

УДК 532.5.032:532.517.3

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОМ ПРОСТРАНСТВЕ**© 2023 А. Н. Долуденко^{1a}, И. В. Колоколов^{2b}, В. В. Лебедев^{2c},
С. В. Фортова^{3d}¹Объединённый институт высоких температур РАН,
ул. Ижорская, 13, стр. 2, г. Москва 125412, Россия,²Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН,
Черноголовка, просп. Акад. Семенова, 1А, г. Москва 142432, Россия,³Институт автоматизации проектирования РАН,
ул. 2-я Брестская, 19/18, г. Москва 123056, РоссияE-mails: ^aadoludenko@gmail.com, ^bigor.kolokolov@gmail.com,
^clwlebede@gmail.com, ^dsfortova@mail.ruПоступила в редакцию 22.08.2022 г.; после доработки 22.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Численно исследуется двумерное течение вязкой жидкости в ячейке конечного размера, возникающее в результате обратного каскада, поддерживаемого постоянной накачкой. Накачка осуществляется статической силой, периодической в пространстве по двум направлениям. Моделирование проводится для разных значений коэффициента трения о дно. Наблюдаются несколько различных режимов течения. В одном из них преобладает большой вихрь с чётко определённым средним профилем скорости. В другом состоянии возникают сильные хаотические течения с большим количеством вихрей различного размера и времени жизни. В третьем состоянии наблюдается ламинарное течение. Характер реализованного состояния зависит от коэффициента кинематической вязкости жидкости, величины волнового вектора внешней силы накачки и коэффициента трения о дно. При постоянных величинах кинематической вязкости и волнового вектора малое значение коэффициента трения приводит к возникновению первого состояния. При увеличении коэффициента трения о дно идёт переход от течения с одним крупным вихрем к ламинарному течению через ряд состояний с несколькими нестабильными вихрями, которые мы называем хаотическим движением. В работе представлены результаты численного моделирования течения слабо сжимаемой вязкой жидкости в замкнутой ячейке с граничными условиями прилипания на стенках.

Ключевые слова: двумерная турбулентность, вихрь, трение о дно.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.106

ВВЕДЕНИЕ

Хотя строго двумерных турбулентных течений в природе не существует, некоторые черты двумерной турбулентности проявляют многие крупномасштабные геофизические и астрофизические течения. В этих случаях обычно геометрические масштабы по одному из измерений на несколько порядков меньше, чем по оставшимся двум, и при этом говорят о квазидвумерной турбулентности.

В двумерной турбулентности Р. Крайчнаном теоретически предсказана возможность существования двух каскадов: прямого каскада энтропии со степенной зависимостью спектра

от волнового числа $E(k) \sim k^{-3}$ при больших волновых числах k , превосходящих характерное волновое число накачки энергии k_f , и обратного каскада энергии, направленного в сторону меньших k , со спектром $E(k) \sim k^{-5/3}$ [1]. Из-за обратного каскада переноса энергии в замкнутой системе энергия должна конденсироваться на масштабе этой системы, при этом должны формироваться крупномасштабные вихревые течения. Это происходит потому, что вихри, создающиеся на масштабе накачки, в силу нелинейного взаимодействия с течением времени начинают объединяться с образованием всё больших и больших по размеру вихрей. При этом в ограниченной системе максимальный размер вихря не может превышать размера самой системы. Подобные структуры размером с систему впервые наблюдались экспериментально [2] и численно [3]. Таким образом, энергия переносится по обратному каскаду и диссипирует на крупных масштабах, для которых существенны потери энергии за счёт трения. Трение возникает как в вязком подслое вблизи боковых стенок, так и у дна. Именно здесь начинает проявляться квазидвумерность. Дело в том, что при постановке эксперимента по исследованию двумерной турбулентности, например в [4], всегда присутствует третье измерение и дно, ведь жидкость находится в специальной ячейке — кювете. При двумерном моделировании такого дна не существует, и оно вводится путём внесения дополнительного члена в уравнения Навье — Стокса. Влиянию трения о дно на характер формирования двумерного течения посвящена настоящая работа.

1. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Моделирование было выполнено при помощи распараллеленного численного алгоритма, основанного на явной схеме метода Мак-Кормака [5]. На каждом временном шаге шаблон разностной схемы меняется четыре раза: разности «вперёд» и «назад» на шаге предиктора вдоль оси Ox , разности «вперёд» и «назад» на шаге предиктора вдоль оси Oy . На стадии корректора смена производится аналогично, за исключением того, что разность «вперёд» меняется на разность «назад» и, наоборот, разность «назад» меняется на разность «вперёд». Эти смены направления разностей циклически меняются с каждым временным шагом, обеспечивая «однородность» разностной схемы в пространстве. Такой подход был успешно использован в работах [6–8]. Этот метод хорошо зарекомендовал себя при решении гиперболических уравнений газо- и гидродинамики. В данном случае гиперболическая часть уравнений решается методом Мак-Кормака, а параболическая часть — с помощью стандартного конечно-разностного метода. Помимо этого, используется метод искусственной сжимаемости [9], при котором последняя является переменной и напрямую влияет на скорость распространения возмущения. Эта скорость должна быть больше, чем возможные максимальные скорости потока, появляющиеся при моделировании.

Рассматривается двумерное течение вязкой жидкости в замкнутой квадратной ячейке Ω , размер которой составляет $2\pi \times 2\pi$ вдоль осей Ox и Oy соответственно. В этой области решаются уравнения Навье — Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u V) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u + f_x - \zeta u, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v V) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v + f_y - \zeta v. \end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность жидкости; $V = (u, v)^T$ — вектор скорости, компоненты которого равны соответственно u и v ; μ — динамическая вязкость жидкости; p — давление; ζ — коэффициент трения о дно; f_x и f_y — компоненты внешней силы:

$$f_x = \rho G \sin(k_f y), \quad f_y = -\rho G \sin(k_f x),$$

где G — амплитуда внешней силы, k_f — пространственная частота внешней силы. В моделировании было выбрано значение $k_f = 5$.

Для замыкания системы уравнений использовалось уравнение слабосжимаемости вида $dp = c^2 d\rho/\rho$, где c — скорость звука.

В качестве граничных условий на стенках рассматриваемой области Γ поставлены условия прилипания для вектора скорости $V|_{\partial\Gamma} = 0$, где $\partial\Gamma$ — граница расчётной области.

Скалярные величины на границе области $\partial\Gamma$ остаются неизменными:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\partial\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial n} \right|_{\partial\Gamma} = 0,$$

где n — вектор нормали к границе $\partial\Gamma$.

Начальные условия и физические свойства жидкости: $p(t = 0) = p_0 = 10^5$ Па, $\rho = 1000$ кг/м³, $\mu = 0,01$ Па·с, $G = 0,05$ Н/кг, $V(t = 0) = 0$ для всех x, y в пределах области Ω .

Вычисления были выполнены на сетках размером 128×128 ; 256×256 ; 512×512 ячеек. Качественно результаты всех расчётов приблизительно одинаковы, но количественно интегральные характеристики несколько отличаются. Были выполнены расчёты и для сетки размером 1024×1024 , и оказалось, что количественные результаты близки к тем, что были получены на сетке размером 512×512 ячеек. В виду большого количества расчётов сначала проводилось качественное исследование течения на сетке 128×128 расчётных ячеек, а детальный анализ проводился на основе расчётов, проведённых на сетке 512×512 как компромиссной между точностью и временем расчётов.

