*

$$p_i(\xi_2) - p_i(\xi_1) \leqslant L_i(\xi_2 - \xi_1), \quad S^0 \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \varphi_0(0). \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $x_i(t)$ — i-я компонента решения начальной задачи (1), (3). Рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского (8), где

$$Q_i(t, \eta, \theta) = p_i(S^0) e^{-k_i(t-\eta)} e^{(k_i/2 - D)\theta} K_i(\theta).$$

Вначале покажем, что интеграл

$$I(t) = \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t Q_i(t, \eta, \theta) x_i^2(\eta) \, d\eta d\theta$$

сходится. Действительно, поскольку компоненты решения начальной задачи (1), (3) являются ограниченными функциями, то для некоторого $M_i > 0$ справедливо неравенство

$$I(t) \leqslant M_i^2 \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t Q_i(t, \eta, \theta) \, d\eta d\theta = \frac{M_i^2 p_i(S^0)}{k_i} \int_0^\infty (e^{(k_i/2 - D)\theta} - e^{-(k_i/2 + D)\theta}) K_i(\theta) \, d\theta.$$

Учитывая определение (2) функции $K_i(\theta)$ и условие (10), нетрудно заметить, что интеграл в правой части сходится, так как согласно (10) $k_i/2 < \alpha_i + D$. Аналогичным образом нетрудно проверить, что интеграл $I(t)$ является дифференцируемой функцией.

Вычислим производную функционала (8) вдоль решения начальной задачи (1), (3):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} v_i(t, x_i) = 2x_i(t) \biggl(-Dx_i(t) + \int_{-\infty}^t x_i(\theta) p_i(S(\theta)) e^{-D(t-\theta)} K_i(t-\theta) \, d\theta \biggr) \\
+ \int_0^\infty p_i(S^0) e^{(k_i/2 - D)\theta} K_i(\theta) x_i^2(t) \, d\theta - \int_0^\infty p_i(S^0) e^{-k_i\theta} e^{(k_i/2 - D)\theta} K_i(\theta) x_i^2(t-\theta) \, d\theta \\
- k_i \int_0^\infty \int_{t-\theta}^t Q_i(t, \eta, \theta) x_i^2(\eta) \, d\eta d\theta.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{t} x_i(\theta)p_i(S(\theta))e^{-D(t-\theta)}K_i(t-\theta)\,d\theta = \int_{0}^{\infty} x_i(t-\xi)p_i(S(t-\xi))e^{-D\xi}K_i(\xi)\,d\xi,$$

то производную от функционала $v_i(t,x_i)$ можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}v_i(t,x_i) = x_i^2(t)\left(-2D + p_i(S^0)\int_0^\infty e^{(k_i/2-D)\xi}K_i(\xi)\,d\xi \right)$$
$$+\int_0^\infty \big(2p_i(S(t-\xi))x_i(t)x_i(t-\xi) - p_i(S^0)e^{-k_i\xi/2}x_i^2(t-\xi)\big)e^{-D\xi}K_i(\xi)\,d\xi$$
$$- k_i\int_0^\infty\int_{t-\theta}^{t} Q_i(t,\eta,\theta)x_i^2(\eta)\,d\eta d\theta.$$

В силу неравенства

$$2p_i(S(t-\xi))x_i(t)x_i(t-\xi) - p_i(S^0)e^{-k_i\xi/2}x_i^2(t-\xi) \leqslant \frac{p_i^2(S(t-\xi))}{p_i(S^0)}e^{k_i\xi/2}x_i^2(t)$$

имеем оценку

$$\frac{d}{dt}v_i(t,x_i) \leqslant x_i^2(t)\left(-2D + 2p_i(S^0)\int_0^\infty e^{(k_i/2-D)\xi}K_i(\xi)\,d\xi \right)$$
$$- k_i\int_0^\infty\int_{t-\theta}^{t} Q_i(t,\eta,\theta)x_i^2(\eta)\,d\eta d\theta + x_i^2(t)\int_0^\infty \frac{p_i^2(S(t-\xi)) - p_i^2(S^0)}{p_i(S^0)}e^{(k_i/2-D)\xi}K_i(\xi)\,d\xi.$$

Поскольку

$$\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}dt = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \quad \lambda>0, \tag{19}$$

то, используя явный вид (2) функции $K_i(\xi)$, будем иметь

$$\int_0^\infty e^{(k_i/2-D)\xi}K_i(\xi)\,d\xi = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i + D - k_i/2}\right)^{r_i+1}.$$

