

УДК 532.5

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛАСТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ДВУМЕРНОЙ ЯЧЕЙКЕ

© 2023 В. В. Денисенко^а, С. В. Фортова^б*Институт автоматизации проектирования РАН,
ул. 2-я Брестская, 19/18, г. Москва 123056, Россия*E-mails: ^аned13@rambler.ru, ^бsfortova@mail.ruПоступила в редакцию 22.08.2022 г.; после доработки 22.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Описана численная модель, аппроксимирующая систему уравнений вязкой жидкости с примесью полимерных молекул. Данная модель является гибридной и основана на применении годуновской линеаризованной и конечно-разностной схем. По этой схеме поставлена задача колмогоровского типа — вязкое течение в ограниченной области (квадратной ячейке) под действием внешней периодической силы. Сравнивается течение с примесью и без, изучено поведение полимерных молекул в различных областях потока. Получен некий переходной режим, характеризующийся практически полной растянутостью молекул в областях высокого градиента скорости.

Ключевые слова: численные методы в гидродинамике, эластическая турбулентность, гидродинамическая неустойчивость, неньютоновская жидкость.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.105

ВВЕДЕНИЕ

Полимерные растворы привлекают большое внимание как экспериментаторов, так и теоретиков, что объясняется их захватывающим неньютоновским поведением [1]. Растворение даже небольших количеств полимеров в обычной жидкости может резко изменить её гидродинамические и реологические свойства из-за появления упругих степеней свободы. Одним из наиболее ярких проявлений неньютоновской динамики является хаотическое движение жидкости, которое наблюдается при низком числе Рейнольдса, проявляя три основные особенности [2–7]: выраженный рост сопротивления потоку, алгебраическое затухание спектров мощности скорости в широком диапазоне масштабов и на порядки более эффективное перемешивание, чем в упорядоченном потоке. Поскольку эти свойства аналогичны свойствам гидродинамической турбулентности, хаотическое состояние полимерного раствора было названо упругой турбулентностью. Несмотря на близкое сходство между гидродинамической турбулентностью и упругой турбулентностью, физические механизмы, лежащие в основе этих двух видов случайного движения, различны. Известно, что первое происходит при большом Re из-за неустойчивости, возникающей из-за нелинейного инерционного члена в уравнении Навье — Стокса. Напротив, упругая турбулентность имеет место при исчезающе малом Re , где эффекты инерции жидкости не играют никакой роли. Основным источником неустойчивости, приводящей к упругой турбулентности, является упругое напряжение, создаваемое растяжением полимера в потоке. Переход от ламинарного течения к упругой турбулентности контролируется так называемым числом Вайсенберга Wi , т. е. отношением времени линейной релаксации полимера

к характерному времени динамики потока. При больших значениях Wi большинство растворённых полимеров находятся выше перехода спираль-растяжение, что гарантирует их сильную обратную реакцию на движение жидкости при условии, что концентрация полимера достаточно высока [5, 8, 9, 10]. В первых экспериментах по упругой турбулентности использовались три геометрии потока с изогнутыми линиями тока [2–4]: закрученный поток фон Кармана между двумя дисками, поток Куэтта — Тейлора между цилиндрами и поток Дина в криволинейном канале. Недавно экспериментально наблюдались чисто упругие неустойчивости в прямом канале [11, 12], а упругая турбулентность была продемонстрирована численно для вязкоупругого потока Колмогорова [13, 14]. Хотя кривизна обтекаемой линии не является решающим компонентом, она позволяет нам уменьшить критическое число Вайсенберга для возникновения неустойчивости. В каких аспектах упругая турбулентность значительно отличается от своего инерционного аналога из-за вышеупомянутого различия в источниках неустойчивости потока? Хотя о явлении упругой турбулентности известно уже два десятилетия, этот вопрос до сих пор остаётся малоизученным.

1. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Чтобы описать течение с полимерной компонентой, следует добавить к уравнениям вязкой гидродинамики (уравнениям Навье — Стокса) уравнения, описывающие данную компоненту [15]. Состояние полимерной примеси описывается вектором растяжения полимерной молекулы \vec{R} . В своём обычном состоянии (когда на молекулу не действует никаких внешних сил) полимер имеет сферическую форму. При воздействии на него внешней силы (потока жидкости например) он растягивается и степень его растяжения как раз и описывается вектором \vec{R} . Полимерная молекула, помещённая во внешнее неоднородное поле скорости, деформируется, поскольку её различные звенья движутся с различной скоростью. Выпишем определяющие уравнения нашей модели:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \\
 & \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho G \sin(ky) + \mu \Delta u + An \frac{\partial(\gamma(R)(R^x)^2)}{\partial x} + An \frac{\partial(\gamma(R)R^x R^y)}{\partial y}, \\
 & \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho G \sin(kx) + \mu \Delta v + An \frac{\partial(\gamma(R)(R^y)^2)}{\partial y} + An \frac{\partial(\gamma(R)R^x R^y)}{\partial x}, \quad (1) \\
 & \frac{\partial(\rho(u^2 + v^2)/2 + \rho e)}{\partial t} + \frac{\partial[u(\rho(u^2 + v^2)/2 + \rho e + p)]}{\partial x} + \frac{\partial[v(\rho(u^2 + v^2)/2 + \rho e + p)]}{\partial y} \\
 & \quad = \frac{\partial(u\Pi_{xx} + v\Pi_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\Pi_{xy} + v\Pi_{yy})}{\partial y} + u\rho G \sin(ky) + v\rho G \sin(kx), \\
 & \frac{\partial R^x}{\partial t} + u \frac{\partial R^x}{\partial x} + v \frac{\partial R^x}{\partial y} - R^x \frac{\partial u}{\partial x} - R^y \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(R)R^x = C_d \Delta R^x, \\
 & \frac{\partial R^y}{\partial t} + u \frac{\partial R^y}{\partial x} + v \frac{\partial R^y}{\partial y} - R^x \frac{\partial v}{\partial x} - R^y \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma(R)R^y = C_d \Delta R^y, \\
 & p = \sigma \rho e, \quad \sigma = 2/5, \\
 & \gamma(R) = \gamma_0 / (1 - R^2/R_m^2).
 \end{aligned}$$

Здесь последние два уравнения описывают эволюцию полимерной примеси в вязком потоке. Коэффициент An описывает концентрацию полимерных молекул в рассматриваемом растворе; $\gamma(R)$ — коэффициент релаксации, R_m — максимальное растяжение полимерной молекулы.

В процессе численного решения системы (1) обнаружилось, что решение является довольно неустойчивым [14]. Для частичной регуляризации (1) в правую часть уравнений примеси был введён диффузионный член с коэффициентом C_d . В феноменологических уравнениях на \vec{R} в (1) члены $R^i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ описывают деформацию полимерной молекулы неоднородным потоком, а последние члены в левой части описывают её релаксацию. При $\vec{V} = 0$ полимер релаксирует к сферическому состоянию, которому соответствует $\vec{R} = 0$. Имеются различные модели релаксаций полимерных молекул. Одна из наиболее популярных гласит, что [15]

$$\gamma(R) = \gamma_0 / (1 - R^2/R_m^2), \quad (2)$$

где γ_0 — некоторая константа, а R_m — максимальная длина, до которой может быть растянута полимерная молекула, когда она вытягивается в струнку. Поскольку $\gamma(R)$ из (2) в этот момент обращается в бесконечность, то система уравнений на \vec{R} в (1) не допускает растяжение полимерной молекулы до величины больше R_m , как и должно быть. При увеличении характерного градиента скорости происходит так называемый coil-stretch transition, когда полимерная молекула переходит в растянутое состояние. Этот переход происходит, когда градиент скорости становится порядка γ_0 . При рассмотрении полимерных растворов применимо континуальное приближение, когда полимеры считаются непрерывно распределёнными в пространстве. Тогда и векторы растяжений этих полимеров также можно считать непрерывно распределёнными в пространстве. Другими словами, вектор растяжения \vec{R} становится полем, т. е. является функцией не только времени, но и координат. Для описания упругих напряжений вводят упругий тензор напряжений $\Pi_{ik}^e = An\gamma R^i R^k$, где n — плотность полимеров, A — некоторая константа, которая зависит от вязкости раствора и степени полимеризации. Таким образом, в (1) общий тензор напряжений примет вид $\Pi_{ik} = \Pi_{ik}^e + \Pi_{ik}^\nu$ — сумма вязкого и упругого вкладов.

В качестве начальных данных бралась покоящаяся среда: $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $\rho_0 = 10^3$, $p_0 = 10^5$, $R_0^x = 10^{-3}$, $R_0^y = 10^3$. За величину максимального растяжения полимерной молекулы взята величина $R_m = 10^{-1}$. Эмпирически подобранный коэффициент диффузии $C_d = 10^{-4}$. Коэффициент релаксации полимеров $\gamma_0 = 10^{-4}$. Концентрация полимерной примеси An варьировалась в пределах величин от 100 до 5000. Вязкость моделируемого течения полагалась равной $\mu = 1$. Интенсивность накачки (внешней периодической силы) $G = 10^{-2}$, её частота $k = 3$. При этом значения чисел Рейнольдса и Вайсенберга $Re = \rho u L / \mu \sim 10^3$, $Wi = U / (\gamma_0 L) \sim 10^2$.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для численного решения системы (1) использовался гибридный метод второго порядка точности. Гиперболическая часть уравнений (уравнения Навье — Стокса) аппроксимировалась линеаризованным методом Годунова [16]. Уравнения полимерной примеси дискретизировались самым простым методом — конечных разностей. В дальнейшем планируется усовершенствовать данную модель путём включения полимерных уравнений в метод Годунова и сделать сравнение с гибридной моделью. Линеаризованный метод Годунова основывается на том, что определённые величины, называемые инвариантами Римана, переносятся по характеристикам без изменений. Таким образом, расчёт потоков на гранях ячеек расчётной сетки основан на вычислении инвариантов Римана на предыдущем временном слое. Экспериментально показано [16], что данный вариант схемы обладает свойством гарантированного неубывания энтропии, что позволяет моделировать её рост на ударных волнах без каких-либо поправок и дополнительных условий. В расчётах использовалась схема второго порядка точности. За шаг по времени сначала решается система гидродинамических уравнений Навье — Стокса