Характер турбулентного течения определялся по времени жизни ведущего вихря (т. е. вихря с наибольшим значением завихренности). В фазе с когерентным вихрем (он же ведущий) его время жизни велико (бесконечно), а при переходе в хаотическую фазу время жизни ведущего вихря становится конечным.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

При малом коэффициенте трения о дно $\zeta = 0.0001$ реализуется сценарий с обратным каскадом, когда идёт передача кинетической энергии от вихрей меньших размеров к вихрям больших размеров. Мелкие вихри объединяются в одну крупную структуру. С течением времени возникает один крупный вихрь и четыре маленьких в углах ячейки, размеры которых ограничены размерами расчётной ячейки (см. рис. 1(a)). Наступает квазистационарный режим, при котором средние значения как энергии, так и энтропии практически не меняются со временем. Это верно при рассмотрении нулевых граничных условий (т. е. условий с прилипанием к стенке), когда канал диссипации энергии связан в основном с боковыми стенками ячейки. Именно из-за создающегося вязкого пограничного слоя у боковых стенок прекращается рост энергии в системе и наступает баланс между генерацией и диссипацией. На рис. 2(a) можно видеть, что начиная с 450 секунды график кинетической энергией становится горизонтальным. Здесь кинетическая энергия определяется, как величина: $E = \sum_{ij} \frac{u_{ij}^2 + v_{ij}^2}{2}$, где суммирование производится по всем расчётным ячейкам (ij) на текущем шаге по времени.

При увеличении коэффициента трения о дно до $\zeta = 0.025$ перенос энергии по обратному каскаду оказывается подавленным, энергия не доходит до больших масштабов и один большой квазистационарный вихрь не образуется. В течении возникает большое количество вихрей различного размера, которые быстро и хаотично перемещаются внутри расчётной ячейки, исчезают и образуются вновь (рис. 1(b)).

При дальнейшем увеличении коэффициента трения о дно до $\zeta = 0.1$ наблюдается ламинарное течение, которое может повторять начальное распределение вихрей. Также вихри

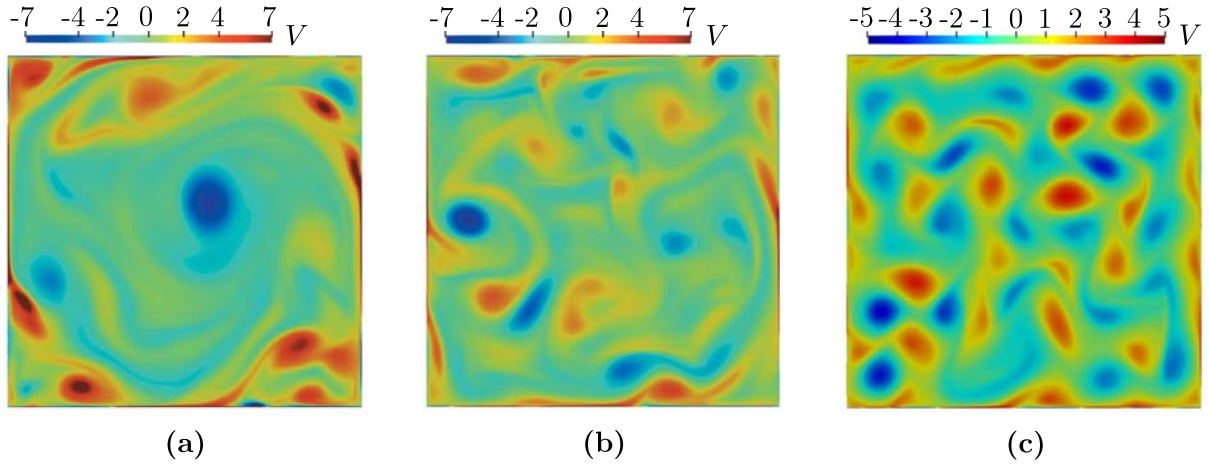


Рис. 1. Завихренность в различного типа течениях на момент времени 500 с: когерентный вихрь, $\zeta = 0,0001$ (a), хаотическое течение, $\zeta = 0,025$ (b), ламинарное течение, $\zeta = 0,1$ (c).

Расчётная сетка имеет размеры 512×512 ячеек

могут медленно перемещаться недалеко от того местоположения, в котором они были на начальный момент времени (рис. 1(b)).