Следовательно, учитывая обозначение (12) величины δ_i и определение (8) функционала $v_i(t,x_i)$, получим оценку

$$\frac{d}{dt}v_i(t,x_i) \leqslant -\delta_i v_i(t,x_i) + h_i(t)x_i^2(t), \tag{20}$$

где

$$h_i(t) = \int_0^\infty \frac{p_i^2(S(t-\xi)) - p_i^2(S^0)}{p_i(S^0)}e^{(k_i/2-D)\xi}K_i(\xi)\,d\xi. \tag{21}$$

1. Если $\varphi_0(t) \leqslant S^0$ при всех $t \leqslant 0$, то в силу леммы 1 $S(t) \leqslant S^0$ при $t > 0$, следовательно, $h_i(t) \leqslant 0$, т. к. $p_i(\xi)$ — монотонно возрастающая функция. Тогда из (20) следует неравенство $v_i(t, x_i) \leqslant e^{-\delta_i t} v_i(0, \varphi_i)$, откуда вытекает оценка (11).

2. Если $\varphi_0(0) \leqslant S^0$ и существует $t^* < 0$ такое, что $\varphi_0(t^*) > S^0$, то в силу леммы 1 $S(t) \leqslant S^0$ при $t > 0$. Следовательно, из (21) имеем оценку

$$h_i(t) \leqslant \int\limits_t^\infty \frac{p_i^2(S(t-\xi)) - p_i^2(S^0)}{p_i(S^0)} e^{(k_i/2-D)\xi} K_i(\xi)\, d\xi \leqslant \frac{p_i^2(\Phi) - p_i^2(S^0)}{p_i(S^0)} \int\limits_0^\infty e^{(k_i/2-D)(t+\theta)} K_i(t+\theta)\, d\theta,$$

где Φ определено в (15). Используя явный вид (2) функции $K_i(t+\theta)$ и формулу (19), будем иметь

$$\int\limits_0^\infty e^{(k_i/2-D)(t+\theta)} K_i(t+\theta)\, d\theta = \alpha_i^{r_i+1} e^{-(\alpha_i+D-k_i/2)t} \sum_{j=0}^{r_i} \frac{t^j}{j!(r_i-j)!} \int\limits_0^\infty \theta^{r_i-j} e^{-(\alpha_i+D-k_i/2)\theta}\, d\theta = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i+D-k_i/2}\right)^{r_i+1} \sum_{j=0}^{r_i} \frac{(\alpha_i+D-k_i/2)^j}{j!} t^j e^{-(\alpha_i+D-k_i/2)t}.$$

Отсюда получим неравенство $h_i(t) \leqslant g_{1i}(t)$, где

$$g_{1i}(t) = \frac{p_i^2(\Phi) - p_i^2(S^0)}{p_i(S^0)} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i+D-k_i/2}\right)^{r_i+1} \sum_{j=0}^{r_i} \frac{(\alpha_i+D-k_i/2)^j}{j!} t^j e^{-(\alpha_i+D-k_i/2)t}. \tag{22}$$

Тогда из неравенства (20) вытекает оценка

$$\frac{d}{dt} v_i(t, x_i) \leqslant -\delta_i v_i(t, x_i) + g_{1i}(t) v_i(t, x_i),$$

откуда следует неравенство

$$v_i(t, x_i) \leqslant \exp\left(\int\limits_0^t g_{1i}(s)\, ds\right) e^{-\delta_i t} v_i(0, \varphi_i) \leqslant \exp\left(\int\limits_0^\infty g_{1i}(s)\, ds\right) e^{-\delta_i t} v_i(0, \varphi_i) = e^{J_i} e^{-\delta_i t} v_i(0, \varphi_i),$$

где J_i определено в (14). Из этой оценки непосредственно вытекает (13).