годуновской методикой, в результате чего получаются известными на следующем временном слое значения величин (ρ, u, v, p) . Затем решается система, описывающая эволюцию вектора растяжений полимерной примеси:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^x}{\partial t} + u \frac{\partial R^x}{\partial x} + v \frac{\partial R^x}{\partial y} - R^x \frac{\partial u}{\partial x} - R^y \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(R) R^x &= 0, \\ \frac{\partial R^y}{\partial t} + u \frac{\partial R^y}{\partial x} + v \frac{\partial R^y}{\partial y} - R^x \frac{\partial v}{\partial x} - R^y \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma(R) R^y &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим шаг по времени $\tau^n = t^{n+1} - t^n$ и запишем простейшую конечно-разностную аппроксимацию системы (3):

$$\begin{aligned} (R^x)_{i,j}^{n+1} &= (R^x)_{i,j}^n + \tau \left[u_{i,j}^n \frac{(R^x)_{i-1,j}^n - (R^x)_{i+1,j}^n}{2\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{(R^x)_{i,j-1}^n - (R^x)_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \right. \\ &\quad \left. - (R^x)_{i,j}^n \frac{u_{i-1,j}^n - u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - (R^y)_{i,j}^n \frac{v_{i,j-1}^n - v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \gamma(R_{i,j}^n) (R^x)_{i,j}^n \right]; \\ (R^y)_{i,j}^{n+1} &= (R^y)_{i,j}^n + \tau \left[u_{i,j}^n \frac{(R^y)_{i-1,j}^n - (R^y)_{i+1,j}^n}{2\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{(R^y)_{i,j-1}^n - (R^y)_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \right. \\ &\quad \left. - (R^x)_{i,j}^n \frac{v_{i-1,j}^n - v_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - (R^y)_{i,j}^n \frac{v_{i,j-1}^n - v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \gamma(R_{i,j}^n) (R^y)_{i,j}^n \right]. \end{aligned}$$

Здесь координаты центра ячейки вычислительной сетки обозначены как (i, j) , $u_{i,j}^n, v_{i,j}^n$ — известные величины, полученные на этапе решения гидродинамической части. В результате получим полное решение системы (1) $(\rho, u, v, p, R^x, R^y)$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В процессе поиска турбулентного режима был обнаружен некий переходный режим, характеризующийся временной периодичностью параметров течения. На рис. 1 показано распределение завихренности данного переходного режима для значения концентрации полимерной примеси $An = 10^3$ и значения расчётного времени $t = 402$.

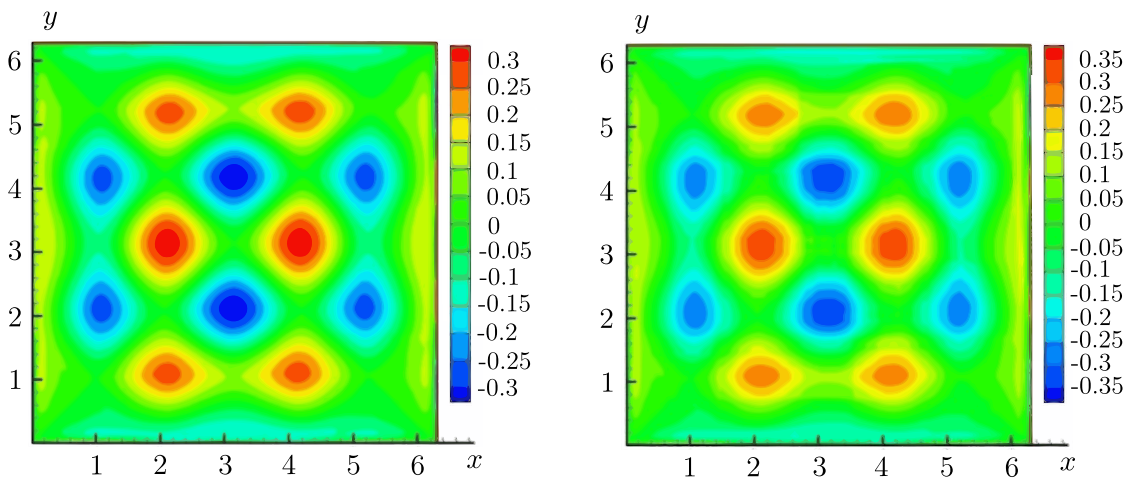


Рис. 1. Завихренность течения без полимерной примеси (слева) и с полимерной примесью (справа) для $An = 10^3$ и $t = 402$

