

УДК 539.3:517.958

## ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ МОМЕНТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА О ЧИСТОМ СДВИГЕ СО СТЕСНЁННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

© 2023 Б. Д. Аннин<sup>1,2a</sup>, Н. И. Остросаблин<sup>1b</sup>, Р. И. Угрюмов<sup>1,2c</sup>

<sup>1</sup>*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
г. Новосибирск 630090, Россия,*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: <sup>a</sup>annin@hydro.nsc.ru, <sup>b</sup>o.n.i@ngs.ru, <sup>c</sup>riugryumov@mail.ru

Поступила в редакцию 25.05.2022 г.; после доработки 25.05.2022 г.;  
принята к публикации 12.01.2023 г.

Приводятся основные уравнения линейной моментной теории упругости. Определяющие соотношения записаны для случая произвольной анизотропии в виде линейных уравнений. Рассматриваются некоторые упрощённые варианты, в частности со стеснённым вращением, и плоская деформация при наличии только сдвиговых напряжений. Для несимметричных тензоров четвёртого ранга вводятся собственные модули и собственные состояния.

**Ключевые слова:** моментная теория упругости, несимметричные тензоры напряжений, определяющие уравнения, модули упругости, тензоры четвёртого ранга, чистый сдвиг, стеснённое вращение, двумерная задача.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.101

Классическая линейная теория упругости не даёт удовлетворительного описания деформирования упругих тел при больших градиентах напряжений, для областей с угловыми точками, зернистых сред, полимерных материалов и других случаев деформирования. Чтобы иметь возможность более адекватного описания деформирования упругих тел, была предложена [1–6] модель моментной упругой среды, учитывающая, кроме силового взаимодействия, ещё и вращательное взаимодействие между частицами. Упругая среда рассматривается как совокупность частиц, положение которых в декартовой прямоугольной системе координат  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , определяется вектором смещений  $u_i$  и независимым вектором поворотов  $\varphi_i$ . Принимается, что вектор силовых напряжений  $p_i$  на площадке с нормалью  $n_i$  и вектор моментных напряжений  $m_i$  на этой площадке определяются формулами Коши (по повторяющимся индексам проводится суммирование)

$$\sigma_{ij}n_j = p_i, \quad \mu_{ij}n_j = m_i, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$  — тензор силовых напряжений,  $\mu_{ij} \neq \mu_{ji}$  — тензор моментных напряжений. Уравнения равновесия для моментной среды имеют вид [1–6]

$$\partial_j \sigma_{ij} + F_i = 0, \quad (2)$$

$$\partial_j \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} + M_i = 0, \quad (3)$$

где  $\partial_j$  — производная по координате  $x_j$ ;  $\varepsilon_{ijk}$  — кососимметричный по любой паре индексов тензор Леви-Чивиты;  $F_i$  — вектор объёмных сил;  $M_i$  — вектор объёмных моментов. В клас-

сической теории упругости считают, что  $\mu_{ij} = 0$ ,  $M_i = 0$ , тогда из (3) следует симметрия напряжений  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

В качестве характеристик несимметричной деформации принимают несимметричные тензоры деформации  $e_{ij}$  и кручения-изгиба  $\varkappa_{ij}$  [1–6]:

$$e_{ij} = \partial_j u_i - \varphi_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} - \varphi_{ij}, \quad \varkappa_{ij} = \partial_j \varphi_i = \gamma_{ij} + \beta_{ij}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} &= \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), & \omega_{ij} &= \frac{1}{2}(\partial_j u_i - \partial_i u_j), \\ \gamma_{ij} = \gamma_{ji} &= \frac{1}{2}(\partial_j \varphi_i + \partial_i \varphi_j), & \beta_{ij} &= \frac{1}{2}(\partial_j \varphi_i - \partial_i \varphi_j) \end{aligned} \quad (5)$$

и  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ,  $\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}$ ,  $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$  — кососимметричные тензоры. Запишем тензоры  $\omega_{ij}$ ,  $\varphi_{ij}$  в виде матриц и с помощью тензора Леви-Чивиты:

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{21} & -\omega_{31} \\ \omega_{21} & 0 & -\omega_{32} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \omega_{ij} = \varepsilon_{ikj}\omega_k, & \quad \omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\partial_j u_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{kj}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} &= \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_{21} & -\varphi_{31} \\ \varphi_{21} & 0 & -\varphi_{32} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \varphi_{ij} = \varepsilon_{ikj}\varphi_k, & \quad \varphi_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varphi_{kj}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для тензора  $\beta_{ij}$  аналогичная запись имеет вид (6). Из формул (6), (7) видно, что компоненты векторов  $\omega_i$ ,  $\varphi_i$  являются переобозначением компонент тензоров  $\omega_{ij}$ ,  $\varphi_{ij}$ :

$$\omega_1 = \omega_{32}, \quad \omega_2 = \omega_{13}, \quad \omega_3 = \omega_{21}; \quad \varphi_1 = \varphi_{32}, \quad \varphi_2 = \varphi_{13}, \quad \varphi_3 = \varphi_{21}.$$

С учётом (6), (7) кососимметричный тензор в первой формуле (4) можно записать в виде

$$\psi_{ij} = -\psi_{ji} = \omega_{ij} - \varphi_{ij} = \varepsilon_{ikj}(\omega_k - \varphi_k). \quad (8)$$

Тензоры деформаций (4) являются несимметричными тензорами, напряжения также несимметричные тензоры, т. е.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{(ij)} + \sigma_{[ij]}, \quad \mu_{ij} = \mu_{(ij)} + \mu_{[ij]}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{(ij)} &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}), & \sigma_{[ij]} &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \sigma_{ji}), \\ \mu_{(ij)} &= \frac{1}{2}(\mu_{ij} + \mu_{ji}), & \mu_{[ij]} &= \frac{1}{2}(\mu_{ij} - \mu_{ji}). \end{aligned} \quad (10)$$

Круглые и квадратные скобки в индексах в (9), (10) означают симметричную и антисимметричную части тензоров по соответствующим индексам.

Связь напряжений и деформаций можно взять в виде обратимых линейных соотношений [2, 6–9]

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}e_{kl} + B_{ijkl}\varkappa_{kl}, \quad \mu_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} + D_{ijkl}\varkappa_{kl}. \quad (11)$$

В работах [2, 6–9] считается, что тензоры четвёртого ранга в (11) имеют симметрию вида

$$A_{ijkl} = A_{klij}, \quad D_{ijkl} = D_{klij}, \quad C_{ijkl} = B_{klij}, \quad (12)$$

т. е. предполагается существование потенциала (удельной энергии деформации)

$$2\Phi = A_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + 2B_{ijkl}e_{ij}\varkappa_{kl} + D_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl}. \quad (13)$$

Допущения (12) в общем случае не обязательны, они следуют из (13), если за основу принимают потенциал (13) (упругость по Грину). Но можно принять за основу линейные соотношения (11) (упругость по Коши). Случай упругости по Коши без учёта вращений, когда  $A_{ijkl} \neq A_{klij}$ , рассматривался, например, в [10, 11]. Тензоры четвёртого ранга в (11) считаем не зависящими от координат  $x_i$ . Если имеется такая зависимость, то для получения эффективных характеристик применяют методы осреднения [8, 12]. В [12] приведён обзор литературы по моментной теории упругости.

