УДК 539.3

ПРОВЕДЕНИЕ ГОМОГЕНИЗАЦИИ В ВЯЗКОУПРУГИХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ С УЧЁТОМ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЛИЯНИЯ ГРАНИЦ

© 2023 А. В. Мишин[1,2]

[1]*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2]*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: alekseymishin1994@gmail.com

Поступила в редакцию 06.07.2022 г.; после доработки 16.09.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Получены эффективные коэффициенты вязкоупругости гетерогенной среды на основе формализма обобщённой производной, отображающей внутренние границы гетерогенной среды. Для найденного модифицированного оператора с учётом проведённого осреднения и его последующего анализа ищется решение на осреднённую функцию Грина. На основе полученного решения, выражающего решение задачи многих тел в гетерогенной среде, эффективные коэффициенты вязкоупругости интегрально учитывают микроструктуру системы (физические свойства и характерные размеры фаз) в явном виде.

Ключевые слова: гетерогенная среда, микроструктура, переходный слой, обобщённая производная, функция Грина, осреднение, вязкоупругость.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.109

ВВЕДЕНИЕ

Концепция обобщённой производной впервые введена в рамках функционального анализа в работе [1]. Для аналитического моделирования гетерогенных сред обобщённая производная впервые введена в работе [2] для анализа упругих свойств. Обобщённая производная наличием сингулярной составляющей учитывает влияние конфигурации внутренних границ гетерогенной среды, разделяющих фазы с разными физическими свойствами, на распространение поля по ней. В существующих на сегодняшний момент подходах [3–21] по моделированию гетерогенных сред границы раздела фаз либо не учитываются, либо вводятся упрощённо (через феноменологические коэффициенты или периодическую структуру [18]). Это ограничивает анализ влияния коллективного взаимодействия фаз на распространяющееся по гетерогенной среде поле, что имеет отношение к задаче многих тел в гетерогенной среде и необходимо для отображения её микроструктуры (характерных размеров фаз в среде и их физических свойств). Формализм обобщённой производной претендует на математический аппарат, необходимый для формулирования задачи многих тел в гетерогенной среде. Данный математический аппарат принципиален для анализа новых создаваемых гетерогенных материалов [22–27], обладающих сложной микроструктурой, которая включает наномасштабные размеры фаз и геометрические особенности системы. Приведём также потенциально перспективные работы [28—30] для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-19-00733).

аналитического исследования гетерогенных сред, основанные на вероятностном формализме, производящей функции и теории графов.

В работе [2] показано, что модифицированный обобщёнными производными оператор приводит к функции Грина, характеризующей микроструктурные особенности гетерогенной среды. В результате использования метода условных моментов, базирующегося на функции Грина, в итоговых эффективных коэффициентах упругости интегрально учитывается микроструктура системы. В данной работе предлагается найти осреднённую функцию Грина для оператора линейного вязкоупругого уравнения. Для этого предлагается сформулировать задачу многих тел для функции Грина в гетерогенной среде по аналогии с тем, как это делается в работе [31]. Построение решения интегродифференциального уравнения с разрывами (находящихся в интегралах по поверхности) основано на преобразовании соответствующего оператора [31]. Найденное решение используется для получения эффективных коэффициентов вязкоупругости, интегрально учитывающих микроструктуру системы в явном виде. Используемым подходом является метод условных моментов, базирующийся на формализме функций Грина, условном осреднении и преобразовании Фурье.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарное распределение упругого поля в микронеоднородной двухфазной среде в трёхмерном пространстве. Структуру среды считаем обладающей статистически однородными и изотропными свойствами и заполняющей всё пространство. В качестве исходной модели используем стационарную изотропную модель линейной теории упругости [2]:

$$\begin{gathered}\nabla_j \sigma_{ij} = 0, \quad \sigma_{ij} = \lambda_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta), \\ \nabla_j(\lambda_{ij\alpha\beta}\nabla_\beta u_\alpha) = 0, \\ \lambda_{ij\alpha\beta} = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu I_{ij\alpha\beta}, \quad I_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}).\end{gathered} \tag{1}$$