Как и при возникновении вихря, в хаотическом и ламинарном течениях может наблюдаться квазистационарное течение вследствие того, что величина закачиваемой энергии равна величине диссипируемой энергии. На рис. 2(a, b) показаны графики зависимости кинетической энергии и энтропии от времени для систем с разной величиной коэффициента трения о дно. Здесь следует отметить, что энтропия рассчитывается согласно следующему уравнению:

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial v_{ij}}{\partial x} - \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} \right)^2.$$

Из графиков видно, что с увеличением трения о дно уменьшается как интегральная энергия, так и интегральная энтропия. При этом система «выходит» на стационарный режим, при котором средние значения величин практически не меняются от времени. При ламинарном течении отклонения энтропии от среднего значения меньше, чем при хаотическом течении.

В развитом двумерном турбулентном движении присутствует обратный каскад, в котором зависимость кинетической энергии от скорости её диссипации и волнового вектора может быть представлена как [1]

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}, \quad (1)$$

где C — некая константа, ε — скорость диссипации кинетической энергии, k — волновое число, характеризующее масштаб образующихся вихрей.

В инерционном интервале зависимость $E(k)$ несколько иная:

$$E(k) = C_\Omega \varepsilon_\Omega^{2/3} k^{-3}, \quad (2)$$

здесь C_Ω — константа, отличная от C , а ε_Ω — скорость диссипации энтропии.

На рис. 2(c) представлен спектр кинетической энергии в логарифмическом масштабе по обоим координатным осям.

Спектр был получен с усреднением по времени в 100 с. Помимо графиков, соответствующих нескольким величинам коэффициента трения о дно, показан спектр течения при отсутствии трения (линия 4). Можно видеть, что спектр течения близок к спектру с малым коэффициентом трения о дно, за исключением того, что амплитуда спектра несколько больше. Таким