Из данного рисунка видно, что течение имеет не совсем ламинарно-вихревой вид. Для сравнения на данном рисунке приведено течение с такими же параметрами, но без полимерной

примеси. Как видно, при отсутствии полимеров течение носит ламинарный характер, с внесением же в течение полимеров оно переходит в некий периодический, переходной режим. Похожий результат был рассмотрен в [14].

На рис. 2 показаны зависимости нормированного растяжения полимерной молекулы $R/R_m(t)$ от времени в трёх различных точках расчётной области. На этом же рисунке изображено, где в расчётной области находятся эти точки.

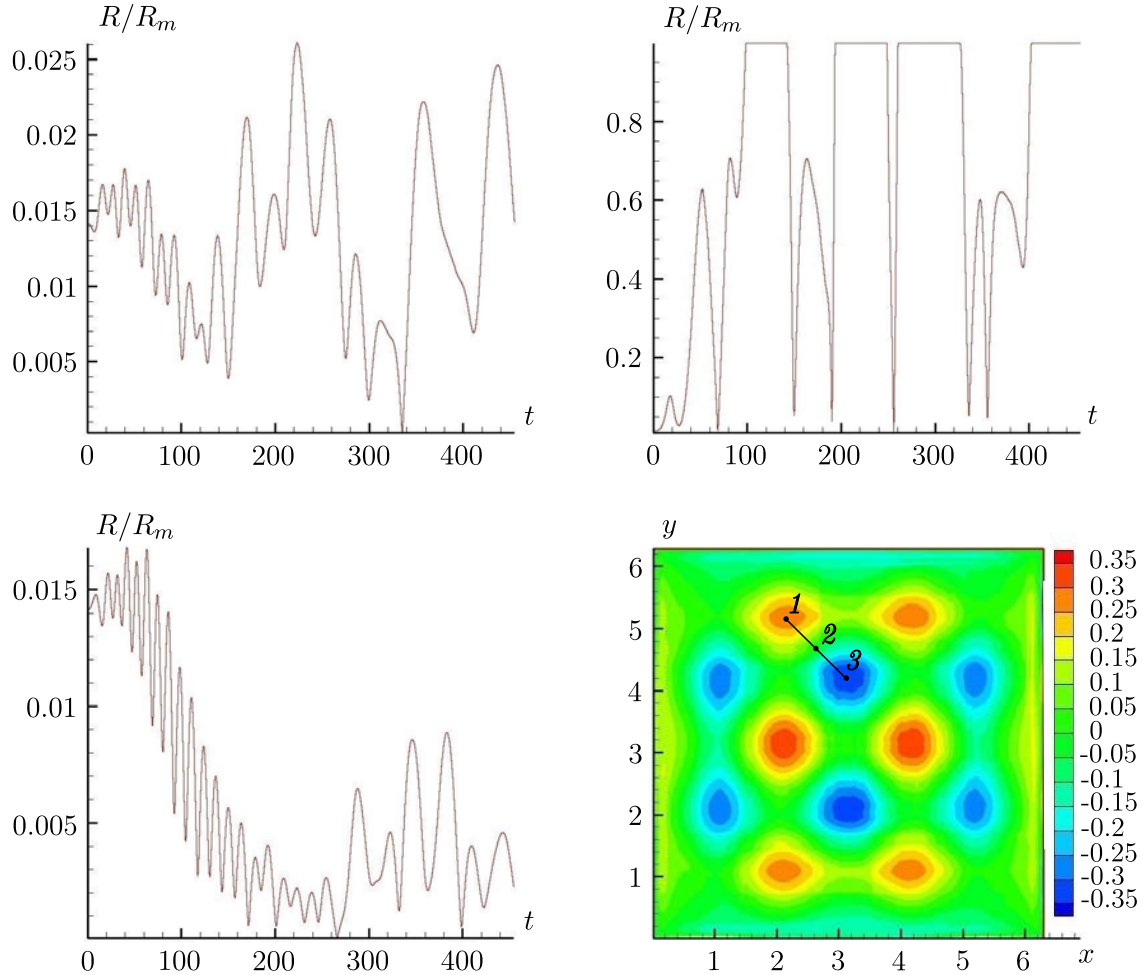


Рис. 2. Зависимости нормированного растяжения полимерной молекулы $R/R_m(t)$ от времени в трёх различных точках расчётной области; точки расчётной области 1, 2, 3 показаны схематически справа внизу на расчётной области