Обобщение на распространение вязкоупругого поля по гетерогенной среде сделаем, базируясь на структурной идентичности уравнений линейной теории упругости и вязкоупругости [12]. На основе данной аналогии между упругими и вязкоупругими свойствами объёмный K и сдвиговый μ упругие модули системы должны быть заменены на $K \to K - i\omega\zeta$ и $\mu \to \mu - i\omega\eta$, где ζ и η являются объёмным и сдвиговым вязкими модулями системы соответственно, ω — частота, возникшая в результате преобразования Фурье, i — мнимая единица.

В системе (1) обычная производная заменена на обобщённую производную [2], выражение для которой имеет вид

$$\nabla_j u_i(\mathbf{r}) = \partial_j u_i(\mathbf{r}) + \sum_k \int\limits_{S_k} [u_i]_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}) ds_j, \tag{2}$$

где запись $[u_i]_{\mathbf{x}}$ характеризует скачок смещений фаз на границе $[u_i]_{\mathbf{x}} = u_i(\mathbf{x}+\mathbf{0}) - u_i(\mathbf{x}-\mathbf{0})$. Сингулярная составляющая для обобщённой производной $\boldsymbol{\nabla}$ в (1) выражается в подынтегральном выражении конфигурацией дельта-функций на поверхностях разрыва.

Координатами в модели (1) выступают микроточки, в каждой из которых находится одна из фаз со своими физическими свойствами, т. е. объёмный $K(\mathbf{r})$ и сдвиговый $\mu(\mathbf{r})$ упругие модули системы являются функциями координат. Если в микроточке находится фаза 1 (с соответствующими ей упругими свойствами K_1, μ_1), то материальные коэффициенты упругости принимают значения $K = K_1$, $\mu = \mu_1$, аналогично и исследуемые поля смещений u_α, деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и напряжений σ_{ij} при этом принимают значения, соответствующие фазе 1.

Уравнения (1) следует дополнить заданием граничных условий на внутренних границах: $[\sigma_{ij}] = 0$, $[u_i] = 0$ и внешней границе [2]. (Граничное условие для внешней границы отображает гипотезу эргодичности об эквивалентности статистического осреднения и осреднения по бесконечно удалённой внешней поверхности.)

Полученный модифицированный оператор в (1) учитывает конфигурацию областей и границ, разделяющих фазы, и определяет обобщённую производную. В работе [31] показано, что формула для обобщённой производной является следствием применения вариационного аппарата к функционалу энергии для гетерогенной среды с учётом индикаторной функции, характеризующей фазу в точке. Корректность уравнений (1) с модифицированным обобщённой производной оператором также обсуждается и доказывается в работах [2] и [31]. В [2] на основе формализма обобщённой производной получена пространственная теорема осреднения [17].

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ НА ОСРЕДНЁННУЮ ФУНКЦИЮ ГРИНА

Для нахождения эффективных коэффициентов упругости согласно работам [2, 31] следует знать вид осреднённой функции Грина $\langle G_{mp}\rangle(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$, где $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2$ — координаты, возникшие в результате пространственного осреднения по координатам $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Поиск осреднённой функции Грина согласно работам [2, 3] осуществляется на основе преобразования уравнений (1) к виду

$$\lambda^*_{ij\alpha\beta}\nabla_j\nabla_\beta u_\alpha = -\nabla_j(\lambda_{ij\alpha\beta} - \lambda^*_{ij\alpha\beta})\nabla_\beta u_\alpha, \tag{3}$$

