

УДК 519.63

ОБ ОДНОЙ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЕ ТИПА ГОДУНОВА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ГАЗОВОЙ И ПЫЛЕВОЙ КОМПОНЕНТ В ЗАДАЧАХ ЗВЕЗДООБРАЗОВАНИЯ

© 2023 И. М. Куликов^{1a}, И. Г. Черных^{1b}, А. Ф. Сапетина^{1c},
Э. И. Воробьев^{2d}, В. Г. Элбакян^{3e}

¹ *Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
просп. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,*

² *Институт астрономии, Университет города Вена,
ул. Тюркешанцштрассе, 17, г. Вена 1180, Австрия,*

³ *НИИ физики Южного федерального университета,
просп. Стачки, 194, г. Ростов-на-Дону 344090, Россия*

E-mails: ^akulikov@ssd.sccc.ru, ^bchernykh@parbz.sccc.ru, ^cafsapetina@gmail.com,
^deduard.vorobiev@univie.ac.at, ^evgelbakyan@sfedu.ru

Поступила в редакцию 16.08.2022 г.; после доработки 20.09.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Изложена одна конструкция метода типа Годунова на основе схемы разделения операторов, описывающих работу сил давления и адвективного переноса. Отдельный учёт адвективного переноса позволяет в рамках единой численной схемы описать движение как газовой, так и пылевой компонент. В случае описания динамики газа учёт работы сил давления производится на отдельном этапе независимо от переноса, что позволяет использовать численную схему при решении задач звездообразования, где приходится совместно решать уравнения гидродинамики и уравнения для движения пыли. Для уменьшения диссипации численного метода используется кусочно-параболическое представление физических переменных по всем направлениям. Численный метод верифицирован на задачах о распаде гидродинамического и пылевого разрывов, задаче Седова о точечном взрыве и задаче о коллапсе облака пыли, которые имеют аналитическое решение.

Ключевые слова: математическое моделирование, вычислительная астрофизика, схема Годунова.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.108

ВВЕДЕНИЕ

Звезды малой массы, примером которых является Солнце, образуются во время гравитационного коллапса плотных облаков газа и пыли. В ходе такого коллапса часть облака аккрецируется сначала на околозвёздный диск, а потом на зарождающуюся протозвезду. Этот механизм лежит в основе планетных систем. Изучение околозвёздных дисков является основным ключом к пониманию накопления звёздной массы, формирования планет и зарождения жизни [1–5]. Описание процессов звездообразования требует высокого пространственного разрешения и контраста плотности [6] газовой и пылевой компонент. В настоящей работе мы предлагаем единую численную методику для описания газовой и пылевой компонент. Предлагаемая схема во многом основана на методике из работы [7] с учётом точного решения для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-51-14002 АНФ_а) и Австрийского научного фонда (проект I4311-N27).

переноса пылевой компоненты, записанной в рамках единой процедуры решения задачи Римана.

Метод Годунова для численного решения уравнений гидродинамики разработан 70 лет назад [8]. Однако его исследование в части сходимости [9, 10], поведения энтропии [11–14] и модификации метода происходит до настоящего времени [15, 16]. Метод Годунова также был расширен на ряд математических моделей: радиационной гидродинамики [17], магнитной гидродинамики [18–20], специальной релятивистской [21] и магнитной релятивистской гидродинамики [22], упруго-пластических деформаций [23–25], уравнений Максвелла [26, 27], двухфазной модели [28] и медицинских приложений [29].

Во первом разделе мы приведём описание решаемых уравнений и конструкции численной схемы. Второй раздел посвящён верификации построенной численной схемы. В разделе 3 приведены модельные задачи, соответствующие астрофизическим приложениям.

1. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Численную схему рассмотрим сначала для уравнений гидродинамики, а затем для уравнения описания пыли, которая де-факто является гидродинамической моделью без давления. Для простоты изложения схемы рассмотрим одномерную запись уравнений, которая элементарно расширяется на многомерный случай.

1.1. Метод решения уравнений газовой динамики

Рассмотрим одномерную модель идеальной гидродинамики, записанную в векторной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho E u + p u \end{pmatrix} = 0, \quad (1)$$

где ρ — плотность, u — скорость, p — давление, γ — показатель адиабаты, $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — скорость звука, $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ — уравнение состояния, $\rho\varepsilon$ — плотность внутренней энергии, $\rho E = \rho\varepsilon + \rho u^2/2$ — полная механическая энергия. Для дискретизации расчётной области введём равномерную сетку с пространственным шагом h . Шаг по времени τ мы будем вычислять из условия Куранта $\frac{\tau(c + \max |u|)}{h} = \text{CFL} < 1$, где CFL — число Куранта. Значения консервативных и физических переменных определены в центрах ячеек с полуцелым индексом, значения потоков через границы ячеек определены в узлах с целым индексом. В этом случае схема Годунова записывается в виде

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{\tau} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{h} = 0, \quad (2)$$

где U и F — векторы консервативных и потока консервативных переменных, i — номер границы между ячейками, $i + 1/2$ — номер ячейки, n — номер слоя по времени.