Как и следовало ожидать, в области, близкой к центру вихря, величина $R/R_m(t) \ll 1$. А в области больших градиентов скорости полимеры практически полностью растянуты, благодаря чему течение нарушает свою ламинарность, но этого всё ещё недостаточно для его сваливания в турбулентный режим. На рис. 3 изображена завихренность течения для значения концентрации примеси $An = 10^2$ и $An = 3 \times 10^3$ на один и тот же момент времени. Видно, что при увеличении концентрации примеси течение становится менее ламинарным, т. е. влияние полимеров на него увеличивается.

На рис. 4, 5 показана $R/R_m(t)$ для этих же значений концентрации примеси An . Из приведённых рисунков следует, что растянутость полимеров не сильно зависит от их концентрации в растворе. Концентрация в основном влияет на само течение, и при некоторой её величине возможно наблюдение перехода в эластическую турбулентность. Таким образом, An — один из параметров, влияющих на устойчивость полимерного потока.

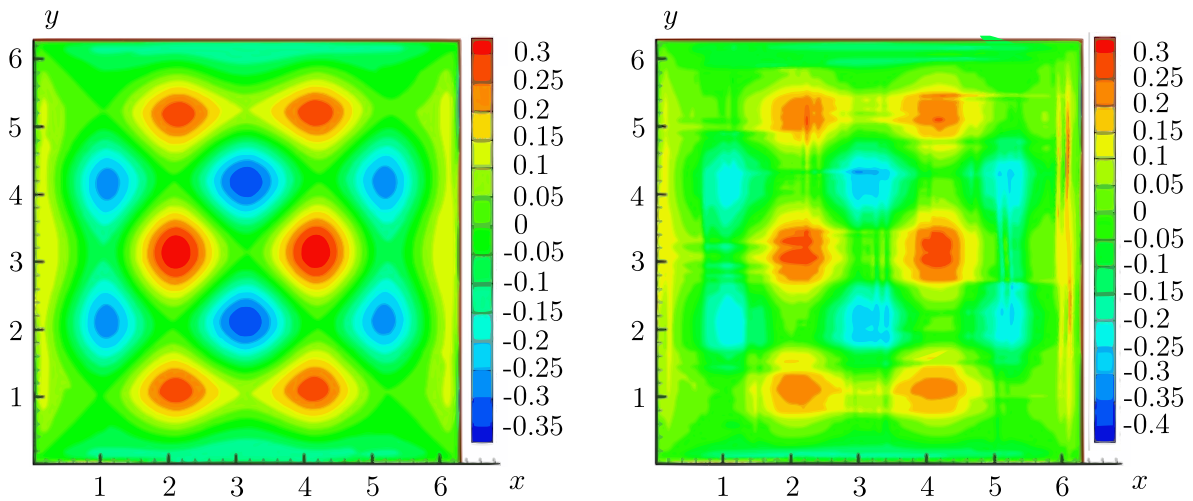


Рис. 3. Завихренность течения для значения концентрации примеси $An = 10^2$ (слева) и $An = 3 \cdot 10^3$ (справа) на один и тот же момент времени