3. Пусть $\varphi_0(0) > S^0$. Оценим функцию $h_i(t)$ из (21). Проводя те же рассуждения, что и в предыдущем случае, нетрудно установить оценку

$$h_i(t) \leqslant g_{1i}(t) + \int\limits_0^t \frac{p_i^2(S(t-\xi)) - p_i^2(S^0)}{p_i(S^0)} e^{(k_i/2-D)\xi} K_i(\xi)\, d\xi,$$

где $g_{1i}(t)$ определено в (22). Используя неравенство (6) и условие Липшица (18), получим следующее неравенство:

$$p_i^2(S(t-\xi)) - p_i^2(S^0) \leqslant p_i^2(S^0 + (\varphi_0(0) - S^0) e^{-D(t-\xi)}) - p_i^2(S^0) \leqslant L_i(\varphi_0(0) - S^0) e^{-D(t-\xi)} (p_i(\varphi_0(0)) + p_i(S^0)).$$

Отсюда и из определения (2) вытекает оценка на функцию $h_i(t)$:

$$h_i(t) \leqslant g_{1i}(t) + L_i(\varphi_0(0) - S^0)\frac{p_i(\varphi_0(0)) + p_i(S^0)}{p_i(S^0)}\frac{\alpha_i^{r_i+1}}{r_i!}\int\limits_0^t \xi^{r_i} e^{-D(t-\xi)} e^{-(\alpha_i + D - k_i/2)\xi}\, d\xi$$
$$\leqslant g_{1i}(t) + g_{2i}(t),$$

где

$$g_{2i}(t) = L_i(\varphi_0(0) - S^0)\frac{p_i(\varphi_0(0)) + p_i(S^0)}{p_i(S^0)}\frac{\alpha_i^{r_i+1}}{(r_i+1)!}t^{r_i+1}e^{-\min\{D,(\alpha_i+D-k_i/2)\}t}.$$

Тогда из неравенства (20) вытекает оценка

$$\frac{d}{dt}v_i(t,x_i) \leqslant -\delta_i v_i(t,x_i) + (g_{1i}(t) + g_{2i}(t))v_i(t,x_i),$$

откуда следует неравенство

$$v_i(t,x_i) \leqslant \exp\left(\int\limits_0^t (g_{1i}(s) + g_{2i}(s))\, ds\right)e^{-\delta_i t}v_i(0,\varphi_i)$$
$$\leqslant \exp\left(\int\limits_0^\infty (g_{1i}(s) + g_{2i}(s))\, ds\right)e^{-\delta_i t}v_i(0,\varphi_i) = e^{J_i+G_i}e^{-\delta_i t}v_i(0,\varphi_i),$$

где J_i и G_i определены в (14) и (17). Из этой оценки непосредственно вытекает (16). Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть $(S(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — решение начальной задачи (1), (3) и при всех $i = 1, \ldots, n$ выполнено неравенство (9). Выберем числа $k_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, так, что выполнены условия (10).*

1\. *Если $\varphi_0(t) \leqslant S^0$ при всех $t \leqslant 0$, то справедлива оценка*

$$\max\left\{S^0 - (S^0 - \varphi_0(0))e^{-Dt} - \sum_{i=1}^n v_i^{1/2}(0,\varphi_i)\frac{p_i(S^0)}{D - \delta_i/2}(e^{-\delta_i t/2} - e^{-Dt}); 0\right\} \leqslant S(t) \leqslant S^0, \quad (23)$$

где δ_i определено в (12).

2\. *Если $\varphi_0(0) \leqslant S^0$ и существует $t^* < 0$ такое, что $\varphi_0(t^*) > S^0$, то справедлива оценка*

$$\max\left\{S^0 - (S^0 - \varphi_0(0))e^{-Dt} - \sum_{i=1}^n e^{J_i} v_i^{1/2}(0,\varphi_i)\frac{p_i(S^0)}{D - \delta_i/2}(e^{-\delta_i t/2} - e^{-Dt}); 0\right\} \leqslant S(t) \leqslant S^0, \quad (24)$$

где J_i определено в (14).

3\. *Если $\varphi_0(0) > S^0$, то справедлива оценка*

$$\max\left\{S^0 - \sum_{i=1}^n e^{J_i+G_i} v_i^{1/2}(0,\varphi_i)\frac{p_i(\varphi_0(0))}{D - \delta_i/2}(e^{-\delta_i t/2} - e^{-Dt}); 0\right\} \leqslant S(t) \leqslant S^0 + (\varphi_0(0) - S^0)e^{-Dt}, \quad (25)$$

где G_i определено в (17).