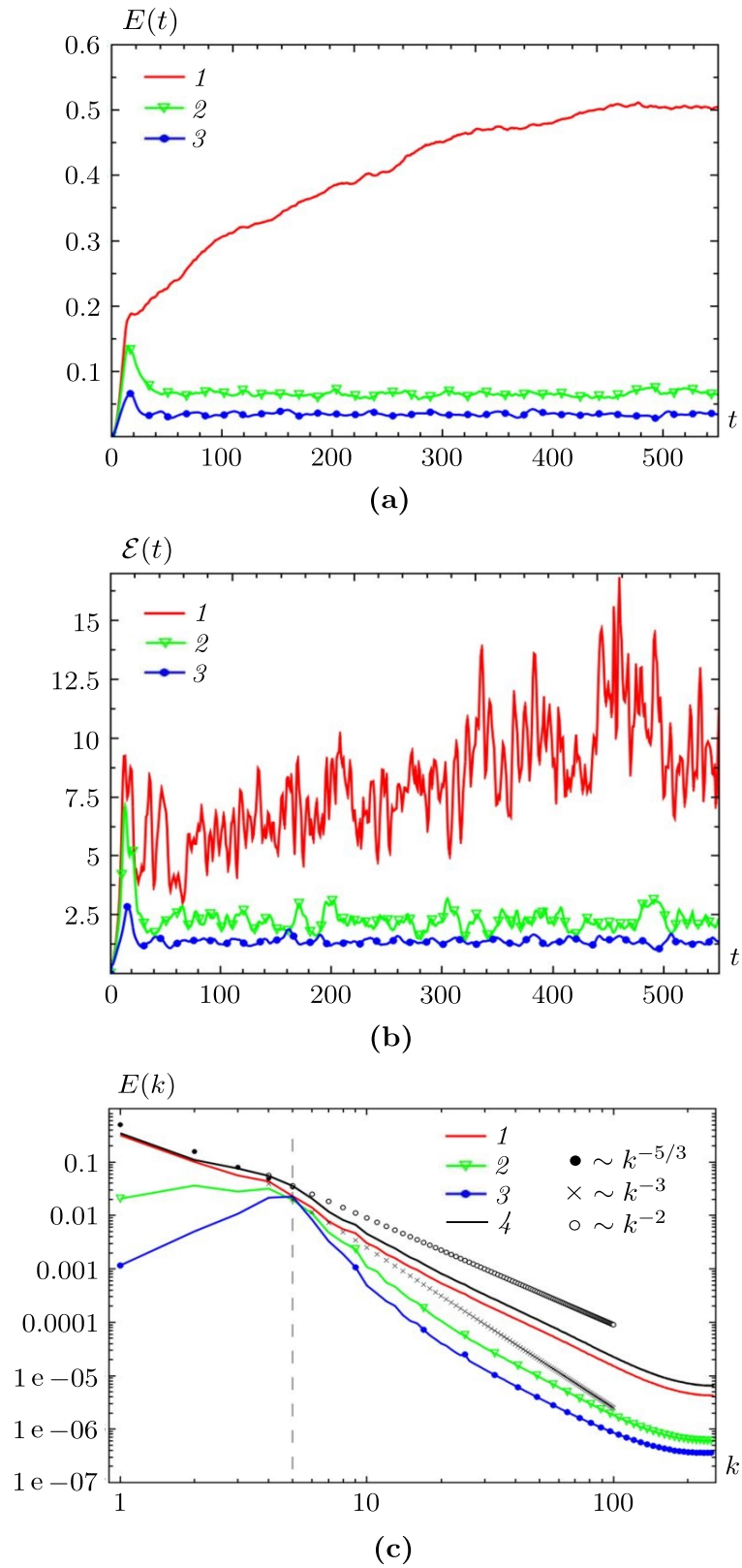


Рис. 2. Графики кинетической энергии (а), энтропии (б) и спектра кинетической энергии (с) при различных коэффициентах трения о дно: $\zeta = 0,0001$ (1), $\zeta = 0,025$ (2), $\zeta = 0,1$ (3), $\zeta = 0$ (4)

образом, можно считать, что течение с малым коэффициентом трения о дно соответствует течению в отсутствие этого трения.

Вертикально пунктирной линией показано волновое число, соответствующее масштабу накачки внешней силы, $k_f = 5$. Слева от этой вертикальной линии должен наблюдаться обратный каскад энергии. При малом коэффициенте трения о дно (кривая 1) видно, что этот участок зависимости хорошо согласуется с теоретической зависимостью (1), при которой энергия пропорциональна волновому числу с коэффициентом $-5/3$. Эта зависимость показана незакрашенными кружками. При увеличении трения о дно зависимость (1) в области волновых чисел, меньших $k_f = 5$, перестаёт выполняться для кривых 2 и 3, которые значительно отклоняются от прямой, соответствующей формуле (1). Это говорит об отсутствии обратного каскада для соответствующих коэффициентов трения о дно.