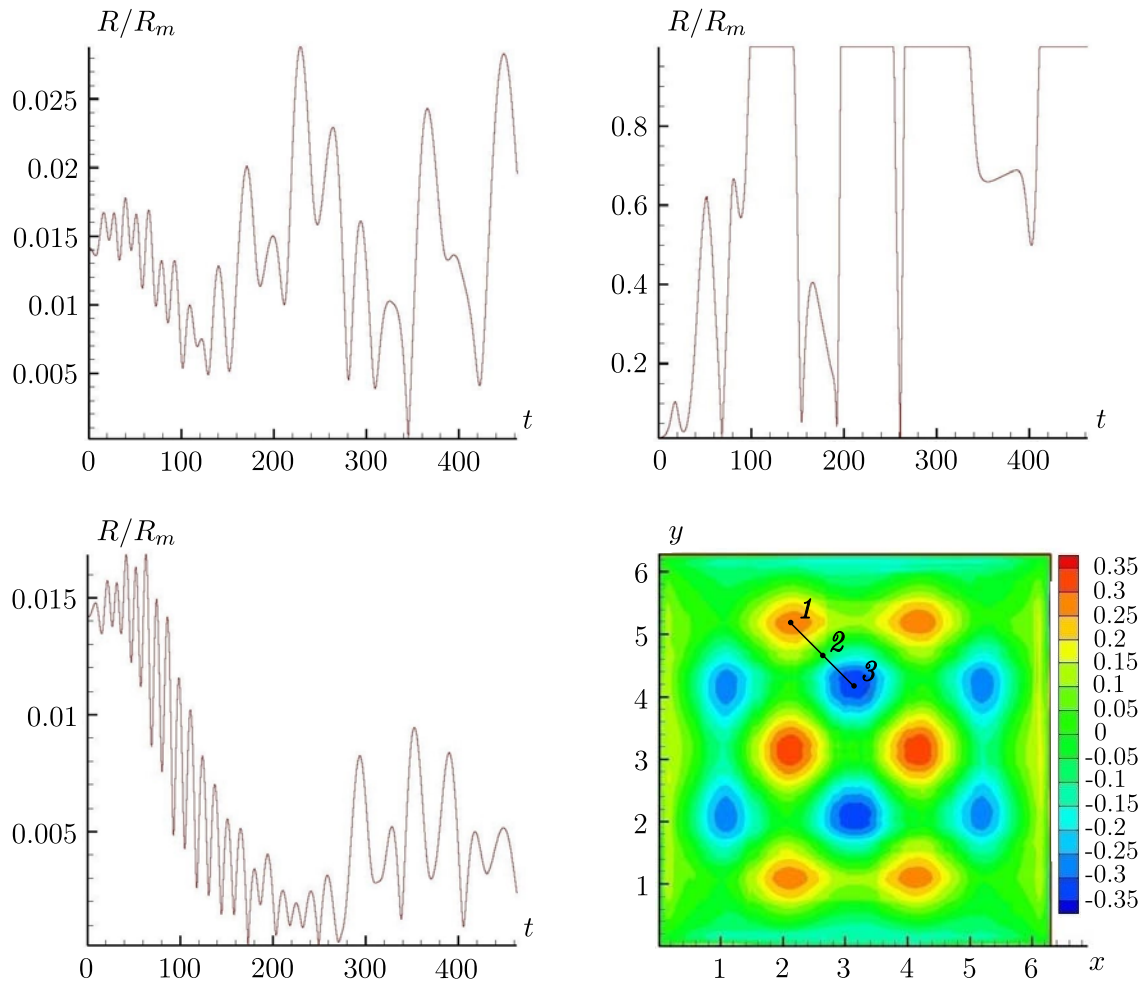


Рис. 4. Зависимости нормированного растяжения полимерной молекулы $R/R_m(t)$ от времени в трёх различных точках расчётной области для концентрации полимерной примеси $An = 10^2$