Доказательство. Пусть $\varphi_0(t) \leqslant S^0$ при всех $t \leqslant 0$. Тогда оценка сверху на функцию $S(t)$ вытекает из формулы (7). Докажем оценку снизу на функцию $S(t)$. Из первого уравнения системы (1) получим следующее интегральное представление:

$$(S(t) - S^0)e^{Dt} = \varphi_0(0) - S^0 - \sum_{i=1}^{n} \int_0^t e^{D\theta} x_i(\theta) p_i(S(\theta))\, d\theta.$$

Учитывая неотрицательность компонент решения $(S(t), x_1(t), \dots, x_n(t))$ и монотонность функций $p_i(\xi)$, $i = 1, \dots, n$, имеем

$$(S(t) - S^0)e^{Dt} \geqslant \varphi_0(0) - S^0 - \sum_{i=1}^{n} p_i(S^0) \int_0^t e^{D\theta} x_i(\theta)\, d\theta.$$

Из данного неравенства и неравенства (11) следует оценка

$$(S(t) - S^0)e^{Dt} \geqslant \varphi_0(0) - S^0 - \sum_{i=1}^{n} v_i^{1/2}(0, \varphi_i) p_i(S^0) \int_0^t e^{(D-\delta_i/2)\theta}\, d\theta.$$

Отсюда и из неравенства (7) вытекает оценка (23).

Оценки (24) и (25) доказываются по аналогии с использованием неравенств (6), (7), (13) и (16). Теорема доказана. □

Замечание. Отметим, что при выполнении условий теоремы 2 оценки (11), (13), (16) и (23)–(25) характеризуют скорость стремления решения начальной задачи (1), (3) к положению равновесия $(S^0, 0, \dots, 0)$.

В настоящей работе для модели конкуренции видов в хемостате с бесконечным распределённым запаздыванием были предложены функционалы Ляпунова — Красовского, с помощью которых получены оценки для всех компонент решений. Оценки характеризуют скорости сходимости компонент решений к компонентам положения равновесия, соответствующего полному вымиранию всех видов микроорганизмов в хемостате. Все величины, отвечающие за скорости убывания численностей микроорганизмов и скорость стабилизации концентрации питательного вещества к постоянной величине концентрации, указаны в явном виде.

На основе данной работы можно предложить функционал Ляпунова — Красовского для общего класса систем с бесконечным распределённым запаздыванием, который позволит получать достаточные условия экспоненциальной устойчивости положений равновесия и оценки скорости стабилизации решений.

Авторы выражают благодарность Г. В. Демиденко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gopalsamy K.* Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. (Mathematics and its Applications, Vol. 74).
2. *Kuang Y.* Delay Differential Equations: with Applications in Population Dynamics. Boston: Acad. Press, 1993. (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 191).
3. *Smith H.L.* Monotone Dynamical Systems: an Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems. Providence: AMS, 1995. (Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 41).
4. *Erneux T.* Applied Delay Differential Equations. N. Y.: Springer-Verl., 2009. (Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, Vol. 3).

5. *MacDonald N.* Time delays in chemostat models // Microbial Population Dynamics. Florida: CRC Press, 1982. P. 33–53.
6. *Wolkowicz G. S. K., Xia H.* Global asymptotic behavior of a chemostat model with discrete delays // SIAM J. Appl. Math. 1997. V. 57, N 4. P. 1019–1043.
7. *Wolkowicz G. S. K., Xia H., Wu J.* Global dynamics of a chemostat competition model with distributed delay // J. Math. Biol. 1999. V. 38. P. 285–316.
8. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.
9. *Хусаинов Д.Я., Иванов А.Ф., Кожаметов А.Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.
10. *Mondié S., Kharitonov V.L.* Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. V. 50, N 2. P. 268–273.
11. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.
12. *Demidenko G.V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.
13. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
14. *Demidenko G.V., Matveeva I.I.* Estimates for solutions to a class of nonlinear time-delay systems of neutral type // Electron. J. Differ. Equ. 2015. V. 2015, N 34. P. 1–14.
15. *Demidenko G.V., Matveeva I.I.* Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays // Electron. J. Qualitative Theory Differ. Equ. 2015. V. 2015, N 83. P. 1–22.
16. *Матвеева И.И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.
17. *Матвеева И.И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740.
18. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И., Скворцова М.А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.
19. *Матвеева И.И.* Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60, № 4. С. 612–620.
20. *Matveeva I. I.* Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients // Electron. J. Differ. Equ. 2020. V. 2020, N 20. P. 1–12.
21. *Yskak T. K.* Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Func. Differ. Equ. 2018. V. 25, N 1–2. P. 97–108.
22. *Ыскак Т.* Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределённым запаздыванием // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 416–427.
23. *Ыскак Т.* Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 2204–2215.
24. *Ыскак Т.* Об оценках решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием с периодическими коэффициентами в линейной части // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 2. С. 148–159.
25. *Скворцова М.А.* Устойчивость решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 2. С. 108–120.