Учитывая симметрию и несимметрию тензоров (4), (5) и (8)–(10), соотношения (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{(ij)} &= A_{(ij)(kl)}\varepsilon_{kl} + A_{(ij)[kl]}\psi_{kl} + B_{(ij)(kl)}\gamma_{kl} + B_{(ij)[kl]}\beta_{kl}, \\ \sigma_{[ij]} &= A_{[ij](kl)}\varepsilon_{kl} + A_{[ij][kl]}\psi_{kl} + B_{[ij](kl)}\gamma_{kl} + B_{[ij][kl]}\beta_{kl}, \\ \mu_{(ij)} &= C_{(ij)(kl)}\varepsilon_{kl} + C_{(ij)[kl]}\psi_{kl} + D_{(ij)(kl)}\gamma_{kl} + D_{(ij)[kl]}\beta_{kl}, \\ \mu_{[ij]} &= C_{[ij](kl)}\varepsilon_{kl} + C_{[ij][kl]}\psi_{kl} + D_{[ij](kl)}\gamma_{kl} + D_{[ij][kl]}\beta_{kl}. \end{aligned} \quad (14)$$

В формулах (14) в явном виде выделены симметричные и кососимметричные составляющие всех рассматриваемых тензоров. Уравнения равновесия (2), (3) записываются в аналогичном виде:

$$\partial_j(\sigma_{(ij)} + \sigma_{[ij]}) + F_i = 0, \quad \partial_j(\mu_{(ij)} + \mu_{[ij]}) + \varepsilon_{ijk}\sigma_{[jk]} + M_i = 0. \quad (15)$$

Связь между тензорами  $\sigma_{ij}$  и  $\mu_{ij}$  рассмотрена в [13]. В работе [9] соотношения (11), (12) записываются в матрично-блочном виде и ставится задача определения собственных модулей и собственных тензоров блочной матрицы аналогично подходу Кельвина в классической анизотропной упругости [10, 14]. С учётом известного равенства  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ , где  $\delta_{kl}$  — символы Кронекера, второе уравнение (15) можно записать в виде [3, 13]

$$\sigma_{[ml]} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ilm}[\partial_s(\mu_{(is)} + \mu_{[is]}) + M_i].$$

При подстановке напряжений (11) в уравнения равновесия (2), (3) или выражений (14) в (15) получаются шесть уравнений для шести неизвестных  $u_k$ ,  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . В качестве граничных условий на поверхности тела принимаются заданными векторы  $p_i$  и  $m_i$  (1) или задаются значения самих функций  $u_k$  и  $\varphi_k$ . Число независимых граничных условий обсуждается в [3].

В определяющих соотношениях (11), (14) участвуют несколько тензоров четвёртого ранга, задавая которые в определённом виде, можно получать различные варианты моментных упругих сред. Задавая в (11), (12) материальные тензоры в виде изотропного тензора четвёртого ранга

$$A_{ijkl} = A_1\delta_{ij}\delta_{kl} + A_2\delta_{ik}\delta_{lj} + A_3\delta_{il}\delta_{jk},$$

получают определяющие соотношения изотропной моментной среды [2, 5, 6, 15]. Если среда обладает центром симметрии, т. е. материальные тензоры не изменяются при изменении на-

правления координатных осей, тогда в (11), (12) тензоры  $B_{ijkl} = 0$ ,  $C_{ijkl} = 0$ , при этом соотношения (11), (14) принимают вид [6]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= A_{ijkl}e_{kl}, & \mu_{ij} &= D_{ijkl}\varkappa_{kl}; \\ \sigma_{(ij)} &= A_{(ij)(kl)}\varepsilon_{kl} + A_{(ij)[kl]}\psi_{kl}, & \sigma_{[ij]} &= A_{[ij](kl)}\varepsilon_{kl} + A_{[ij][kl]}\psi_{kl}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mu_{(ij)} = D_{(ij)(kl)}\gamma_{kl} + D_{(ij)[kl]}\beta_{kl}, \quad \mu_{[ij]} = D_{[ij](kl)}\gamma_{kl} + D_{[ij][kl]}\beta_{kl}. \quad (17)$$

Уравнения (16) упрощаются, если тензор  $\psi_{kl} = 0$ , т. е. в (8) вектор  $\varphi_k$  независимого вращения равен вектору  $\omega_k = (1/2)\varepsilon_{kjl}\partial_j u_l$  стеснённого вращения (псевдоконтинуум Коссера [5]). В этом случае из (4) получаем  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  — симметричный тензор и тензор кручения-изгиба

$$\varkappa_{ij} = \partial_j \omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{imn}\partial_{jm}u_n \quad (18)$$

выражается через вторые производные от вектора смещения  $u_n$  [1]. Тензор (18) можно выразить через тензор  $\varepsilon_{ij}$ . Имеют место соотношение  $\partial_k \omega_{ij} = \partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_i \varepsilon_{jk}$  [5] и формулы (6), тогда

$$\varkappa_{ij} = \partial_j \omega_i = \partial_j \left( \frac{1}{2}\varepsilon_{irs}\omega_{sr} \right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{irs}(\partial_r \varepsilon_{sj} - \partial_s \varepsilon_{rj}).$$

Симметричная часть  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$  и кососимметричная часть  $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$  тензора  $\varkappa_{ij}$  определяется по формулам (5).

Если в (16), (17) тензоры

$$A_{(ij)[kl]} = 0, \quad A_{[ij](kl)} = 0, \quad D_{(ij)[kl]} = 0, \quad D_{[ij](kl)} = 0, \quad (19)$$

то (16), (17) примут вид обычного закона Гука

$$\sigma_{(ij)} = A_{(ij)(kl)}\varepsilon_{kl}, \quad \sigma_{[ij]} = A_{[ij][kl]}\psi_{kl}, \quad \mu_{(ij)} = D_{(ij)(kl)}\gamma_{kl}, \quad \mu_{[ij]} = D_{[ij][kl]}\beta_{kl} \quad (20)$$

для симметричных и несимметричных частей тензоров напряжений. Рассмотрим первое равенство (20). Тензор  $A_{(ij)(kl)}$  имеет симметрию в первой паре индексов и во второй

$$A_{(ij)(kl)} = A_{(ji)(kl)}, \quad A_{(ij)(kl)} = A_{(ij)(lk)}, \quad (21)$$

но в случае упругости по Коши [10] этот тензор не обладает главной симметрией:  $A_{(ij)(kl)} \neq A_{(kl)(ij)}$  и в общем случае имеет 36 независимых компонент. Для симметричных по двум индексам тензоров (20), (21) будем использовать формулы перехода от двух индексов к одному (переобозначение компонент тензоров)

$$\begin{aligned} \sigma_{(11)} &= \sigma_1, & \sigma_{(22)} &= \sigma_2, & \sigma_{(33)} &= \sigma_3, \\ \sqrt{2}\sigma_{(23)} &= \sqrt{2}\sigma_{(32)} = \sigma_4, & \sqrt{2}\sigma_{(13)} &= \sqrt{2}\sigma_{(31)} = \sigma_5, & \sqrt{2}\sigma_{(12)} &= \sqrt{2}\sigma_{(21)} = \sigma_6. \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда с учётом (22) формулы (20) для симметричных тензоров принимают вид

$$\sigma_i = A_{ij}\varepsilon_j, \quad \mu_i = D_{ij}\gamma_j, \quad i, j = \overline{1, 6}, \quad \sigma = A\varepsilon, \quad \mu = D\gamma. \quad (23)$$

Невырожденные матрицы  $A$ ,  $D$  в общем случае несимметричны:  $A_{ij} \neq A_{ji}$ ,  $D_{ij} \neq D_{ji}$ .