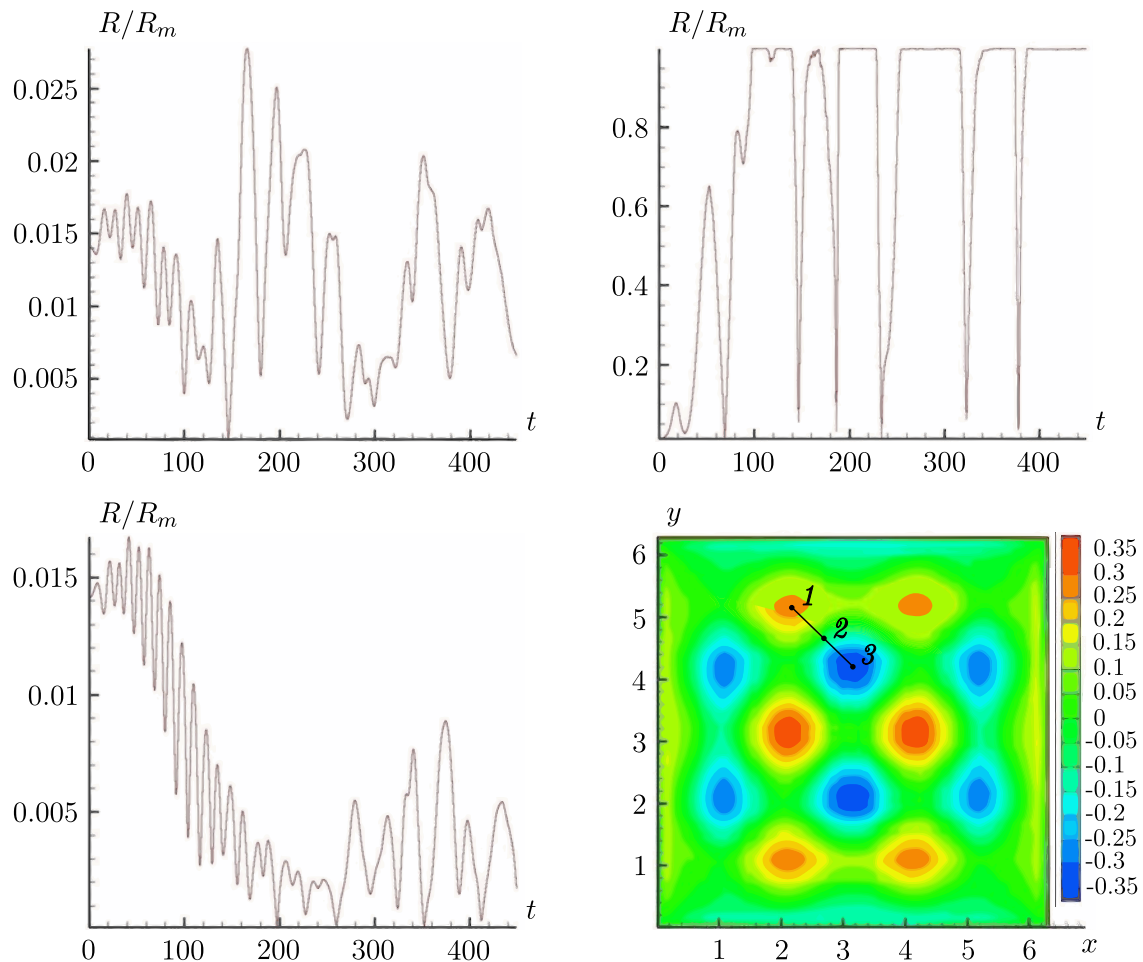


Рис. 5. Зависимости нормированного растяжения полимерной молекулы $R/R_m(t)$ от времени в трёх различных точках расчётной области для концентрации полимерной примеси $An = 3 \times 10^3$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен простейший численный метод решения системы уравнений, описывающих динамику вязкой среды с полимерной примесью. Данный метод основан на гибридизации простейшей линеаризации Годунова и конечно-разностного подхода. Данная гибридизация заключается в том, что за шаг по времени численной схемы вначале решается система гидродинамических уравнений. Далее, зная гидродинамические параметры течения, решается система уравнений на поле растяжений полимерной молекулы. В итоге получаем решение полной системы уравнений, описывающих течение вязкой среды с полимерной примесью. Исследовано течение Колмогоровского типа — течение в ограниченной области под действием внешней периодической силы. Приведено сравнение течения (его завихренности) без примеси и с примесью на определённый момент времени. Течение без примеси в этот временной момент носит ламинарный характер, тогда как с примесью наблюдается некий переходный режим. В этом режиме в области сдвигового течения (между вихрями, которые создаются внешней силой) полимеры практически полностью растянуты. Внутри областей вихревого течения молекулы практически не растянуты. В дальнейшем планируется найти условия, при которых течение становится турбулентным — так называемая эластическая турбулентность. В численном плане данная задача является довольно сложной из-за обилия параметров, описывающих задачу, и возникающих схемных неустойчивостей.

ЛІТЕРАТУРА

1. Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O. Dynamics of Polymeric Liquids. Fluid Mechanics. V. 1. Wiley, 1977.
2. Groisman A., Steinberg V. Elastic turbulence in a polymer solution flow // Nature. 2000. N 405. P. 53–55.
3. Groisman A., Steinberg V. Efficient mixing at low Reynolds numbers using polymer additives // Nature. 2001. N 410. P. 905–908.
4. Groisman A., Steinberg V. Elastic turbulence in curvilinear flows of polymer solutions // New J. Phys. 2004. N 6. P. 29.
5. Gerashchenko S., Chevillard C., Steinberg V. Single-polymer dynamics: coil-stretch transition in a random flow // Europhys. Lett. 2005. N 71. P. 221–227.
6. Burghlea T., Segre E., Steinberg V. Role of elastic stress in statistical and scaling properties of elastic turbulence // Phys. Rev. Lett. 2006. N 96. Article 214502.
7. Burghlea T., Segre E., Steinberg V. Elastic turbulence in von Karman swirling flow between two disks // Phys. Fluids. 2007. N 19. Article 053104.
8. Balkovsky E., Fouxon A., Lebedev A. Turbulent dynamics of polymer solutions // Phys. Rev. Lett. 2000. N 84. P. 4765–4768.
9. Chertkov M. Polymer stretching by turbulence // Phys. Rev. Lett. 2000. N 84. P. 4761–4764.
10. Fouxon A., Lebedev V. Spectra of turbulence in dilute polymer solutions // Phys. Fluids. 2003. N 15. P. 2060–2072.
11. Pan L., Morozov A., Wagner C., Arratia P. E. Nonlinear elastic instability in channel flows at low Reynolds numbers // Phys. Rev. Lett. 2013. N 110. Article 174502.
12. Bodiguel H., Beaumont J., Machado A., Martinie L., Kellay H., Colin A. Flow enhancement due to elastic turbulence in channel flows of shear thinning fluids // Phys. Rev. Lett. 2015. N 114. Article 028302.
13. Berti S., Bistagnino A., Boffetta G., Celani A., Musacchio S. Two-dimensional elastic turbulence // Phys. Rev. E. 2008. N 77. Article 055306(R).
14. Berti S., Boffetta G. Elastic waves and transition to elastic turbulence in a two-dimensional viscoelastic Kolmogorov flow // Phys. Rev. E. 2010. N 82. Article 036314.
15. Anupam Gupta, Dario Vincenzi Effect of polymer-stress diffusion in the numerical simulation of elastic turbulence // J. Fluid Mech. 2019. N 870. P. 405–418.
16. Godunov S., Denisenko V., Klyuchinskiy D., Fortova S., Shepelev V. Study of entropy properties of a linearized version of Godunov's method // Comput. Math. Math. Phys. 2020. V. 60, N 8. P. 628–640.