где добавляется и отнимается искомый эффективный тензор $\lambda^*_{ij\alpha\beta}$, входящий в осреднённый закон Гука и содержащий искомые эффективные сдвиговый μ^* и объёмный K^* коэффициенты линейной теории упругости. Правая часть уравнения (3) считается источником. Далее уравнения (3) осредняются по объёму. В результате чего оператором $\lambda^*_{ij\alpha\beta}\hat{A}\nabla_j\nabla_\beta$, где $\hat{A}$ — оператор пространственного осреднения, определяется искомая осреднённая функция Грина $\langle G_{mp}\rangle(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$ в уравнении, имеющем вид

$$\lambda^*_{ijml}\partial^{(1)}_j\partial^{(1)}_l\langle G_{mp}\rangle(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) + \lambda^*_{ijml}\sum_k \frac{1}{V}\int\limits_{S_k}\left[\partial^{(y)}_l G_{mp}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)\right]ds_j = \delta_{ip}\delta(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2), \tag{4}$$

где $\partial^{(1)}_i$ — обычная производная по координате $\boldsymbol{R}_1$, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ — объём осреднения. Осреднение произведено по обеим координатам $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. В подынтегральном выражении функция Грина осреднена по координате $\mathbf{r}_2$, вектор $\boldsymbol{y}$ выражает расстояние до поверхностей раздела фаз.

Для полной постановки задачи на осреднённую функцию Грина дополним уравнение (4) условиями на внутренних границах:

$$\left[\lambda_{ij\alpha\beta}\partial^{(y)}_\beta G_{\alpha p}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)\right] = 0, \quad [G_{mp}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)] = 0$$

и условием на бесконечности $\langle G_{mp}\rangle|_\infty = 0$. Условие $[G_{mp}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)] = 0$ учтено при выводе уравнения (4).

Для построения решения интегродифференциального уравнения с разрывами (4) следует провести преобразование члена $\lambda^*_{ijml}\sum_k \frac{1}{V}\int\limits_{S_k}\left[\partial^{(y)}_l G_{mp}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)\right]ds_j$. В работе [31] применительно к исследованию электрических свойств гетерогенной среды представлен соответствующий алгоритм действий, основная идея в рамках которого заключается в переходе от суммы последовательности внутренних границ к интегралу.

Основываясь на работе [31], приведём итоговое дифференциальное уравнение на осреднённую функцию Грина:

$$\begin{gathered}\big(\lambda^*_{ijml} + D_{ijml}\big)\partial^{(1)}_j \partial^{(1)}_l \langle G_{mp}\rangle(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) - \rho D_{ilml}\langle G_{mp}\rangle(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) = \delta_{ip}\delta(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2),\\ D_{ij\alpha\beta} = D_1\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + 2D_2 I_{ij\alpha\beta},\\ D_1 = \frac{\beta}{6\pi}\frac{a^2}{\Delta^3}\left(K^* - \frac{2}{3}\mu^*\right)\frac{(K_1 - K_2)(c_1 b K_1 - c_2 a K_2)}{K_1K_2},\\ D_2 = \frac{\beta}{6\pi}\frac{a^2}{\Delta^3}\mu^*\frac{(\mu_1 - \mu_2)(c_1 b\mu_1 - c_2 a\mu_2)}{\mu_1\mu_2},\end{gathered} \tag{5}$$

где β — коэффициент формы (для половины поверхности сферы $\beta = 2\pi$), $\Delta = a + b$, b и a — характерные масштабы фаз 1 и 2 соответственно, $\rho = 3\varepsilon/\Delta^2$, ε — коэффициент [31], связанный с отношением масштаба Δ к масштабу пространственного осреднения R. Элементарным структурным элементом фазы 2 также является шар с радиусом a.

Проведённые операции по получению уравнения (5) концептуально идентичны работе [31]. Отличие технического плана связано с тензорным видом уравнения (5), что отражается при преобразовании члена $\lambda^*_{ijml}\big[\partial^{(y)}_l G_{mp}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)\big]$ на основе граничного условия $\big[\lambda_{ij\alpha\beta}\partial^{(y)}_\beta G_{\alpha p}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)\big] = 0$.