Матрица  $A$  может быть представлена в виде [10]

$$A = T\Lambda F', \quad (24)$$

где штрих означает транспонирование матрицы,  $T = [t_{ip}]$ ,  $F = [f_{ip}]$  — ортогональные матрицы, т. е.  $T'T = E$ ,  $F'F = E$  ( $E$  — единичная матрица);  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$  —

диагональная матрица ( $\lambda_i > 0$ ). Величины  $\lambda_i$  являются собственными модулями, а матрицы  $t_{ip}$ ,  $f_{ip}$  — собственными состояниями. Каждый столбец этих матриц в силу (22) соответствует симметричному тензору второго ранга. Аналогичное представление вида (24) имеет место и для матрицы  $D$  в (23).

С учётом (24) перепишем определяющее соотношение (23):

$$\sigma = T\Lambda F'\varepsilon, \quad T'\sigma = \Lambda F'\varepsilon, \quad \tilde{\sigma} = \Lambda\tilde{\varepsilon}, \quad (25)$$

где соответственно обозначили  $\tilde{\sigma} = T'\sigma$ ,  $\tilde{\varepsilon} = F'\varepsilon$ . Обращение последних формул имеет вид  $\sigma = T\tilde{\sigma}$ ,  $\varepsilon = F\tilde{\varepsilon}$ . Последнее выражение в (25) представляет собой шесть отдельных независимых равенств

$$\tilde{\sigma}_1 = \lambda_1\tilde{\varepsilon}_1, \quad \tilde{\sigma}_2 = \lambda_2\tilde{\varepsilon}_2, \quad \tilde{\sigma}_3 = \lambda_3\tilde{\varepsilon}_3, \quad \tilde{\sigma}_4 = \lambda_4\tilde{\varepsilon}_4, \quad \tilde{\sigma}_5 = \lambda_5\tilde{\varepsilon}_5, \quad \tilde{\sigma}_6 = \lambda_6\tilde{\varepsilon}_6, \quad (26)$$

которые являются инвариантной записью определяющих соотношений (23) или (20). В соответствии с (26) удельная энергия деформации записывается в каноническом виде

$$2\Phi = \tilde{\sigma}_p\tilde{\varepsilon}_p = \lambda_p\tilde{\varepsilon}_p^2 = \lambda_1\tilde{\varepsilon}_1^2 + \lambda_2\tilde{\varepsilon}_2^2 + \lambda_3\tilde{\varepsilon}_3^2 + \lambda_4\tilde{\varepsilon}_4^2 + \lambda_5\tilde{\varepsilon}_5^2 + \lambda_6\tilde{\varepsilon}_6^2 = \lambda_p(f_{ip}\varepsilon_i)^2 \quad (27)$$

положительно определённой квадратичной формы. Для моментных напряжений (23) можно выписать аналогичные соотношения вида (25)–(27). В [10] приведён общий вид матриц (тензоров)  $A$  анизотропии для всех классов кристаллографических симметрий. Вид матрицы  $A$  трансверсально-изотропной упругой по Коши среды (ось симметрии  $x_3$ ) следующий:

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} - B_{31} & 0 & 0 & -B_{61} \\ C_{21} & C_{11} & C_{31} - B_{31} & 0 & 0 & B_{61} \\ C_{31} + B_{31} & C_{31} + B_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & -B_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{54} & C_{44} & 0 \\ B_{61} & -B_{61} & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{21} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

где  $C_{ij} = C_{ji}$  — симметричная часть, а  $B_{ij} = -B_{ji}$  — кососимметричная часть матрицы  $A$ . Матрица (28) содержит восемь независимых компонент, в том числе три дополнительные компоненты  $B_{31}$ ,  $B_{61}$ ,  $B_{54}$  кососимметричной части. Двумерная задача плоской деформации с использованием матрицы вида (28) исследована в работе [11]. Такой же вид (28) имеет матрица  $D$  для моментных напряжений (23) в случае трансверсальной изотропии.

Для кососимметричных по первой и второй парам индексов тензоров  $A_{[ij][kl]}$ ,  $D_{[ij][kl]}$  (20) также можно ввести собственные модули и состояния. Пусть тензор  $A_{[ij][kl]}$  (или  $D_{[ij][kl]}$ ) имеет симметрию индексов (далее для краткости квадратные скобки в индексах не пишем):

$$A_{klij} = A_{ijkl}, \quad A_{jikl} = -A_{ijkl}, \quad A_{ijlk} = -A_{ijkl}. \quad (29)$$

При ортогональном преобразовании системы координат ( $\delta_{pq}$  — единичная матрица, символ Кронекера)

$$x_i = \alpha_{ij}\hat{x}_j, \quad \hat{x}_j = \alpha_{ij}x_i, \quad \alpha_{ip}\alpha_{iq} = \delta_{pq}, \quad i, j, p, q = 1, 2, 3,$$

тензор  $A_{ijkl}$  (29) преобразуется по формулам

$$A_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\hat{A}_{pqrs}\alpha_{kr}\alpha_{ls}, \quad \hat{A}_{pqrs} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}A_{ijkl}\alpha_{kr}\alpha_{ls}. \quad (30)$$

Перепишем (30) с учётом антисимметрии (29):

$$A_{ijkl} = \frac{1}{2}(\alpha_{ip}\alpha_{jq} - \alpha_{iq}\alpha_{jp})\hat{A}_{pqrs}\frac{1}{2}(\alpha_{kr}\alpha_{ls} - \alpha_{ks}\alpha_{lr}) = \alpha_{ijpq}\hat{A}_{pqrs}\alpha_{klrs}, \quad \hat{A}_{pqrs} = \alpha_{ijpq}A_{ijkl}\alpha_{klrs},$$

где обозначили  $\alpha_{ijpq} = (\alpha_{ip}\alpha_{jq} - \alpha_{iq}\alpha_{jp})/2$ , причём

$$\alpha_{jipq} = -\alpha_{ijpq}, \quad \alpha_{ijqp} = -\alpha_{ijpq}, \quad \alpha_{ijpq}\alpha_{ijrs} = \frac{1}{2}(\delta_{pr}\delta_{qs} - \delta_{ps}\delta_{qr}) = \tilde{\delta}_{pqrs}.$$

Тензор  $\tilde{\delta}_{pqrs}$  имеет симметрию (29) и является единичным в пространстве тензоров вида (29). Если  $t_{ji} = -t_{ij}$ , то  $\tilde{\delta}_{pqrs}t_{rs} = t_{pq}$ .

Для постоянного тензора вида (29) можно поставить задачу на собственные значения и тензоры [16]:

$$A_{ijkl}t_{kl} = 2\lambda t_{ij}, \quad (A_{ijkl} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ijkl})t_{kl} = 0. \quad (31)$$

Запишем антисимметричный тензор  $t_{ij} = -t_{ji}$  в виде (6):

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -t_{21} & -t_{31} \\ t_{21} & 0 & -t_{32} \\ t_{31} & t_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

который имеет три независимые компоненты. С учётом (29), (32) распишем уравнение (31):

$$2[(A_{ij21} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ij21})t_{21} + (A_{ij31} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ij31})t_{31} + (A_{ij32} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ij32})t_{32}] = 0. \quad (33)$$

Все ненулевые компоненты тензора  $\tilde{\delta}_{ijkl}$  в (33) имеют значения 1/2. Далее в (33) нужно придавать все значения индексам  $i, j$ . Если  $i = j$ , то уравнения нулевые, если  $i \neq j$ , то уравнения с индексами  $ij$  и  $ji$  отличаются знаком. Таким образом, из (33) получаем однородную систему уравнений

$$\begin{aligned} (A_{2121} - \lambda)t_{21} + A_{2131}t_{31} + A_{2132}t_{32} &= 0, \\ A_{3121}t_{21} + (A_{3131} - \lambda)t_{31} + A_{3132}t_{32} &= 0, \\ A_{3221}t_{21} + A_{3231}t_{31} + (A_{3232} - \lambda)t_{32} &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

для определения собственных значений  $\lambda$  и тензоров  $t_{ij}$  (32). Матрица системы (34) является симметрической и её характеристическое уравнение имеет три действительных корня  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , которым соответствуют три собственных тензора  $t_{ij}$  вида (32). В [16] по аналогии с классификацией тензоров четвёртого ранга модулей упругости [14] проведена классификация тензоров вида (29) в четырёхмерном пространстве в зависимости от числа различных собственных значений  $\lambda_i$  и их кратностей. Для тензоров  $D_{[ij][kl]}$  (20) выписываются совершенно аналогичные уравнения вида (29)–(34) для определения собственных модулей и состояний. В дальнейшем следует исследовать структуру тензоров четвёртого ранга вида (19).