Для построения потока F (решения задачи Римана) рассмотрим две ячейки: левую L и правую R . Используя метод разделения операторов, рассмотрим решение двух систем уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ p u \end{pmatrix} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho E u \end{pmatrix} = 0. \quad (3)$$

Первое уравнение из (3) описывает работу сил давления, решение которого определяется значениями скорости и давления. Второе отвечает за адвективный перенос газа без давления,

который зависит только от плотности и скорости. Тогда уравнения (3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho^{-1} \\ \gamma p & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

Следуя выкладкам из работы [7], получим следующие значения для решения задачи Римана для первого уравнения из (4):

$$P = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{u_L - u_R}{2} \rho c, \quad U = \frac{u_L + u_R}{2} + \frac{p_L - p_R}{2} \frac{1}{\rho c}, \quad (5)$$

где

$$\rho = \sqrt{\rho_L \rho_R}, \quad c = \frac{\sqrt{\rho_L c_L} + \sqrt{\rho_R c_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}.$$

Для второго уравнения из (4) точное решение для скорости переноса имеет вид

$$V = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}. \quad (6)$$

Уравнения (5), (6) определяют решение задачи Римана на интерфейсе между левой и правой ячейками для полной системы уравнения (1), которое записывается в виде

$$F = \frac{V - |V|}{2} \begin{pmatrix} \rho_R \\ \rho_R u_R \\ \rho_R E_R \end{pmatrix} + \frac{V + |V|}{2} \begin{pmatrix} \rho_L \\ \rho_L u_L \\ \rho_L E_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ PU \end{pmatrix}.$$

Для повышения порядка точности используется кусочно-параболическая реконструкция физических переменных согласно работе [7].

1.2. Метод решения уравнений для описания динамики пыли

Для описания динамики пыли будем использовать модель гидродинамики без давления, которую также запишем в векторной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \end{pmatrix} = 0, \quad (7)$$

где ρ — плотность пыли и u — скорость пыли. Для разрешения уравнений (7) будем использовать схему Годунова (2), в которой задача Римана де-факто является разрешением адвективного переноса:

$$F = \frac{V - |V|}{2} \begin{pmatrix} \rho_R \\ \rho_R u_R \end{pmatrix} + \frac{V + |V|}{2} \begin{pmatrix} \rho_L \\ \rho_L u_L \end{pmatrix},$$

где V суть точное решение для скорости переноса: $V = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$. Для повышения порядка точности также используется кусочно-параболическая реконструкция физических переменных [7].

2. ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Для верификации численного метода в одномерной постановке рассмотрим три основные задачи о распаде гидродинамического разрыва и одну задачу о распаде разрыва газа без давления. Начальное состояние для задач приведено в таблице, где x_0 — начальная позиция разделителя между двумя соседними состояниями, а индексами L и R обозначены соответствующие физические величины слева и справа от разделителя.

Начальное состояние задач о распаде разрыва в модельных тестах

N	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R	x_0	t
1	1	0.75	1	0.125	0	0.1	0.3	0.2
2	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.5	0.15
3	1	0	1000	1	0	0.01	0.5	0.012

Первая задача преследует сразу несколько целей. Проверяется способность метода корректно воспроизводить ударную волну, контактный разрыв и волну разрежения. Воспроизведение волны разрежения усложняется наличием звуковой точки, которая в ряде методов, например в схеме Роу, даёт нефизический разрыв во всех функциях из-за наличия энтропийного следа в точке первоначального разрыва, который приходится примерно на середину волны разрежения. Результаты моделирования приведены на рис. 1. Для вычислительных экспериментов было использовано 200 расчётных ячеек.