26. *Скворцова М.А.* Оценки решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2018. Т. 25. С. 109–125.

27. *Скворцова М.А.* Об оценках решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 1697–1718.

28. *Скворцова М.А.* Асимптотические свойства решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 4. С. 63–72.

29. *Скворцова М.А.* Асимптотические свойства решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями // Динамические системы. 2019. Т. 9(37), № 4. С. 367–389.

30. *Скворцова М.А.* Оценки решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями // Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 188. С. 84–105. (Итоги науки и техники.)

31. *Скворцова М.А., Ыскак Т.* Асимптотическое поведение решений в одной модели хищник-жертва с запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 402–416.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.929.4

ESTIMATES OF SOLUTIONS TO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISTRIBUTED DELAY DESCRIBING THE COMPETITION OF SEVERAL TYPES OF MICROORGANISMS

© 2022 **M. A. Skvortsova**[a], **T. Yskak**[b]

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]sm-18-nsu@yandex.ru, [b]istima92@mail.ru

Received 20.06.2022, revised 20.06.2022, accepted 22.06.2022

Abstract. We consider a model of competition of n species in a chemostat. This model is a system of $n+1$ differential equations with infinite distributed delay. One equation is responsible for the change in nutrient concentration, and the other n are responsible for the change in the number of species. The transformation of a nutrient into viable cells does not occur instantly, and requires some time, which is taken into account by the presence of a delay. Under the condition when the concentration of the introduced nutrient is below a certain level, we have constructed Lyapunov–Krasovskii functionals, with the help of which we obtain estimates for all components of solutions. The estimates characterize the extinction rates of all species in the chemostat and the stabilization rate of the nutrient concentration to a constant value.

Keywords: species competition model, chemostat, delay differential equations, infinite distributed delay, estimates of solutions, Lyapunov–Krasovskii functionals.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.415

REFERENCES

1. Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. (Mathematics and its Applications, Vol. 74).
2. Kuang Y. Delay Differential Equations: with Applications in Population Dynamics. Boston: Acad. Press, 1993. (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 191).
3. Smith H.L. Monotone Dynamical Systems: an Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems. Providence: AMS, 1995. (Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 41).
4. Erneux T. Applied Delay Differential Equations. N. Y.: Springer-Verl., 2009. (Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, Vol. 3).
5. MacDonald N. Time delays in chemostat models. *Microbial Population Dynamics*, 1982, pp. 33–53.
6. Wolkowicz G.S.K., Xia H. Global asymptotic behavior of a chemostat model with discrete delays. *SIAM J. Appl. Math.*, 1997, Vol. 57, No. 4, pp. 1019–1043.
7. Wolkowicz G.S.K., Xia H., Wu J. Global dynamics of a chemostat competition model with distributed delay. *J. Math. Biol.*, 1999, Vol. 38, pp. 285–316.
8. Demidenko G.V., Matveeva I.I. Asimptoticheskie svoistva reshenii differentsial'nykh uravnenii s zapazdyvayushchim argumentom [Asymptotic properties of solutions to delay differential equations]. *Vest. Novosibirsk Univ. Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2005, Vol. 5, No. 3, pp. 20–28 (in Russian).
9. Khusainov D.Ya., Ivanov A.F., Kozhametov A.T. Convergence estimates for solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with constant delay. *Differ. Equ.*, 2005, Vol. 41, No. 8, pp. 1196–1200.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 4.