Некоторые двумерные задачи для изотропной моментной среды решены, например, в работах [17, 18]. Рассматривается случай плоской деформации, когда  $u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), u_3 = 0$  и  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_3(x_1, x_2)$ . Для стеснённого вращения имеет место равенство  $\varphi_3 = \omega_3 = (1/2)(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$ .

Рассматривая плоскую деформацию анизотропной среды, не предполагаем, что двумерные уравнения следуют из трёхмерных уравнений. При отсутствии объёмных сил и моментов уравнения равновесия (2), (3) в двумерном случае принимают вид [17, 18]

$$\partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} = 0, \quad \partial_1\sigma_{21} + \partial_2\sigma_{22} = 0; \quad (35)$$

$$\partial_1\mu_{31} + \partial_2\mu_{32} + \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0. \quad (36)$$

Обобщённые деформации (4) совпадают с классическими [18]:

$$e_{11} = \varepsilon_{11} = \partial_1 u_1, \quad e_{22} = \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2, \quad e_{21} = e_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1), \quad (37)$$

и кроме того

$$\varkappa_{31} = \partial_1 \omega_3 = \frac{1}{2}(\partial_{11} u_2 - \partial_{12} u_1), \quad \varkappa_{32} = \partial_2 \omega_3 = \frac{1}{2}(\partial_{12} u_2 - \partial_{22} u_1). \quad (38)$$

С учётом (37), (38) определяющие соотношения возьмём в виде, следующем из формул (11):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= a_{ijkl} \sigma_{kl} = a_{ij11} \sigma_{11} + a_{ij21} \sigma_{21} + a_{ij12} \sigma_{12} + a_{ij22} \sigma_{22}, \quad a_{ijkl} = a_{jikl}, \\ \mu_{31} &= D_{3131} \varkappa_{31} + D_{3132} \varkappa_{32}, \quad \mu_{32} = D_{3231} \varkappa_{31} + D_{3232} \varkappa_{32}. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь тензор  $a_{ijkl}$  является обратным к тензору  $A_{ijkl}$  в (11).

Рассмотрим случай чисто сдвиговых напряжений, при этом  $\sigma_{11} = 0$ ,  $\sigma_{22} = 0$ . Тогда из (35) следует, что  $\sigma_{21} = \sigma_{21}(x_2)$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1)$ , и из (37), (39) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \partial_1 u_1 = a_{1121} \sigma_{21}(x_2) + a_{1112} \sigma_{12}(x_1), \quad \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2 = a_{2221} \sigma_{21}(x_2) + a_{2212} \sigma_{12}(x_1), \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = a_{2121} \sigma_{21}(x_2) + a_{2112} \sigma_{12}(x_1). \end{aligned} \quad (40)$$

Для деформаций (40) условие совместности  $\partial_{22} \varepsilon_{11} + \partial_{11} \varepsilon_{22} - 2\partial_{21} \varepsilon_{21} = 0$  [5] принимает вид

$$a_{1121} \partial_{22} \sigma_{21}(x_2) + a_{2212} \partial_{11} \sigma_{12}(x_1) = 0. \quad (41)$$

Считаем, что  $a_{1121} \neq 0$ ,  $a_{2212} \neq 0$ , тогда из (41) получаем напряжения

$$\sigma_{21}(x_2) = \frac{1}{a_{1121}}(c_2 x_2^2 + c_1 x_2 + c_0), \quad \sigma_{12}(x_1) = \frac{1}{a_{2212}}(-c_2 x_1^2 + k_1 x_1 + k_0), \quad (42)$$

где  $c_i$ ,  $k_i$  — произвольные постоянные. Подставляем напряжения (42) в первые два уравнения (40):

$$\begin{aligned} \partial_1 u_1 &= c_2 x_2^2 + c_1 x_2 + c_0 + \frac{a_{1112}}{a_{2212}}(-c_2 x_1^2 + k_1 x_1 + k_0), \\ \partial_2 u_2 &= \frac{a_{2221}}{a_{1121}}(c_2 x_2^2 + c_1 x_2 + c_0) + (-c_2 x_1^2 + k_1 x_1 + k_0), \end{aligned}$$

отсюда получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= (c_2 x_2^2 + c_1 x_2 + c_0)x_1 + \frac{a_{1112}}{a_{2212}}\left(\frac{-c_2}{3}x_1^3 + \frac{k_1}{2}x_1^2 + k_0 x_1\right) + u_1(x_2), \\ u_2 &= \frac{a_{2221}}{a_{1121}}\left(\frac{c_2}{3}x_2^3 + \frac{c_1}{2}x_2^2 + c_0 x_2\right) + (-c_2 x_1^2 + k_1 x_1 + k_0)x_2 + u_2(x_1). \end{aligned} \quad (43)$$

Далее подставляем (42), (43) в третье уравнение (40):

$$\partial_1 u_2(x_1) + c_1 x_1 - 2\frac{a_{2112}}{a_{2212}}(-c_2 x_1^2 + k_1 x_1 + k_0) + \partial_2 u_1(x_2) + k_1 x_2 - 2\frac{a_{2121}}{a_{1121}}(c_2 x_2^2 + c_1 x_2 + c_0) = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$\begin{aligned} u_1(x_2) &= 2\frac{a_{2121}}{a_{1121}}\left(\frac{c_2}{3}x_2^3 + \frac{c_1}{2}x_2^2 + c_0 x_2\right) - \frac{k_1}{2}x_2^2 - a_1 x_2 + b_0, \\ u_2(x_1) &= 2\frac{a_{2112}}{a_{2212}}\left(-\frac{c_2}{3}x_1^3 + \frac{k_1}{2}x_1^2 + k_0 x_1\right) - \frac{c_1}{2}x_1^2 + a_1 x_1 + a_0, \end{aligned} \quad (44)$$

где  $a_1$ ,  $a_0$ ,  $b_0$  — произвольные постоянные.