Справа от вертикальной пунктирной прямой должен наблюдаться инерционный интервал, соответствующий зависимости (2). Прямая, отображённая крестиками, отображает эту зависимость. Можно видеть, что инерционный интервал для кривой 1, соответствующей развитому турбулентному течению только в начальной своей части, непосредственно после вертикальной прямой соответствует этой зависимости. Далее, после $k = 11$ коэффициент пропорциональности становится больше -3 и кривая начинает проходить между наклонной кривой с коэффициентом -3 и прямой с коэффициентом -2 (показана незакрашенными кружками). Для кривых 2 и 3 наблюдаются похожие зависимости за исключением того, что по величине энергия уменьшается с увеличением трения о дно. Небольшое отличие графиков на инерционном интервале связано с тем, что в данном интервале канал диссипации энтрофии не нарушен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При рассмотрении двумерного течения жидкости, в особенности если это касается сопоставления с экспериментом, необходимо учитывать условия, присущие трёхмерной геометрии. В первую очередь здесь подразумевается учёт влияния дна экспериментальной кюветы на течение жидкости, находящейся в ней. В двумерной расчётной системе это физическое дно учитывается добавлением диссипативного члена, связанного с ним, в уравнение сохранения импульса. Этот член прямо пропорционален скорости течения. Величина коэффициента пропорциональности, т. е. коэффициент трения о дно, определяет характер возникающего течения при неизменных остальных параметрах системы: амплитуда силы внешней накачки, её пространственная частота, кинематическая вязкость жидкости. При отсутствии трения о дно или его малой величине образуется один крупный вихрь в центре рассматриваемой ячейки и несколько более мелких, вращающихся в противоположную сторону в её углах. Рост энергии на масштабе ячейки ограничивается наличием вязкого пограничного слоя, в котором происходит диссипация энергии. Именно для этого типа течения спектр энергии является характерным для двумерной турбулентности с присутствием наклона $-5/3$ в области обратного каскада и наклона от -2 до -3 в области прямого каскада. С увеличением коэффициента трения последний начинает блокировать поток энергии по обратному каскаду, вследствие чего энергия не достигает крупных структур и распределяется на вихрях меньшего масштаба. На графике спектра кинетической энергии (рис. 2(с), кривые 2, 3) это наблюдается в виде другой зависимости наклона кривой или вообще отсутствия прямолинейного участка, отвечающего за обратный каскад. Инерционный интервал меняется не в столь сильной степени, поскольку он определяется скоростью диссипации энтрофии. При дальнейшем увеличении силы трения о дно она может полностью блокировать развитие вихревого неустойчивого движения вплоть до того, что его характер будет повторять пространственный характер внешней силы.

Если говорить об эксперименте, то трение о дно накладывает некоторые ограничения на его проведение. Для того чтобы наблюдалось выраженное турбулентное течение с образованием крупного вихря, трение о дно возможно, но коэффициент этого трения должен быть достаточно малым. Для уменьшения трения о дно необходимы специальные экспериментальные

подходы. Вероятно, эффект исчезновения когерентного вихря при увеличении коэффициента трения о дно экспериментально наблюдался в работе [10].

Результатом численных экспериментов, представленных в данной работе, является определение роли величины коэффициента трения о дно при изучении различных режимов течения вязкой жидкости в двумерной ячейке с твёрдыми стенками.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kraichnan R.H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence // *Phys. Fluids*. 1967. V. 10, N 7. P. 1417–1423; DOI: 10.1063/1.1762301
2. *Sommeria J.* Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 170, N 2. P. 139–168; DOI: 10.1017/S0022112086000836
3. *Boffetta G., Celani A., Vergassola M.* Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence: deviations from Gaussian behavior // *Phys. Rev. E. Stat. Physics, Plasmas, Fluids, Relat. Interdiscip. Top.* 2000. V. 61, N 1; DOI: 10.1103/physreve.61.r29
4. *Orlov A.V., Brazhnikov M.Y., Levchenko A.A.* Large-Scale coherent vortex formation in two-dimensional turbulence // *JETP Lett.* 2018. V. 107, N 3. P. 157–162; DOI: 10.1134/S0021364018030128
5. *Maccormack R.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // 4 Aerodynamic Test. Conf. Cincinnati, 1969; DOI: 10.1134/S0021364018030128
6. *Apfelbaum M.S., Doludenko A.N.* Hydrodynamic characteristics of weakly conductive liquid media in the non-uniform electric field // *Math. Montisnigri*. 2019. V. 45. P. 74–84; DOI: 10.20948/mathmontis-2019-45-6
7. *Doludenko A.N., et al.* Numerical simulation of the Rayleigh–Taylor instability of inviscid and viscous fluid // *Phys. Scripta*. 2019. V. 94, N 9; DOI: 10.1615/ICHMT.2014.IntSympConvHeatMassTransf.1000
8. *Doludenko A.N., et al.* Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction // *Phys. Fluids*. 2021. V. 33, N 1; DOI: 10.1063/5.0038863
9. *Anderson D., Tannehill J.C., Pletcher R.H.* *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Boca Raton, 2016.
10. *Xia H., et al.* Turbulence-condensate interaction in two dimensions // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101, N 19. Article 4504; DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.194504