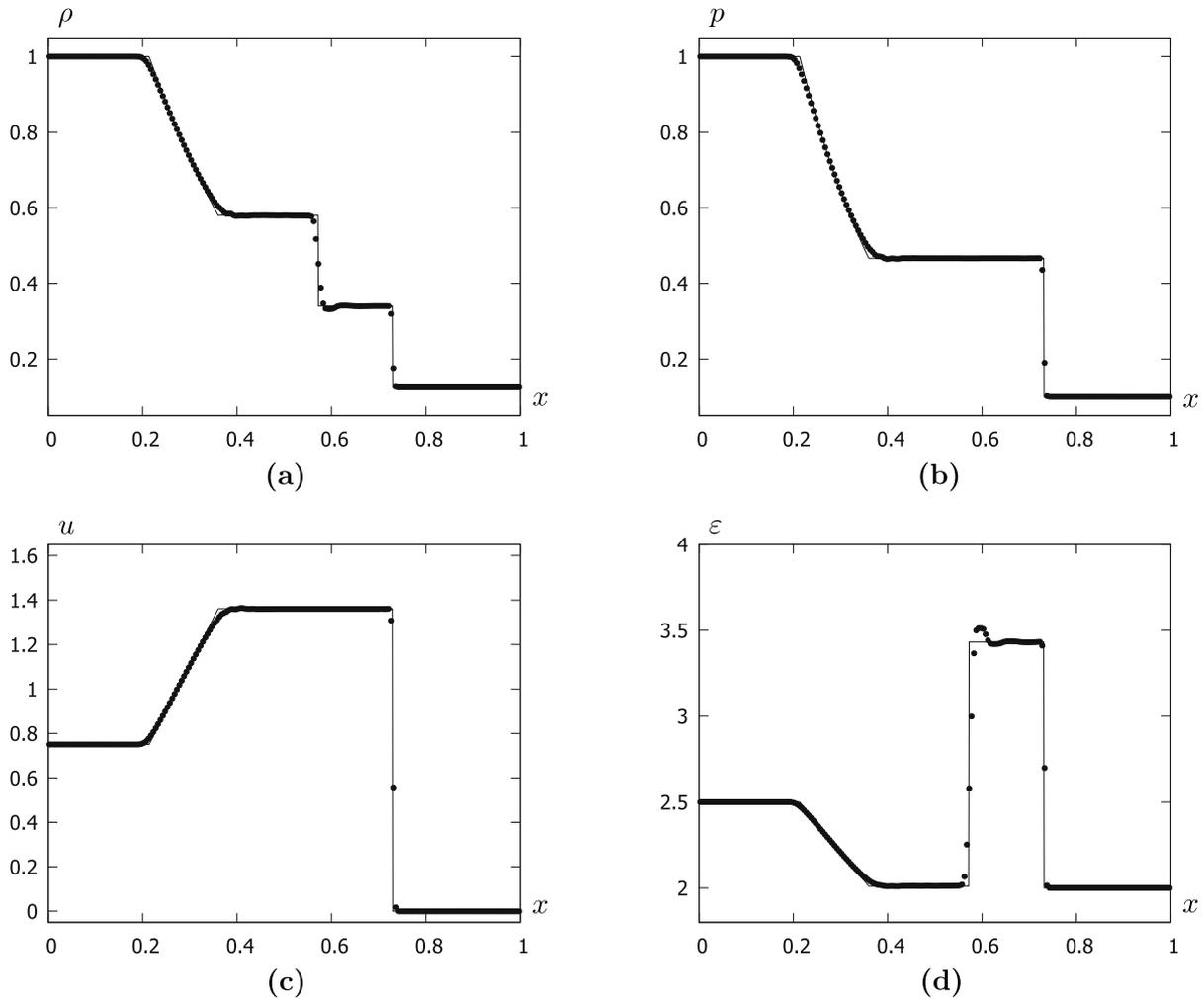


Рис. 1. Плотность (а), давление (б), скорость (с) и удельная энергия (д), полученные при решении первой задачи о распаде разрыва. Кружочками обозначено численное решение, сплошной линией — точное

Из рис. 1 видно, что ударная волна воспроизведена достаточно корректно, с диссипацией всего на две ячейки. На контактном разрыве имеет место остаток энтропийного следа в функции плотности, который распространяется также на внутреннюю энергию. В то же время

функции давления и скорости воспроизводятся корректно в этой области. В целом решение воспроизведено корректно, с малой диссипацией и без лишних осцилляций.

Рассмотрим первую задачу при условии нулевого давления и с теми же значениями плотности и скорости по обе стороны от первоначального разрыва. Результаты моделирования приведены на рис. 2. Для вычислительных экспериментов было использовано 200 расчётных ячеек.

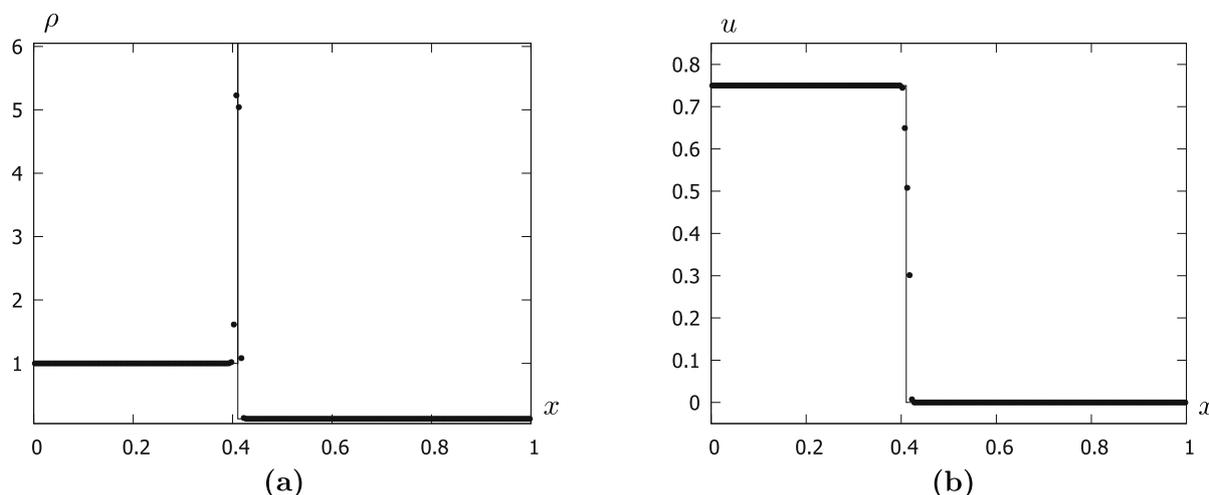


Рис. 2. Плотность (а) и скорость (б), полученные при решении задачи о распаде разрыва газа без давления. Кружочками обозначено численное решение, сплошной линией — точное

Из рис. 2 видно, что ударная волна воспроизведена с диссипацией всего на три ячейки, что связано с большей амплитудой разрыва по сравнению с гидродинамическим тестом. Также на три ячейки происходит диссипация дельта-функции в графике плотности. В целом решение воспроизведено с малой диссипацией решения.

Во второй задаче проверяется возможность численного метода воспроизводить область сильного разрежения при разлёте газа. Результаты моделирования приведены на рис. 3. Для вычислительных экспериментов было использовано 200 расчётных ячеек.

Из рис. 3 видно, что численный метод корректно воспроизводит графики плотности и давления. На графике скорости имеет место диссипация в области контактного разрыва, которая выражается также в виде энтропийного следа в графике внутренней энергии. Отметим монотонный характер численного решения.

В третьей задаче верифицируется устойчивость метода при воспроизведении сильного разрыва в давлении с образованием быстрых ударных волн. Результаты моделирования приведены на рис. 4. Для вычислительных экспериментов было использовано 200 расчётных ячеек.

Из рис. 4 видно, что численный метод с диссипацией всего на одну ячейку воспроизвёл ударную волну. Также на графике удельной внутренней энергии воспроизводится «ступенька-предшественник» с малой амплитудой. В целом метод корректно и с малой диссипацией воспроизвёл все компоненты решения.

3. АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим две задачи, которые имеют астрофизическое приложение. Первая — это задача Седова о точечном взрыве, которая является составной частью моделирования взрыва сверхновых. В этой работе мы не говорим об источнике взрыва. Им может быть поджиг углерода в белых карликах с последующим выделением энергии вследствие термоядерной реакции или коллапс ядра с образованием сильной ударной волны, идущей из центра массивной звезды. Вторая задача — это коллапс пылевого облака, который характерен для задач звездообразования. Несомненным достоинством обеих задач является аналитическое решение, которое

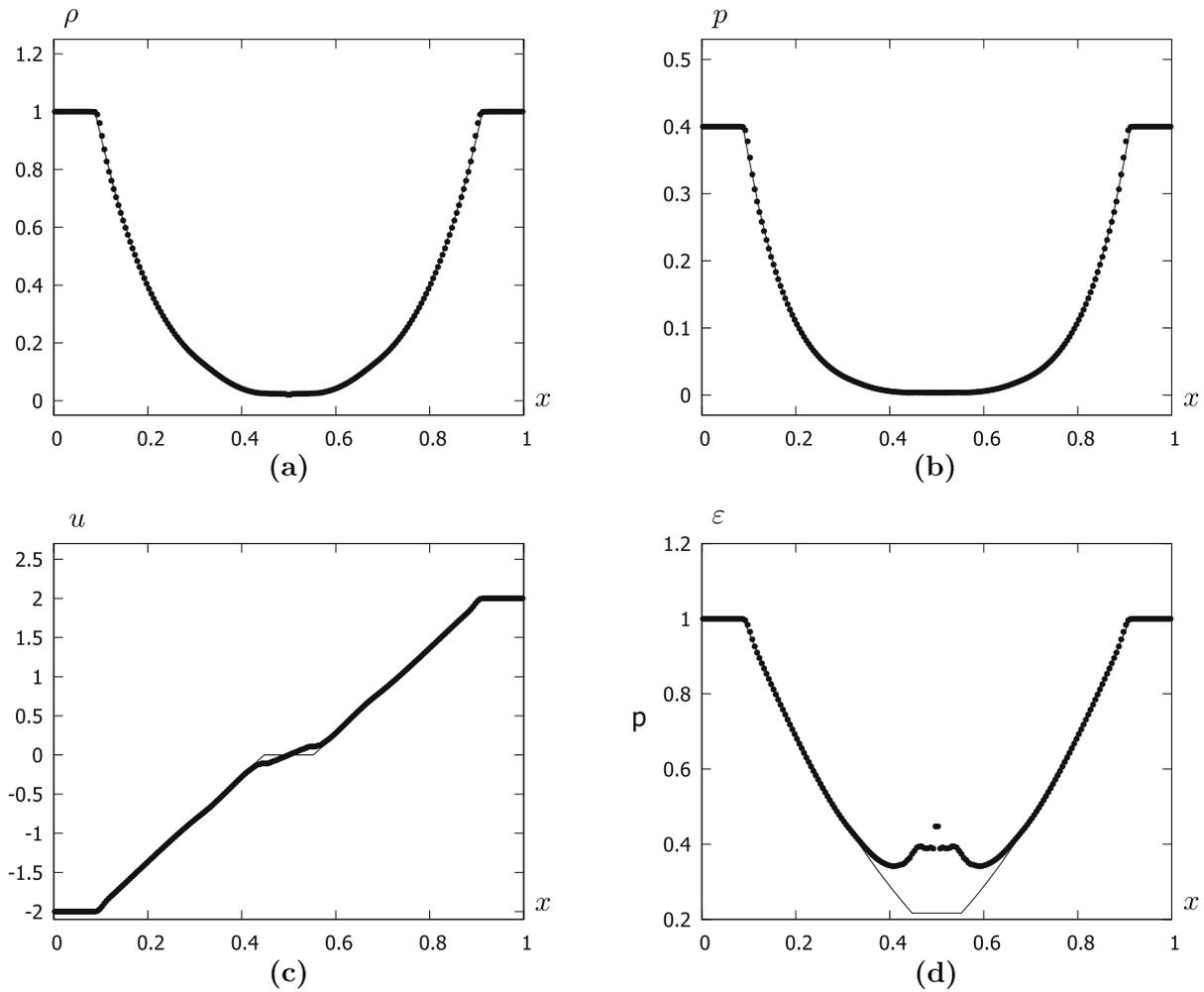


Рис. 3. Плотность (а), давление (б), скорость (с) и удельная энергия (д), полученные при решении второй задачи о распаде разрыва.

Кружочками обозначено численное решение, сплошной линией — точное

позволит оценить качество построенного численного метода. Для высокого пространственного разрешения мы будем использовать аппарат вложенных сеток, описанный в работе [30]. Также мы используем уже реализованный достаточно эффективный метод решения уравнения Пуассона [31].

3.1. Задача Седова о точечном взрыве

Задачу Седова будем рассматривать в безразмерных величинах. Для этого выберем область, ограниченную радиусом $R = 0.5$, заполненную газом с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$, с начальной плотностью в области $\rho_0 = 1$ и начальным давлением $p_0 = 10^{-5}$. Величина инжектируемой энергии в начальный момент времени равна $E_0 = 0.6$. Область взрыва ограничена радиусом $r = 0.01$. Профили плотности и момента импульса на момент времени $t = 0.05$ изображены на рис. 5.

Тест Седова о точечном взрыве является стандартным тестом, проверяющим способность метода и его реализацию воспроизводить сильные ударные волны с большими числами Маха, что происходит при взрыве сферических объектов типа массивных звёзд. Скорость звука среды достаточно мала, поэтому число Маха достигает значения $M \approx 1500$. Как видно, разработанный численный метод достаточно хорошо воспроизводит фронт ударной волны. Пик плотности из-за диссипации меньше максимального значения, в то же время график плотности