Получив смещения (43), (44), найдём деформации (37), (40) и вращение  $\varphi_3 = \omega_3 = (1/2)(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$ , которые не выписываем. Далее находим компоненты (38) и моментные напряжения (39):

$$\begin{aligned}\mu_{31} &= D_{3131} \left[ -2c_2 x_2 - c_1 + \frac{a_{2112}}{a_{2212}} (-2c_2 x_1 + k_1) \right] + D_{3132} \left[ -2c_2 x_1 + k_1 - \frac{a_{2121}}{a_{1121}} (2c_2 x_2 + c_1) \right], \\ \mu_{32} &= D_{3231} \left[ -2c_2 x_2 - c_1 + \frac{a_{2112}}{a_{2212}} (-2c_2 x_1 + k_1) \right] + D_{3232} \left[ -2c_2 x_1 + k_1 - \frac{a_{2121}}{a_{1121}} (2c_2 x_2 + c_1) \right].\end{aligned}\quad (45)$$

Подставляем напряжения (42), (45) в уравнение (36):

$$\begin{aligned}D_{3131} \frac{a_{2112}}{a_{2212}} (-2c_2) + D_{3132} (-2c_2) + D_{3231} (-2c_2) + D_{3232} \frac{a_{2121}}{a_{1121}} (-2c_2) \\ + \frac{1}{a_{1121}} (c_2 x_2^2 + c_1 x_2 + c_0) - \frac{1}{a_{2212}} (-c_2 x_1^2 + k_1 x_1 + k_0) = 0.\end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует, что

$$c_2 = 0, \quad c_1 = 0, \quad k_1 = 0, \quad c_0/a_{1121} = k_0/a_{2212} = c. \quad (46)$$

С учётом (46) из формул (40), (42)–(45) окончательно получаем

$$\begin{aligned}u_1 &= c(a_{1121} + a_{1112})x_1 + (2a_{2121}c - a_1)x_2 + b_0, \\ u_2 &= c(a_{2221} + a_{2212})x_2 + (2a_{2112}c + a_1)x_1 + a_0, \\ \varepsilon_{11} &= c(a_{1121} + a_{1112}), \quad \varepsilon_{22} = c(a_{2221} + a_{2212}), \quad \varepsilon_{21} = c(a_{2112} + a_{2121}), \\ \varphi_3 &= \omega_3 = c(a_{2112} - a_{2121}) + a_1, \\ \varkappa_{31} &= 0, \quad \varkappa_{32} = 0, \quad \mu_{31} = 0, \quad \mu_{32} = 0, \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} = c.\end{aligned}\quad (47)$$

Решение (47) соответствует классической упругости, нет моментных напряжений, сдвиговые напряжения симметричны и постоянны. Возможно, такое решение получилось из-за того, что задача рассматривалась как двумерная, а не как следствие трёхмерных уравнений.

Допустим, что начало координат  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  не смещается и нет вращения, т. е. для решения (47) получаем

$$u_1(0, 0) = b_0 = 0, \quad u_2(0, 0) = a_0 = 0, \quad \omega_3(0, 0) = c(a_{2112} - a_{2121}) + a_1 = 0. \quad (48)$$

Если  $a_{2112} = a_{2121}$ , то  $a_1 = 0$ . С учётом (48) смещения (47) принимают вид

$$u_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{21}x_2, \quad u_2 = \varepsilon_{21}x_1 + \varepsilon_{22}x_2. \quad (49)$$

Решение (47) и формулы (49) имеют место и для двумерного случая трансверсальной изотропии с несимметричной матрицей модулей упругости вида (28) [10, 11], при этом

$$\varepsilon_{11} = 2ca_{1121} = \frac{-\beta c}{2(\mu^2 + \beta^2)}, \quad \varepsilon_{22} = 2ca_{2221} = \frac{\beta c}{2(\mu^2 + \beta^2)}, \quad \varepsilon_{21} = 2ca_{2121} = \frac{\mu c}{2(\mu^2 + \beta^2)},$$

где  $\mu$ ,  $\beta$  — постоянные [11]; для случая изотропии  $\beta = 0$ .

Для изотропной среды имеем коэффициенты

$$a_{1121} = a_{1112} = 0, \quad a_{2221} = a_{2212} = 0, \quad a_{2121} = a_{2112} = 1/(4\mu) \quad (50)$$

и моментные напряжения

$$\mu_{31} = D_2 \varkappa_{31}, \quad \mu_{32} = D_2 \varkappa_{32}, \quad (51)$$

где  $\mu > 0$ ,  $D_2 > 0$  — постоянные. С учётом (50) уравнения (40) принимают вид

$$\varepsilon_{11} = \partial_1 u_1 = 0, \quad \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2 = 0, \quad \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = \frac{1}{4\mu}(\sigma_{21}(x_2) + \sigma_{12}(x_1)), \quad (52)$$

причём условие совместности (41) выполняется. Из уравнений (52) получаем

$$u_1 = u_1(x_2), \quad u_2 = u_2(x_1), \quad \sigma_{21}(x_2) + \sigma_{12}(x_1) = 2\mu[\partial_1 u_2(x_1) + \partial_2 u_1(x_2)]. \quad (53)$$

Далее, с учётом (38), (51), (53) находим

$$\mu_{31} = \frac{1}{2}D_1 \partial_{11} u_2(x_1), \quad \mu_{32} = -\frac{1}{2}D_2 \partial_{22} u_1(x_2)$$

и из уравнения (36) получаем

$$\sigma_{21}(x_2) - \sigma_{12}(x_1) = -\frac{1}{2}D_2(\partial_{111} u_2(x_1) - \partial_{222} u_1(x_2)). \quad (54)$$

Из уравнений (53), (54) выражаем напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{21}(x_2) &= \mu \partial_2 u_1(x_2) + \frac{1}{4}D_2 \partial_{222} u_1(x_2) + \mu \partial_1 u_2(x_1) - \frac{1}{4}D_2 \partial_{111} u_2(x_1), \\ \sigma_{12}(x_1) &= \mu \partial_1 u_2(x_1) + \frac{1}{4}D_2 \partial_{111} u_2(x_1) + \mu \partial_2 u_1(x_2) - \frac{1}{4}D_2 \partial_{222} u_1(x_2). \end{aligned} \quad (55)$$

Так как напряжения слева в (55) зависят от одной переменной, то из (55) следует, что смещения удовлетворяют уравнениям

$$\mu u_1(x_2) - \frac{1}{4}D_2 \partial_{22} u_1(x_2) = \mu(c_1 x_2 + c_0), \quad \mu u_2(x_1) - \frac{1}{4}D_2 \partial_{11} u_2(x_1) = \mu(k_1 x_1 + k_0), \quad (56)$$

где  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $k_0$ ,  $k_1$  — произвольные постоянные. Решение уравнений (56) следующее:

$$u_1(x_2) = c_0 + c_1 x_2 + C_1 e^{\lambda_1 x_2} + C_2 e^{-\lambda_1 x_2}, \quad u_2(x_1) = k_0 + k_1 x_1 + K_1 e^{\lambda_1 x_1} + K_2 e^{-\lambda_1 x_1}, \quad (57)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  — произвольные постоянные;  $\lambda_1 = 2\sqrt{\mu/D_2}$ .