Для нахождения решения уравнения (5) осреднённую функцию Грина полагаем статистически изотропной и однородной: $\langle G_{ip}\rangle(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) = \langle G_{ip}\rangle(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2)$. Считам также, что выполняются неравенства

$$(\mu_1 - \mu_2)(b\mu_1 - a\mu_2) \geqslant 0, \quad (K_1 - K_2)(bK_1 - aK_2) \geqslant 0.$$

Решение уравнения (5) ищется с помощью преобразования Фурье и вычисления вычетов (первого порядка). Ответ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\langle G_{ip}\rangle(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta_{ip}}{\mu^* + D_2}\frac{e^{-\delta_1 r}}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\omega(D_1 + 4D_2)}\partial_i\partial_p\frac{e^{-\delta_1 r} - e^{-\delta_2 r}}{r},\\ \delta_1^2 = \frac{\omega(D_1 + 4D_2)}{\mu^* + D_2}, \quad \delta_2^2 = \frac{\omega(D_1 + 4D_2)}{K^* + \frac{4}{3}\mu^* + D_1 + 2D_2}.\end{gathered} \tag{6}$$

Решение (6) с входящими масштабами δ_1^{-1} и δ_2^{-1} является следствием модифицированного обобщённой производной оператора, характеризующего конфигурацию границ раздела фаз в гетерогенной среде (и обобщающего оператор работы [3]). Совокупность точек границ раздела фаз в гетерогенной среде в определении обобщённой производной выражена конфигурацией дельта-функций, которые фактически являются конфигурацией зарядов (при этом разные знаки зарядов вызваны чередующейся сменой фаз). С учётом указанного представления члены $e^{-\delta_1 r}/r$ и $e^{-\delta_2 r}/r$ имеют отношение к потенциалу Юкавы, выражающего переходный слой, вызванный экранированием конфигурации зарядов (внутренних границ). Наличие двух переходных масштабов δ_1^{-1} и δ_2^{-1} связано с продольными и поперечными деформациями. Присутствие данных масштабов в осреднённой функции Грина отображает разный вклад в отклик поля в среде на приложенное воздействие от продольных и поперечных воздействий. Коэффициенты D_1 и D_2 в знаменателях (6) также являются следствием конфигурации границ раздела фаз и с точки зрения зарядов ими выражается эффективный заряд. Таким образом, найденное на основе концепции обобщённой производной осреднённое решение описывает влияние конфигурации границ раздела фаз в гетерогенной среде на поведение поля в системе (т. е. отображает коллективное взаимодействие фаз при распространении поля по гетерогенной среде), что является следствием рассмотрения производных в обобщённом смысле.

Полученный результат на осреднённую функцию Грина является следствием нового подхода к конфигурации интегралов по поверхности. Анализ этих интегралов представляет основную проблему теории смесей [17].

3. НАХОЖДЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В работе [2] в рамках метода условных моментов [3] получены эффективные коэффициенты линейной теории упругости, учитывающие формализм обобщённой производной и интегрально отображающие микроструктуру гетерогенной системы. Для получения эффективных коэффициентов упругости используем основные выкладки работы [2].

Целью является получение из исходных уравнений (1) осреднённые, представимые в виде

$$\nabla_j\langle\sigma_{ij}\rangle = 0, \quad \langle\sigma_{ij}\rangle = \lambda^*_{ij\alpha\beta}\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle, \quad \lambda^*_{ij\alpha\beta}\nabla_j\nabla_\beta\langle u_\alpha\rangle = 0.$$

Тензоры $\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle$ и $\langle\sigma_{ij}\rangle$ являются осреднёнными тензорами деформаций и напряжений соответственно, $\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle = c_1\langle\varepsilon^1_{\alpha\beta}\rangle + c_2\langle\varepsilon^2_{\alpha\beta}\rangle$; c_1, c_2 — объёмные концентрации фаз, $c_1 = V_1/V$, $c_1 + c_2 = 1$. Необходимая информация о гетерогенной структуре располагается в эффективных коэффициентах K^*, μ^*, вид которых следует получить.