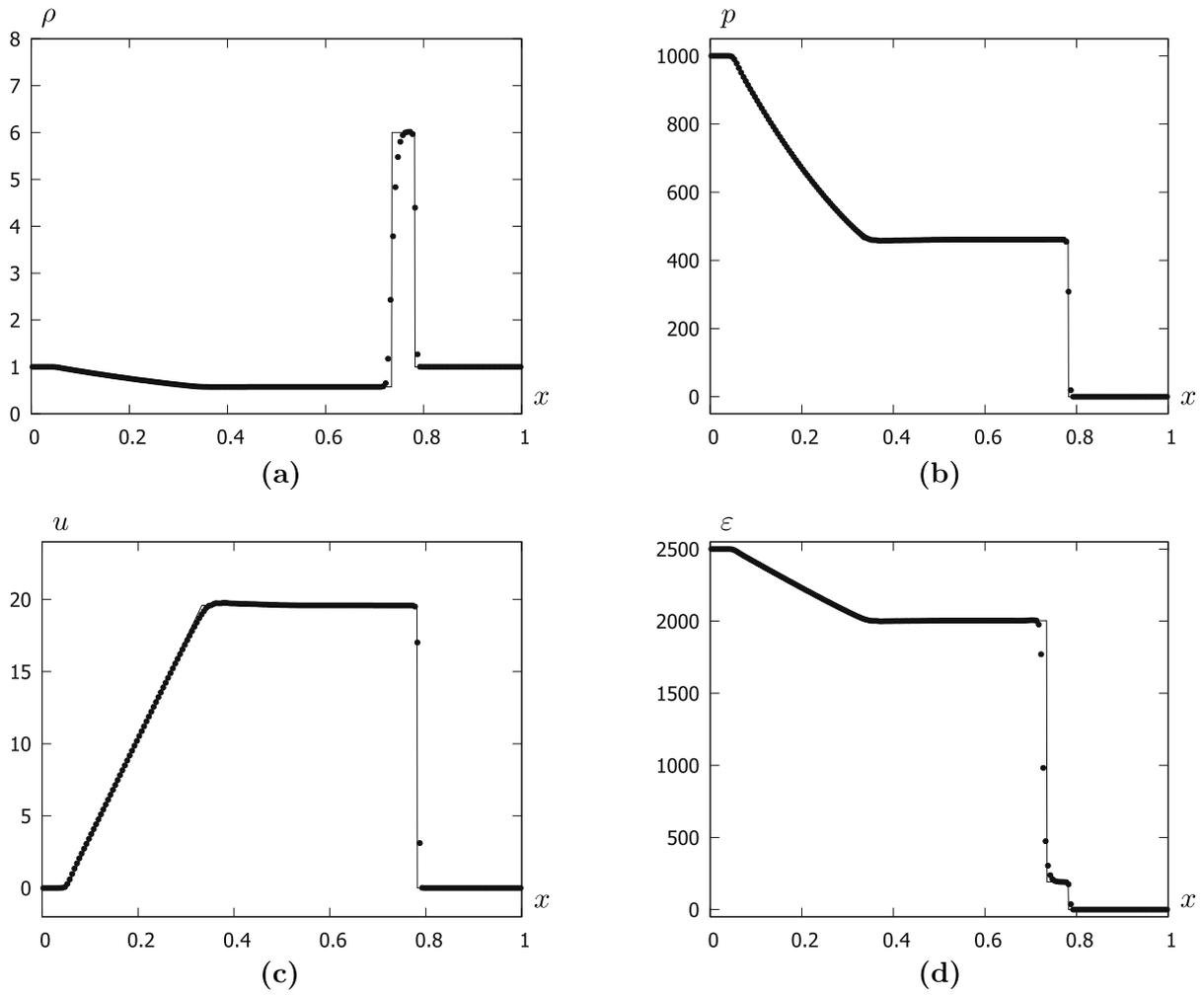


Рис. 4. Плотность (а), давление (b), скорость (с) и удельная энергия (d), полученные при решении третьей задачи о распаде разрыва. Кружочками обозначено численное решение, сплошной линией — точное

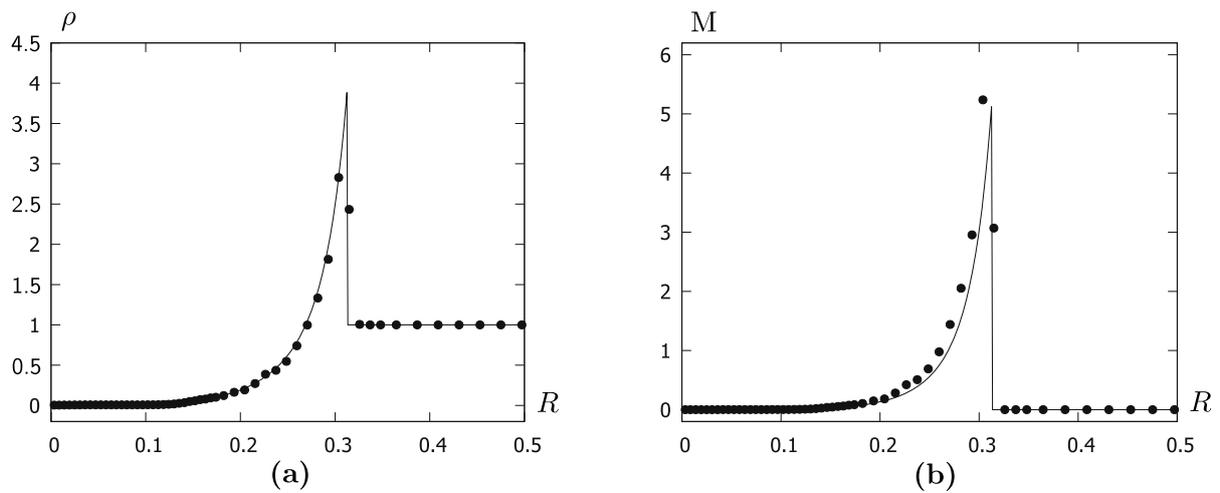


Рис. 5. Плотность (а) и момент импульса (b), полученные при численном решении задачи Седова о точечном взрыве (кружочки), сплошной линией изображено точное решение

восстановлен без спада за фронтом ударной волны, что имело место в работе [7]. Корректно воспроизведён график импульса с достижением характерного пика. Заметим, что диссипация численного решения на фронте ударной волны происходит всего на одну ячейку.