Зная смещения (57), находим все остальные величины:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 0, \quad \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}[k_1 + c_1 + \lambda_1(K_1 e^{\lambda_1 x_1} - K_2 e^{-\lambda_1 x_1} + C_1 e^{\lambda_1 x_2} - C_2 e^{-\lambda_1 x_2})], \\ \varphi_3 &= \omega_3 = \frac{1}{2}[k_1 - c_1 + \lambda_1(K_1 e^{\lambda_1 x_1} - K_2 e^{-\lambda_1 x_1} - (C_1 e^{\lambda_1 x_2} - C_2 e^{-\lambda_1 x_2}))], \\ \varkappa_{31} &= \frac{2\mu}{D_2}(K_1 e^{\lambda_1 x_1} + K_2 e^{-\lambda_1 x_1}), \quad \varkappa_{32} = -\frac{2\mu}{D_2}(C_1 e^{\lambda_1 x_2} + C_2 e^{-\lambda_1 x_2}), \\ \mu_{31} &= 2\mu(K_1 e^{\lambda_1 x_1} + K_2 e^{-\lambda_1 x_1}), \quad \mu_{32} = -2\mu(C_1 e^{\lambda_1 x_2} + C_2 e^{-\lambda_1 x_2}), \\ \sigma_{21}(x_2) &= \mu(c_1 + k_1) + 2\mu(C_1 e^{\lambda_1 x_2} - C_2 e^{-\lambda_1 x_2})\lambda_1, \\ \sigma_{12}(x_1) &= \mu(k_1 + c_1) + 2\mu(K_1 e^{\lambda_1 x_1} - K_2 e^{-\lambda_1 x_1})\lambda_1. \end{aligned} \quad (58)$$

Решение (57), (58) содержит восемь свободных постоянных, которые можно назначать произвольно, тогда на границе рассматриваемой области значения функций (57), (58) будут такими, какими получатся. Но можно задавать значения функций в каких-то точках или

на границе, а затем находить постоянные. Допустим, что начало координат  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  не смещается и не вращается. Тогда для решения (57), (58) получаем три условия для постоянных:

$$\begin{aligned} u_1(0,0) = c_0 + C_1 + C_2 = 0, \quad u_2(0,0) = k_0 + K_1 + K_2 = 0, \\ 2\omega_3(0,0) = k_1 - c_1 + \lambda_1(K_1 - K_2 - (C_1 - C_2)) = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Из выражений (58) для  $\mu_{31}$ ,  $\mu_{32}$  следует, что при отсутствии моментных напряжений постоянные  $K_i$ ,  $C_i$  равны нулю, тогда из (59) получаем  $c_0 = 0$ ,  $k_0 = 0$ ,  $k_1 = c_1$ , при этом

$$u_1 = c_1 x_2, \quad u_2 = c_1 x_1, \quad \varepsilon_{21} = c_1, \quad \omega_3 = 0, \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} = 2\mu c_1.$$

Последние формулы соответствуют формулам (47), (49), но в (47), (49) присутствуют ещё постоянные  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ . Для случая изотропии эти постоянные равны нулю.

Рассмотрим область  $V$  в виде прямоугольника  $-l_1 \leq x_1 \leq l_1$ ,  $-l_2 \leq x_2 \leq l_2$  и отнесём смещения  $u_i$  и  $x_i$  к  $l_i$ :  $u_i/l_i = \tilde{u}_i$ ,  $x_i/l_i = \tilde{x}_i$ . Тогда коэффициенты в (57), (58) будут безразмерными. Но можно положить  $l_1 = l_2 = 1$  и считать функции  $u_i$  и  $x_i$  безразмерными, т. е. знак «тильда» не писать.

Векторы усилий (1) в нашем случае записываются в виде

$$p_1 = \sigma_{12} n_2, \quad p_2 = \sigma_{21} n_1, \quad m_3 = \mu_{31} n_1 + \mu_{32} n_2$$

и на границе области  $V$  принимают вид

$$\begin{aligned} p_1(-1, x_2) = 0, \quad p_2(-1, x_2) = -\sigma_{21}(x_2); \quad p_1(1, x_2) = 0, \quad p_2(1, x_2) = \sigma_{21}(x_2); \\ p_1(x_1, -1) = -\sigma_{12}(x_1), \quad p_2(x_1, -1) = 0; \quad p_1(x_1, 1) = \sigma_{12}(x_1), \quad p_2(x_1, 1) = 0; \\ m_3(-1, x_2) = -\mu_{31}(-1), \quad m_3(1, x_2) = \mu_{31}(1), \\ m_3(x_1, -1) = -\mu_{32}(-1), \quad m_3(x_1, 1) = \mu_{32}(1). \end{aligned} \quad (60)$$

Выражения (60) дают значения усилий и моментов на границе области  $V$ , т. е. такие получаются, если решение вида (57), (58).

Аналогично можно выписать значения смещений (57) на границе области  $V$ :

$$\begin{aligned} u_1(-1, x_2) = u_1(x_2), \quad u_2(-1, x_2) = u_2(-1); \quad u_1(1, x_2) = u_1(x_2), \quad u_2(1, x_2) = u_2(1); \\ u_1(x_1, -1) = u_1(-1), \quad u_2(x_1, -1) = u_2(x_1); \quad u_1(x_1, 1) = u_1(1), \quad u_2(x_1, 1) = u_2(x_1) \end{aligned} \quad (61)$$

и значения поворотов  $\omega_3$  [17, 18]. Координаты точек  $a_i \in V_0$  тела до деформации определяются по формуле  $a_i = x_i - u_i(x_s)$ ,  $x_s \in V$  или в нашем случае

$$a_1 = x_1 - u_1(x_1, x_2), \quad a_2 = x_2 - u_2(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in V. \quad (62)$$

Например, граница  $x_1 = 1$  была до деформации линией

$$a_1 = 1 - u_1(1, x_2), \quad a_2 = x_2 - u_2(1, x_2), \quad x_1 = 1;$$

далее, учитывая (57), (61), получаем другие линии

$$\begin{aligned} a_1 = -1 - u_1(-1, x_2), \quad a_2 = x_2 - u_2(-1, x_2), \quad x_1 = -1, \\ a_1 = x_1 - u_1(x_1, 1), \quad a_2 = 1 - u_2(x_1, 1), \quad x_2 = 1, \\ a_1 = x_1 - u_1(x_1, -1), \quad a_2 = -1 - u_2(x_1, -1), \quad x_2 = -1. \end{aligned}$$

Как тело из начального состояния  $V_0$  перешло в конечное состояние  $V$ , в рамках статики определить невозможно. Но в конечном состоянии  $V$  тело под действием усилий и моментов (60) находится в равновесии [19].

Если  $u_2(x_1) = 0$ , т. е. постоянные  $k_0, k_1, K_1, K_2$  равны нулю, тогда из (62), (57) имеем

$$x_1 = a_1 + c_0 + c_1 a_2 + C_1 e^{\lambda_1 a_2} + C_2 e^{-\lambda_1 a_2}, \quad x_2 = a_2.$$

Последние формулы соответствуют простому сдвигу с добавлением слагаемых, учитывающих моментность.

Чтобы сравнить решение (57) с классическим решением без моментных напряжений, зададим краевые условия для квадрата  $V$  со стороной  $l = 2$ . Кроме условий (59) полагаем, что  $u_2(x_1) = 0$  и  $u_1(-x_2) = -u_1(x_2)$  (это условие тождественно выполняется в классическом решении), и задаём смещение в одной точке, например  $u_1(1, 1) = 0.1$ , тем самым определяется постоянная  $c_1$ . Выполнив эти требования, получаем, что решение (57) принимает вид

$$u_1(x_2) = c_1 x_2 + \frac{c_1}{2\lambda_1} (e^{-\lambda_1 x_2} - e^{\lambda_1 x_2}) = c_1 (x_2 - (1/\lambda_1) \operatorname{sh}(\lambda_1 x_2)), \quad c_1 = \frac{1}{10(1 - (1/\lambda_1) \operatorname{sh} \lambda_1)}, \quad (63)$$

а напряжения (58) будут следующие:

$$\begin{aligned} \mu_{32} &= \frac{\mu c_1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 x_2} - e^{-\lambda_1 x_2}) = \frac{2\mu c_1}{\lambda_1} \operatorname{sh}(\lambda_1 x_2), \\ \sigma_{21}(x_2) &= \mu c_1 - \frac{\mu c_1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 x_2} + e^{-\lambda_1 x_2}) = \mu c_1 - \frac{2\mu c_1}{\lambda_1} \operatorname{ch}(\lambda_1 x_2), \quad \sigma_{12}(x_1) = \mu c_1. \end{aligned}$$

На рис. 1 приведены границы квадрата  $V$  в соответствии с решением (63) (сплошные линии) для различных значений  $\lambda_1$ . Пунктирные линии соответствуют классическому решению  $u_1 = c_1 x_2$ ,  $c_1 = 0.1$ . При стремлении  $\lambda_1$  к нулю решение (63) не сходится классическому решению, а стремится к кубической функции  $u_1(x_2) = (1/10)x_2^3 + \dots$ . При больших  $\lambda_1$  деформации локализуются вблизи верхней и нижней граней квадрата.