UDC 532.5

NUMERICAL SIMULATION OF ELASTIC TURBULENCE IN A CONFINED TWO-DIMENSIONAL CELL

© 2023 V. V. Denisenko^a, S. V. Fortova^b

*Institute for Computer Aided Design RAS,
ul. 2-ya Brestckaya 19/18, Moscow 123056, Russia*

E-mails: ^aned13@rambler.ru, ^bsfortova@mail.ru

Received 22.08.2022, revised 22.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. A numerical model that approximates the system of equations of a viscous fluid with the use of polymeric molecules is described. This model is hybrid and is based on the application of Godunov linearized and finite-difference schemes. This scheme is used to calculate a Kolmogorov-type problem - a viscous flow in a confined area (a square cell) under the action of an external periodic force. The flow with and without impurity is compared, the behavior of polymer molecules in different flow regions is studied. A transition regime characterized by almost complete stretching of molecules in regions of high velocity gradient is obtained.

Keywords: numerical methods in hydrodynamics, elastic turbulence, hydrodynamic instability, non-Newtonian fluid, Kolmogorov's problem.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.105

REFERENCES

1. Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O. Dynamics of Polymeric Liquids. Fluid Mechanics. V. 1. Wiley, 1977.
2. Groisman A., Steinberg V. Elastic turbulence in a polymer solution flow. *Nature*, 2000, No. 405, pp. 53–55.
3. Groisman A., Steinberg V. Efficient mixing at low Reynolds numbers using polymer additives. *Nature*, 2001, No. 410, pp. 905–908.
4. Groisman A., Steinberg V. Elastic turbulence in curvilinear flows of polymer solutions. *New J. Phys.*, 2004, No. 6, pp. 29.
5. Gerashchenko S., Chevillard C., Steinberg V. Single-polymer dynamics: coil-stretch transition in a random flow. *Europhys. Lett.*, 2005, No. 71, pp. 221–227.
6. Burghlea T., Segre E., Steinberg V. Role of elastic stress in statistical and scaling properties of elastic turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, No. 96, article 214502.
7. Burghlea T., Segre E., Steinberg V. Elastic turbulence in von Karman swirling flow between two disks. *Phys. Fluids*, 2007, No. 19, article 053104.
8. Balkovsky E., Fouxon A., Lebedev A. Turbulent dynamics of polymer solutions. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, No. 84, pp. 4765–4768.
9. Chertkov M. Polymer stretching by turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, No. 84, pp. 4761–4764.
10. Fouxon A., Lebedev V. Spectra of turbulence in dilute polymer solutions. *Phys. Fluids*, 2003, No. 15, pp. 2060–2072.
11. Pan L., Morozov A., Wagner C., Arratia P. E. Nonlinear elastic instability in channel flows at low Reynolds numbers. *Phys. Rev. Lett.*, 2013, No. 110, article 174502.

12. Bodiguel H., Beaumont J., Machado A., Martinie L., Kellay H., Colin A. Flow enhancement due to elastic turbulence in channel flows of shear thinning fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 2015, No. 114, article 028302.
13. Berti S., Bistagnino A., Boffetta G., Celani A., Musacchio S. Two-dimensional elastic turbulence. *Phys. Rev. E*, 2008, No. 77, article 055306(R).
14. Berti S., Boffetta G. Elastic waves and transition to elastic turbulence in a two-dimensional viscoelastic Kolmogorov flow. *Phys. Rev. E*, 2010, No. 82, article 036314.
15. Anupam Gupta, Dario Vincenzi Effect of polymer-stress diffusion in the numerical simulation of elastic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 2019, No. 870, pp. 405–418.
16. Godunov S., Denisenko V., Klyuchinskiy D., Fortova S., Shepelev V. Study of entropy properties of a linearized version of Godunov's method. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, Vol. 60, No. 8, pp. 628–640.