3.2. Коллапс пылевого облака

Задачу коллапса рассмотрим также в безразмерных величинах. Для этого выберем область, ограниченную радиусом $R = 1$, заполненную статичной пылью. Профиль плотности на момент времени $t = 0.535$ изображён на рис. 6.

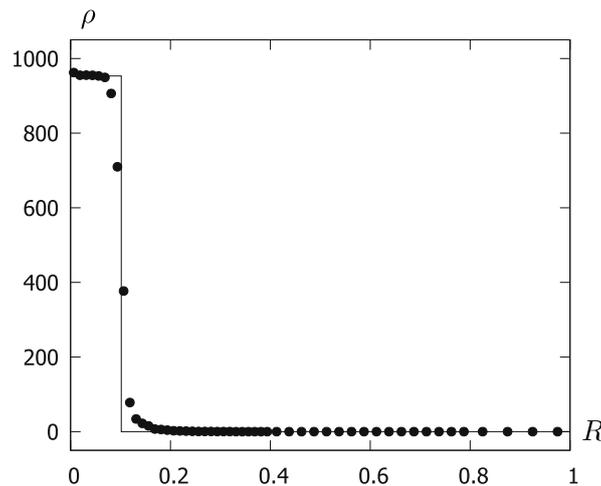


Рис. 6. Плотность, полученная при численном решении задачи коллапса пылевого облака (кружочки), сплошной линией изображено точное решение

Заметим, что имеет место диссипация численного решения на четыре ячейки при увеличении плотности на три порядка. Отметим, что пик плотности воспроизведён корректно, как и «хвост» пыли.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена численная методика для описания эволюции газа и пыли в задачах звездообразования. Предложена новая схема типа Годунова на основе комбинации схемы разделения операторов и кусочно-параболического метода с учётом точного решения переноса пылевой компоненты. Метод детально верифицирован на задачах, допускающих аналитическое решение и имеющих астрофизические приложения. Основным преимуществом разработанного авторами численного метода является воспроизведение с малой диссипацией ударных волн в движущемся потоке газа. Такая особенность характерна для задач звездообразования, когда ударные волны и сверхзвуковые течения образуются в ходе эволюции газового облака, а не при задании начальных данных. Для этого был проведён первый тест в одномерной постановке с наличием «звуковой точки». Известно, что многие методы (например, схема Рунге) не могут корректно воспроизвести это решение, оставляя на месте разрыва энтропийный след. При гравитации наличие такого следа приводит к образованию ряда артефактов, не имеющих физического обоснования. Воспроизведение таких течений авторским методом стало возможным благодаря разделению решения задачи Римана на учёт работы сил давления с использованием линеаризованной схемы и точным адвективным переносом вещества. Для уменьшения диссипации численного решения используется хорошо зарекомендовавшая себя кусочно-параболическая реконструкция физических переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vorobyov E.I. Ejection of gaseous clumps from gravitationally unstable protostellar disks // *Astron. Astrophys.* 2016. V. 590. Article 115.
2. Vorobyov E.I., Elbakyan V.G., Plunkett A.L., Dunham M.M., Audard M., Guedel M., Dionatos O. Knotty protostellar jets as a signature of episodic protostellar accretion? // *Astron. Astrophys.* 2018. V. 613. Article 18.
3. Vorobyov E.I., Akimkin V., Stoyanovskaya O.P., Pavlyuchenkov Y., Liu H.B. Early evolution of viscous and self-gravitating circumstellar disks with a dust component // *Astron. Astrophys.* 2018. V. 614. Article 98.
4. Vorobyov E.I., Elbakyan V.G. Gravitational fragmentation and formation of giant protoplanets on orbits of tens of au // *Astron. Astrophys.* 2018. V. 618. Article 7.
5. Vorobyov E.I., Elbakyan V.G., Omukai K., Hosokawa T., Matsukoba R., Guedel M. Accretion bursts in low-metallicity protostellar disks // *Astron. Astrophys.* 2020. V. 641. Article 72.
6. Bate M. Collapse of a molecular cloud core to stellar densities: the formation and evolution of pre-stellar discs // *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* 2011. V. 417. P. 2036–2056.
7. Kulikov I., Vorobyov E. Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // *J. Comput. Phys.* 2016. V. 317. P. 318–346.
8. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Мат. сб.* 1959. Т. 47(89), № 3. С. 271–306.
9. Einfeldt D., Munz C., Roe P., Sjoegreen B. On Godunov-type methods near low densities // *J. Comput. Phys.* 1991. V. 92. P. 273–295.
10. Godunov S.K., Manuzina Y.D., Nazar'eva M.A. Experimental analysis of convergence of the numerical solution to a generalized solution in fluid dynamics // *Comput. Math. Math. Phys.* 2011. V. 51. P. 88–95.
11. Godunov S.K., Kulikov I.M. Computation of discontinuous solutions of fluid dynamics equations with entropy nondecrease guarantee // *Comput. Math. Math. Phys.* 2014. V. 54, N 6. P. 1012–1024.
12. Godunov S.K., Denisenko V.V., Klyuchinskii D.V., Fortova S.V., Shepelev V.V. Study of entropy properties of a linearized version of Godunov's method // *Comput. Math. Math. Phys.* 2020. V. 60. P. 628–640.
13. Gallice G., Chan A., Loubere R., Maire P. Entropy stable and positivity preserving Godunov-type schemes for multidimensional hyperbolic systems on unstructured grid // *J. Comput. Phys.* 2022. V. 468. Article 111493.
14. Dellacherie S. Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number // *J. Comput. Phys.* 2010. V. 229. P. 978–1016.
15. Godunov S.K., Klyuchinskii D.V., Fortova S.V., Shepelev V.V. Experimental studies of difference gas dynamics models with shock waves // *Comput. Math. Math. Phys.* 2018. V. 58. P. 1201–1216.
16. Chen S., Li J., Li Z., Yuan W., Gao Z. Anti-dissipation pressure correction under low Mach numbers for Godunov-type schemes // *J. Comput. Phys.* 2022. V. 456. Article 111027.
17. Sekora M., Stone J. A hybrid Godunov method for radiation hydrodynamics // *J. Comput. Phys.* 2010. V. 229. P. 6819–6852.
18. Gardiner T., Stone J. An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport // *J. Comput. Phys.* 2005. V. 205. P. 509–539.
19. Gardiner T., Stone J. An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport in three dimensions // *J. Comput. Phys.* 2008. V. 227. P. 4123–4141.
20. Mignone A., Tzeferacos P. A second-order unsplit Godunov scheme for cell-centered MHD: The CTU-GLM scheme // *J. Comput. Phys.* 2010. V. 229. P. 2117–2138.
21. Kulikov I.M. A low-dissipation numerical scheme based on a piecewise parabolic method on a local stencil for mathematical modeling of relativistic hydrodynamic flows // *Numer. Anal. Appl.* 2020. V. 13. P. 117–126.
22. Kulikov I.M. On a modification of the Rusanov solver for the equations of special relativistic magnetic hydrodynamics // *J. Appl. Indust. Math.* 2020. V. 14. P. 524–531.