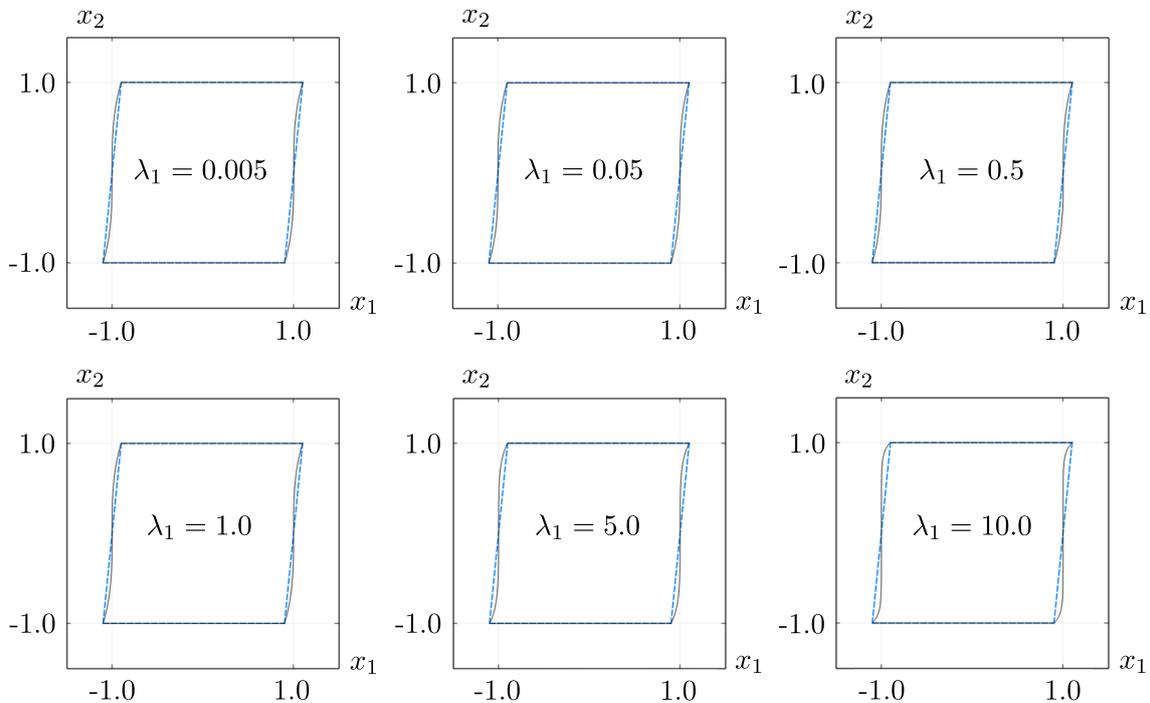


Рис. 1. Сравнение классического решения (пунктирная линия) с решениями (63) (сплошная линия) для различных значений  $\lambda_1$

Кроме условий (59), для решения (57) можно с помощью краевых условий задавать пять постоянных вместо одной в классическом случае. Зададим, например, смещения в двух точках квадрата:

$$u_1(1, 1) = 0.1, \quad u_2(1, 1) = 0.1; \quad u_1(-1, -1) = 0.1, \quad u_2(-1, -1) = 0.1.$$

Выполняя эти условия для решения (57), получим постоянные

$$c_0 = k_0 = \frac{1}{10(1 - \operatorname{ch}\lambda_1)}, \quad k_1 = c_1, \quad (64)$$

$$C_1 = K_1 = -\frac{1}{2} \left( c_0 + \frac{c_1}{\operatorname{sh}\lambda_1} \right), \quad C_2 = K_2 = \frac{1}{2} \left( -c_0 + \frac{c_1}{\operatorname{sh}\lambda_1} \right).$$

Постоянная  $c_1$  характеризует сдвиг и остаётся свободным параметром. Форма деформированного квадрата, соответствующая решению (57), (64), при  $\lambda_1 = 1$  в зависимости от параметра  $M = c_1/(e - e^{-1})$ , приведена на рис. 2.

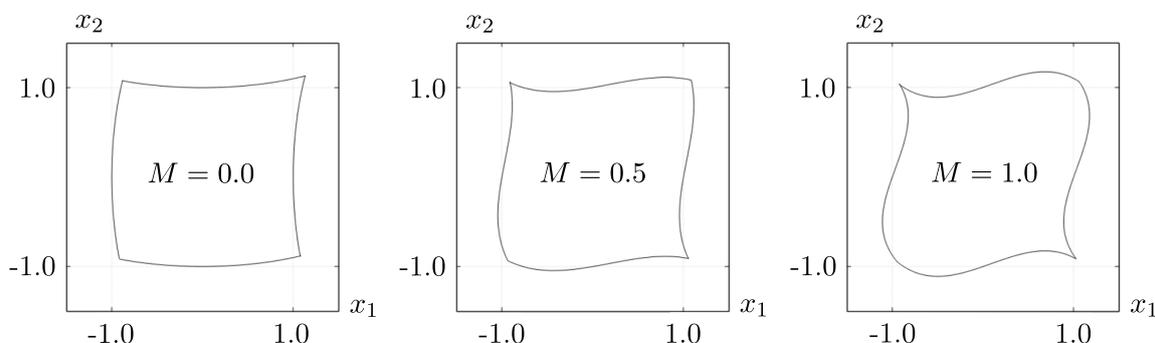


Рис. 2. Форма деформированного квадрата, соответствующая решению (57), (64)

Таким образом, в работе представлены уравнения линейной моментной теории упругости для случая произвольной анизотропии материальных тензоров четвёртого ранга. В определяющих соотношениях выделяются симметричные и кососимметричные составляющие. Рассмотрены некоторые упрощённые варианты линейных определяющих соотношений. Допускается возможность упругости по Коши, когда материальные тензоры четвёртого ранга не обладают главной симметрией. Для материальных тензоров, определяющих силовые и моментные напряжения, введены собственные модули и собственные состояния, которые являются инвариантными характеристиками упругой моментной среды. Для случая плоской деформации и стеснённого вращения приведён пример полного решения двумерной задачи, когда имеются только сдвиговые напряжения. Для анизотропной и изотропной упругих сред решения оказываются существенно различными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твёрд. тела. 1960. Т. 2, № 7. С. 1399–2409.
2. Кувшинский Е.В., Аэро Э.Л. Континуальная теория асимметричной упругости. Учёт «внутреннего» вращения // Физика твёрд. тела. 1963. Т. 5, № 9. С. 2591–2598.
3. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. 1965. № 3. С. 89–112.
4. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, № 3. С. 401–408.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.