UDC 532.5.032:532.517.3

**NUMERICAL INVESTIGATION OF THE VISCOUS
TWO-DIMENSIONAL FLUID FLOW IN A CLOSED CELL****© 2023 A. N. Doludenko^{1a}, I. V. Kolokolov^{2b}, V. V. Lebedev^{2c},
S. V. Fortova^{3d}**¹*Joint Institute for High Temperatures RAS,
ul. Izhorskaya 13, str. 2, Moscow 125412, Russia,*²*Landau Institute for Theoretical Physics RAS,
pr. Acad. Semenova 1a, Chernogolovka, Moscow 142432, Russia,*³*Institute of Computer Aided Design RAS,
ul. 2-ya Brestskaya 19/18, Moscow 123056, Russia*E-mails: ^aadoludenko@gmail.com, ^bigor.kolokolov@gmail.com,
^clwlebede@gmail.com, ^dsfortova@mail.ru

Received 22.08.2022, revised 22.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. A two-dimensional flow of a viscous fluid in a cell of finite size is studied numerically. The flow arises as a result of an inverse cascade, supported by a constant pumping. Several different states are observed. One of them is dominated by a large eddy with a well-defined average velocity profile. In the other state, strong chaotic large-scale fluctuations predominate. Laminar flow is observed in the third state. The nature of the definite state depends on the coefficient of the fluid kinematic viscosity, the magnitude of the external pumping force wave vector of the, and the value of the bottom friction factor. When the values of the kinematic viscosity and wave vector are fixed, a small value of the bottom friction factor leads to the appearance of the first state. As the coefficient of bottom friction factor increases, there is a transition from a flow with one large vortex to a laminar flow through a series of states with several unstable vortices, which we call chaotic motion. The paper presents the results of numerical simulation of the of a weakly compressible viscous fluid flow in a closed cell with no-slip boundary conditions on the walls. Pumping is carried out by a static force, periodic in space in two directions. The simulation is carried out for different values of the bottom friction factor.

Keywords: 2D turbulence, coherent vortex, bottom friction.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.106

REFERENCES

1. Kraichnan R.H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 1967, Vol. 10, No. 7, pp. 1417–1423; DOI: 10.1063/1.1762301
2. Sommeria J. Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *J. Fluid Mech.*, 1986, Vol. 170, No. 2, pp. 139–168; DOI: 10.1017/S0022112086000836
3. Boffetta G., Celani A., Vergassola M. Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence: deviations from Gaussian behavior. *Phys. Rev. E. Stat. Physics, Plasmas, Fluids, Relat. Interdiscip. Top.*, 2000, Vol. 61, No. 1; DOI: 10.1103/physreve.61.r29
4. Orlov A.V., Brazhnikov M.Y., Levchenko A.A. Large-Scale coherent vortex formation in two-dimensional turbulence. *JETP Lett.*, 2018, Vol. 107, No. 3, pp. 157–162; DOI: 10.1134/S0021364018030128

5. Maccormack R. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. 4 Aerodynamic Test. Conf. Cincinnati, 1969; DOI: 10.1134/S0021364018030128
6. Apfelbaum M.S., Doludenko A.N. Hydrodynamic characteristics of weakly conductive liquid media in the non-uniform electric field. *Math. Montisnigri*, 2019, Vol. 45, pp. 74–84; DOI: 10.20948/mathmontis-2019-45-6
7. Doludenko A.N., et al. Numerical simulation of the Rayleigh–Taylor instability of inviscid and viscous fluid. *Phys. Scripta*, 2019, Vol. 94, No. 9; DOI: 10.1615/ICHMT.2014.IntSympConvHeatMassTransf.1000
8. Doludenko A.N., et al. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction. *Phys. Fluids*, 2021, Vol. 33, No. 1; DOI: 10.1063/5.0038863
9. Anderson D., Tannehill J.C., Pletcher R.H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Boca Raton, 2016.
10. Xia H., et al. Turbulence-condensate interaction in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, Vol. 101, No. 19, article 4504; DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.194504