23. *Godunov S.K., Kiselev S.P., Kulikov I.M., Mali V.I.* Numerical and experimental simulation of wave formation during explosion welding // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2013. V. 281. P. 12–26.
24. *Aganin A.A., Khismatullina N.A.* UNO modifications of the Godunov method for calculating the dynamics of an elastic-plastic body // *Lobachevskii J. Math.* 2019. V. 40. P. 256–262.
25. *Khismatullina N.A.* Calculation of waves in an elastic-plastic body based on ENO modifications of the Godunov method // *Lobachevskii J. Math.* 2020. V. 41. P. 1228–1234.
26. *Barbas A., Velarde P.* Development of a Godunov method for Maxwell’s equations with adaptive mesh refinement // *J. Comput. Phys.* 2015. V. 300. P. 186–201.
27. *Moreno J., Oliva E., Velarde P.* EMcLAW: An unsplit Godunov method for Maxwell’s equations including polarization, metals, divergence control and AMR // *Comput. Phys. Comm.* 2021. V. 260. Article 107268.
28. *Lei X., Li J.* A staggered-projection Godunov-type method for the Baer–Nunziato two-phase model // *J. Comput. Phys.* 2021. V. 437. Article 110312.
29. *Ghitti B., Berthon C., Hoang Le M., Toro E.* A fully well-balanced scheme for the 1D blood flow equations with friction source term // *J. Comput. Phys.* 2020. V. 421. Article 109750.
30. *Kulikov I.* Molecular cloud collapse to stellar densities: Models on moving geodesic vs. Unstructured tetrahedron vs. nested meshes // *J. Phys. Conf. Ser.* 2021. V. 2028. Article 012001.
31. *Chernykh I., Vorobyov E., Elbakyan V., Kulikov I.* The impact of compiler level optimization on the performance of iterative Poisson solver for numerical modeling of protostellar disks // *Comm. Comput. Inform. Sci.* 2021. V. 1510. P. 415–426.

UDC 519.63

**ON A GODUNOV-TYPE NUMERICAL SCHEME FOR DESCRIBING
THE GAS AND DUST COMPONENTS IN PROBLEMS OF STAR
FORMATION**

© 2023 I. M. Kulikov^{1a}, I. G. Chernykh^{1b}, A. F. Sapetina^{1c},
E. I. Vorobyov^{2d}, V. G. Elbakyan^{3e}

¹*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 6, Novosibirsk 630090, Russia,*

²*Department of Astrophysics, University of Vienna,
Tuerkenschanzstrasse 17, Vienna 1180, Austria,*

³*Research Institute of Physics, Southern Federal University,
pr. Stachki 194, Rostov-on-Don 344090, Russia*

E-mails: ^akulikov@ssd.sccc.ru, ^bchernykh@parbz.sccc.ru, ^cafsapetina@gmail.com,
^deduard.vorobiev@univie.ac.at, ^evgelbakyan@sfedu.ru

Received 16.08.2022, revised 20.09.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. The paper presents one construction of the Godunov-type method based on the separation of operators describing the work of pressure forces and advective transfer. Separate consideration of advective transfer makes it possible to describe the motion of both gas and dust components within the framework of a single numerical scheme. In the case of describing gas dynamics, the work of pressure forces is taken into account at a separate stage, regardless of transfer. This makes it possible to use the numerical scheme in solving star formation problems, where it is necessary to jointly solve the equations of hydrodynamics and equations for dust motion. A piecewise parabolic representation of physical variables in all directions is used to reduce the dissipation of the numerical method. The numerical method has been verified on the Riemann problems for a hydrodynamic and dust discontinuity, the Sedov problem of point explosion, and the problem of dust cloud collapse, which have an analytical solution.