10. Mondié S., Kharitonov V.L. Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach. *IEEE Trans. Automatic Control*, 2005, Vol. 50, No. 2, pp. 268–273.
11. Demidenko G.V., Matveeva I.I. Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. *Siber. Math. J.*, 2007, Vol. 48, No. 5, pp. 824–836.
12. Demidenko G.V. Stability of solutions to linear differential equations of neutral type. *J. Anal. Appl.*, 2009, Vol. 7, No. 3, pp. 119–130.
13. Demidenko G.V., Matveeva I.I. On estimates of solutions to systems of differential equations of neutral type with periodic coefficients. *Siber. Math. J.*, 2014, Vol. 55, No. 5, pp. 866–881.
14. Demidenko G.V., Matveeva I.I. Estimates for solutions to a class of nonlinear time-delay systems of neutral type. *Electron. J. Differ. Equ.*, 2015, Vol. 2015, No. 34, pp. 1–14.
15. Demidenko G.V., Matveeva I.I. Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays. *Electron. J. Qualitative Theory Differ. Equ.*, 2015, Vol. 2015, No. 83, pp. 1–22.
16. Matveeva I.I. On exponential stability of solutions to periodic neutral-type systems. *Siber. Math. J.*, 2017, Vol. 58, No. 2, pp. 264–270.
17. Matveeva I.I. On the exponential stability of solutions of periodic systems of the neutral type with several delays. *Differ. Equ.*, 2017, Vol. 53, No. 6, pp. 725–735.
18. Demidenko G.V., Matveeva I.I., Skvortsova M.A. Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms. *Siber. Math. J.*, 2019, Vol. 60, No. 5, pp. 828–841.
19. Matveeva I.I. Estimates for exponential decay of solutions to one class of nonlinear systems of neutral type with periodic coefficients. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, Vol. 60, No. 4, pp. 601–609.
20. Matveeva I.I. Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients. *Electron. J. Differ. Equ.*, 2020, Vol. 2020, No. 20, pp. 1–12.
21. Yskak T.K. Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay. *Functional Differ. Equ.*, 2018, Vol. 25, No. 1–2, pp. 97–108.
22. Yskak T. Otsenki reshenii odnogo klassa sistem uravnenii neitral'nogo tipa s raspredelennym zapazdyvaniem [Estimates for solutions of one class of systems of equations of neutral type with distributed delay]. *Siber. Electron. Mat. Izv.*, 2020, Vol. 17, pp. 416–427 (in Russian).
23. Yskak T. Otsenki reshenii odnogo klassa sistem nelineinykh differentsial'nykh uravnenii s raspredelennym zapazdyvaniem [Estimates for solutions of one class to systems of nonlinear differential equations with distributed delay]. *Siber. Electron. Mat. Izv.*, 2020, Vol. 17, pp. 2204–2215 (in Russian).
24. Yskak T. On estimates of solutions to systems of nonlinear differential equations with distributed delay and periodic coefficients in the linear terms. *J. Appl. Indust. Math.*, 2021, Vol. 15, No. 2, pp. 355–364.
25. Skvortsova M. A. Ustoichivost' reshenii v modeli khishchnik-zhertva s zapazdyvaniem [Stability of solutions in the predator–prey model with delay]. *Mat. zametki SVFU*, 2016, Vol. 23, No. 2, pp. 108–120 (in Russian).
26. Skvortsova M. A. Otsenki reshenii v modeli khishchnik-zhertva s zapazdyvaniem [Estimates for solutions in a predator–prey model with delay. *Izv. Irkutsk. gos. un-ta, Ser. Mat.*, 2018, Vol. 25, pp. 109–125 (in Russian).
27. Skvortsova M. A. Ob otsenkakh reshenii v modeli khishchnik-zhertva s dvumya zapazdyvaniyami [On estimates of solutions in a predator–prey model with two delays]. *Siber. Electron. Mat. Izv.*, 2018, V. 15, pp. 1697–1718 (in Russian).
28. Skvortsova M. A. Asimptoticheskie svoistva reshenii v modeli vzaimodeistviya populyatsii s neskol'kimi zapazdyvaniyami [Asymptotic properties of solutions in a model of interaction of populations with several delays]. *Mat. Zametki SVFU*, 2019, Vol. 26, No. 4, pp. 63–72 (in Russian).
29. Skvortsova M.A. Asimptoticheskie svoistva reshenii v modeli khishchnik-zhertva s dvumya zapazdyvaniyami [Asymptotic properties of solutions in a predator–prey model with two delays]. *Dinam. Sistem.*, 2019, Vol. 9(37), No. 4, pp. 367–389 (in Russian).
30. Skvortsova M.A. Otsenki reshenii v modeli vzaimodeistviya populyatsii s neskol'kimi zapazdyvaniyami [Estimates of solutions in the model of interaction of populations with several delays]. *Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Prilozh., Temat. Obz.*, 2020, Vol. 188, pp. 84–105 (in Russian).

31. Skvortsova M.A., Yskak T. Asymptotic behavior of solutions in one predator-prey model with delay. Siber. Math. J., 2021, Vol. 62, No. 2, pp. 324–336.