6. *Купрадзе В.Д.* Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
7. *Победря Б.Е.* О теории определяющих соотношений в механике деформируемого твёрдого тела // Проблемы механики: К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 635–657.
8. *Победря Б.Е., Омаров С.Е.* Определяющие соотношения моментной теории упругости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 56–58.
9. *Никабадзе М.У.* К построению собственных тензорных столбцов в микрополярной линейной теории упругости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2014. № 1. С. 30–39.
10. *Остросаблин Н.И.* Классы симметрии тензоров анизотропии и обобщение подхода Кельвина // Прикл. механика и техн. физика. 2017. Т. 58, № 3. С. 108–129.
11. *Остросаблин Н.И.* Общее решение двумерной системы статических уравнений Ламе линейной теории упругости с несимметричной матрицей модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 1. С. 61–71.
12. *Емельянов А.Н.* Эффективные характеристики в моментной теории упругости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2016.
13. *Никабадзе М.У.* О связи тензоров напряжений и моментных напряжений в микроконтинуальной теории упругости. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 59–62.
14. *Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И.* Анизотропия упругих свойств материалов // Прикл. механика и техн. физика. 2008. Т. 49, № 6. С. 131–151.
15. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела // Физика твёрд. тела. 1964. Т. 6, № 9. С. 2689–2699.
16. *Никабадзе М.У.* О задаче на собственные значения некоторых применяемых в механике тензоров и о числе существенных условий совместности деформаций Сен-Венана // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2017. № 3. С. 54–58.
17. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во Ленинград. гос. ун-та, 1978.
18. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
19. *Дуйшеналиев Т.Б.* Неклассические решения механики деформируемого тела. М.: Изд-во МЭИ, 2017.

UDC 539.3:517.958

**DEFINING EQUATIONS OF THE ANISOTROPIC MOMENT LINEAR  
THEORY OF ELASTICITY AND THE TWO-DIMENSIONAL PROBLEM  
OF PURE SHEAR WITH CONSTRAINED ROTATION**

© 2023 B. D. Annin<sup>1,2a</sup>, N. I. Ostrosablin<sup>1b</sup>, R. I. Ugryumov<sup>1,2c</sup>

<sup>1</sup>*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,  
pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia,*

<sup>2</sup>*Novosibirsk State University,  
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: <sup>a</sup>annin@hydro.nsc.ru, <sup>b</sup>o.n.i@ngs.ru, <sup>c</sup>riugryumov@mail.ru

Received 25.05.2022, revised 25.05.2022, accepted 12.01.2023

**Abstract.** The paper presents the equations of the linear moment theory of elasticity for the case of arbitrary anisotropy of material tensors of the fourth rank. Symmetric and skew-symmetric components are distinguished in the defining relations. Some simplified variants of linear defining relations are considered. The possibility of Cauchy elasticity is allowed when material tensors of the fourth rank do not have the main symmetry. For material tensors that determine force and moment stresses, eigenmodulus and eigenstates are introduced, which are invariant characteristics of an elastic moment medium. For the case of plane deformation and constrained rotation, an example of a complete solution of a two-dimensional problem is given when there are only shear stresses. For anisotropic and isotropic elastic media, the solutions turn out to be significantly different.

**Keywords:** moment theory of elasticity, asymmetric stress tensors, defining equations, elastic modulus, fourth-rank tensors, pure shear, constrained rotation, two-dimensional problem.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.101

REFERENCES

1. Aero E.L., Kuvshinskii E.V. Osnovnye uravneniya teorii uprugosti sred s vrashchatel'nym vzaimodeistviem chastits [Basic equations of the elasticity theory for media with rotatory interaction of particles]. *Fizika Tverd. Tela*, 1960, Vol. 2, No. 7, pp. 1399–2409 (in Russian).
2. Kuvshinskii E.V., Aero E.L. Kontinual'naya teoriya asimmetrichnoi uprugosti. Uchet «vnutrennego» vrashcheniya [Theory of continuum in the asymmetric elasticity. Considerations of the «internal» rotations]. *Fizika tverd. tela*, 1963, Vol. 5, No. 9, pp. 2591–2598 (in Russian).
3. Koiter V.T. Couple-stresses in the theory of elasticity. *Proc. Koninklijke Nederlandse Akad. van Wetenschappen*, 1964, B. 67, No. 1, pp. 17–44.
4. Pal'mov V.A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity. *J. Appl. Math. Mech.*, 1964, Vol. 28, No. 3, pp. 496–505.
5. Novatskii V. Teoria sprężystości. Warszawa, 1970, (in Polish).
6. Kupradze V.D. Three-Dimensional Problems of Elasticity and Thermoelasticity. Elsevier, 2012.
7. Pobedrya B.E. O teorii opredelyayushchikh sootnoshenii v mekhanike deformiruемого tverdogo tela [On constitutive relations theory in solid mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2003, pp. 635–657 (in Russian).
8. Pobedrya B.E., Omarov S.E. Opredelyayushchie sootnosheniya momentnoi teorii uprugosti [Constitutive relations of the moment theory of elasticity]. *Vestn. MGU. Ser. 1. Matematika. Mekhanika*, 2007, No. 3, pp. 56–58 (in Russian).

9. Nikabadze M.U. K postroeniyu sobstvennykh tenzornykh stolbtsov v mikropolyarnoi lineinoi teorii uprugosti [Construction of eigentensor columns in the linear micropolar theory of elasticity]. *Vestn. MGU. Ser. 1. Matematika. Mekhanika*, 2014, No. 1, pp. 30–39 (in Russian).
10. Ostrosablin N.I. Symmetry classes of the anisotropy tensors of quasielastic materials and a generalized Kelvin approach. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2017, Vol. 58, No. 3, pp. 469–488.
11. Ostrosablin N.I. General solution for the two-dimensional system of static lame's equations with an asymmetric elasticity matrix. *J. Appl. Indust. Math.*, 2018, Vol. 12, No. 1, pp. 126–135.
12. Emel'yanov A.N. Effektivnye kharakteristiki v momentnoi teorii uprugosti: Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk [Effective characteristics in the moment theory of elasticity: Dis. ... cand. phys. math. sci.]. Moscow, 2016 (in Russian).
13. Nikabadze M.U. Relation between the stress and couple-stress tensors in the microcontinuum theory of elasticity. *MGU. Mech. Bull.*, 2011, Vol. 66, No. 6, pp. 141–143.
14. Annin B.D., Ostrosablin N.I. Anisotropy of elastic properties of materials. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, Vol. 49, No. 6, pp. 998–1014.
15. Aero E.L., Kuvshinskii E.V. Kontinual'naya teoriya asimmetricheskoi uprugosti. Ravnovesie izotropnogo tela [Theory of continuum in the asymmetric elasticity. Equilibrium of an isotropic body]. *Fizika Tverd. Tela*, 1964, Vol. 6, No. 9, pp. 2689–2699.
16. Nikabadze M.U. An eigenvalue problem for tensors used in mechanics and the number of independent Saint-Venant strain compatibility conditions. *MGU. Mech. Bull.*, 2017, Vol. 72, No. 3, pp. 66–69.
17. Morozov N.F. Izbrannye dvumernye zadachi teorii uprugosti [Selected two-dimensional problems of elasticity theory]. Leningrad: Izd-vo Leningr. un-ta, 1978 (in Russian).
18. Morozov N.F. Matematicheskie voprosy teorii treshchin [Mathematical problems of fracture theory]. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
19. Duishenaliev T.B. Neklassicheskie resheniya mekhaniki deformiruemogo tela [Non-classical solutions of solid mechanics]. Moscow: MEI Pess, 2017.