Keywords: numerical modeling, computational astrophysics, Godunov-type scheme.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.108

REFERENCES

1. Vorobyov E.I. Ejection of gaseous clumps from gravitationally unstable protostellar disks. *Astron. Astrophys.*, 2016, Vol. 590, article 115.
2. Vorobyov E.I., Elbakyan V.G., Plunkett A.L., Dunham M.M., Audard M., Guedel M., Dionatos O. Knotty protostellar jets as a signature of episodic protostellar accretion? *Astron. Astrophys.*, 2018, Vol. 613, article 18.
3. Vorobyov E.I., Akimkin V., Stoyanovskaya O.P., Pavlyuchenkov Y., Liu H.B. Early evolution of viscous and self-gravitating circumstellar disks with a dust component. *Astron. Astrophys.*, 2018, Vol. 614, article 98.
4. Vorobyov E.I., Elbakyan V.G. Gravitational fragmentation and formation of giant protoplanets on orbits of tens of au. *Astron. Astrophys.*, 2018. V. 618, article 7.
5. Vorobyov E.I., Elbakyan V.G., Omukai K., Hosokawa T., Matsukoba R., Guedel M. Accretion bursts in low-metallicity protostellar disks. *Astron. Astrophys.*, 2020. V. 641, article 72.

6. Bate M. Collapse of a molecular cloud core to stellar densities: the formation and evolution of pre-stellar discs. *Monthly Notices Royal Astron. Soc.*, 2011, Vol. 417, pp. 2036–2056.
7. Kulikov I., Vorobyov E. Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows. *J. Comput. Phys.*, 2016, Vol. 317, pp. 318–346.
8. Годунов С.К. Raznostnyi metod chislennogo rascheta razryvnykh reshenii uravnenii gidrodinamiki [A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics], *Mat. Sb.*, 1959, Vol. 47(89), No. 3, pp. 271–306 (in Russian).
9. Einfeldt D., Munz C., Roe P., Sjoegreen B. On Godunov-type methods near low densities. *J. Comput. Phys.*, 1991, Vol. 92, pp. 273–295.
10. Godunov S.K., Manuzina Y.D., Nazar'eva M.A. Experimental analysis of convergence of the numerical solution to a generalized solution in fluid dynamics. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, Vol. 51, pp. 88–95.
11. Godunov S.K., Kulikov I.M. Computation of discontinuous solutions of fluid dynamics equations with entropy nondecrease guarantee. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, Vol. 54, No. 6, pp. 1012–1024.
12. Godunov S.K., Denisenko V.V., Klyuchinskii D.V., Fortova S.V., Shepelev V.V. Study of entropy properties of a linearized version of Godunov's method. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, Vol. 60, pp. 628–640.
13. Gallice G., Chan A., Loubere R., Maire P. Entropy stable and positivity preserving Godunov-type schemes for multidimensional hyperbolic systems on unstructured grid. *J. Comput. Phys.*, 2022, Vol. 468, article 111493.
14. Dellacherie S. Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number. *J. Comput. Phys.*, 2010, Vol. 229, pp. 978–1016.
15. Godunov S.K., Klyuchinskii D.V., Fortova S.V., Shepelev V.V. Experimental studies of difference gas dynamics models with shock waves. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, Vol. 58, pp. 1201–1216.
16. Chen S., Li J., Li Z., Yuan W., Gao Z. Anti-dissipation pressure correction under low Mach numbers for Godunov-type schemes. *J. Comput. Phys.*, 2022, Vol. 456, article 111027.
17. Sekora M., Stone J. A hybrid Godunov method for radiation hydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 2010, Vol. 229, pp. 6819–6852.
18. Gardiner T., Stone J. An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport. *J. Comput. Phys.*, 2005, Vol. 205, pp. 509–539.
19. Gardiner T., Stone J. An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport in three dimensions. *J. Comput. Phys.*, 2008, Vol. 227, pp. 4123–4141.
20. Mignone A., Tzeferacos P. A second-order unsplit Godunov scheme for cell-centered MHD: The CTU-GLM scheme. *J. Comput. Phys.*, 2010, Vol. 229, pp. 2117–2138.
21. Kulikov I.M. A low-dissipation numerical scheme based on a piecewise parabolic method on a local stencil for mathematical modeling of relativistic hydrodynamic flows. *Numer. Anal. Appl.*, 2020, Vol. 13, pp. 117–126.
22. Kulikov I.M. On a modification of the Rusanov solver for the equations of special relativistic magnetic hydrodynamics. *J. Appl. Indust. Math.*, 2020, Vol. 14, pp. 524–531.
23. Godunov S.K., Kiselev S.P., Kulikov I.M., Mali V.I. Numerical and experimental simulation of wave formation during explosion welding. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, Vol. 281, pp. 12–26.
24. Aganin A.A., Khismatullina N.A. UNO modifications of the Godunov method for calculating the dynamics of an elastic-plastic body. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, Vol. 40, pp. 256–262.
25. Khismatullina N.A. Calculation of waves in an elastic-plastic body based on ENO modifications of the Godunov method. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, Vol. 41, pp. 1228–1234.
26. Barbas A., Velarde P. Development of a Godunov method for Maxwell's equations with adaptive mesh refinement. *J. Comput. Phys.*, 2015, Vol. 300, pp. 186–201.
27. Moreno J., Oliva E., Velarde P. EMcLAW: An unsplit Godunov method for Maxwell's equations including polarization, metals, divergence control and AMR. *Comput. Phys. Comm.*, 2021, Vol. 260, article 107268.
28. Lei X., Li J. A staggered-projection Godunov-type method for the Baer–Nunziato two-phase model. *J. Comput. Phys.*, 2021, Vol. 437, article 110312.

29. Ghitti B., Berthon C., Hoang Le M., Toro E. A fully well-balanced scheme for the 1D blood flow equations with friction source term. *J. Comput. Phys.*, 2020, Vol. 421, article 109750.
30. Kulikov I. Molecular cloud collapse to stellar densities: Models on moving geodesic vs. Unstructured tetrahedron vs. nested meshes. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, Vol. 2028, article 012001.
31. Chernykh I., Vorobyov E., Elbakyan V., Kulikov I. The impact of compiler level optimization on the performance of iterative Poisson solver for numerical modeling of protostellar disks. *Comm. Comput. Inform. Sci.*, 2021, Vol. 1510, pp. 415–426.