Итоговое выражение по вычислению эффективных коэффициентов упругости имеет вид

$$\lambda^*_{jk\alpha\beta} = \langle\lambda_{jk\alpha\beta}\rangle + c_1c_2\lambda'_{jkmn}\big(I_{\gamma\delta mn} + R_{\gamma\delta pq}\big(\lambda^*_{pqmn} - \lambda''_{pqmn}\big)\big)^{-1}R_{\gamma\delta r\nu}\lambda'_{r\nu\alpha\beta}, \tag{7}$$
$$\lambda'_{ij\alpha\beta} = \lambda^1_{ij\alpha\beta} - \lambda^2_{ij\alpha\beta}, \quad \lambda''_{ij\alpha\beta} = c_2\lambda^1_{ij\alpha\beta} + c_1\lambda^2_{ij\alpha\beta}.$$

Интегралы R_{ijpq} вычисляются по формуле

$$R_{ijpq}(\boldsymbol{k}) = -\int \partial_q\partial_{(j}\langle G_{i)p}\rangle(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})e^{-i\boldsymbol{kr}}\,d\mathbf{r}$$

и при $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$ имеют итоговый вид

$$R_{jkpq} = -\frac{1}{3\gamma_2}\frac{1}{\mu^*}I_{jkpq} + \frac{1}{15\gamma_2}\frac{\gamma_1K^* + (\gamma_2 - \frac{2}{3}\gamma_1)\mu^*}{\mu^*(\gamma_1K^* + (2\gamma_2 - \frac{2}{3}\gamma_1)\mu^*)}(\delta_{jk}\delta_{pq} + 2I_{jkpq}),$$
$$\gamma_1 = 1 + \frac{\beta}{6\pi}\frac{a^2}{\Delta^3}\frac{(K_1 - K_2)(c_1bK_1 - c_2aK_2)}{K_1K_2},$$
$$\gamma_2 = 1 + \frac{\beta}{6\pi}\frac{a^2}{\Delta^3}\frac{(\mu_1 - \mu_2)(c_1b\mu_1 - c_2a\mu_2)}{\mu_1\mu_2}.$$

Функция $\varphi(\mathbf{r})$ при этом взята в виде $\varphi(\mathbf{r}) = e^{-r/(\alpha c_1 a)}$ [32], где α — некоторый структурный коэффициент, который для шара приближённо определим как $\alpha = \pi/2$. Вычисление результата действия вторых производных на осреднённую функцию Грина произведено с учётом приближения

$$\partial_i\partial_p\frac{e^{-\delta_1 r} - e^{-\delta_2 r}}{r} \cong \frac{1}{2}\big(\delta_1^2 - \delta_2^2\big)\partial_i\partial_p r,$$

характеризующего малость масштаба Δ относительно масштаба осреднения R.

Подставив вычисленные R_{jkpq} в формулу (7), получим модифицированные эффективные коэффициенты упругости

$$\begin{gathered}K^* = c_1K_1 + c_2K_2 - \frac{c_1c_2(K_1 - K_2)^2}{c_1K_2 + c_2K_1 + 4/3\gamma_2\mu^*},\\ \mu^* = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 - \frac{c_1c_2(\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1\mu_2 + c_2\mu_1 + \gamma_2\frac{\mu^*(3/2\gamma_1K^* + (7/3\gamma_2 - \gamma_1)\mu^*)}{\gamma_1K^* + (8/3\gamma_2 - 2/3\gamma_1)\mu^*}}.\end{gathered} \tag{8}$$

В полученных коэффициентах (8) параметры γ_1 и γ_2 являются явно определёнными и интегрально учитывают микроструктуру среды: характерные размеры фаз неоднородной системы и их физические свойства. Эти коэффициенты характеризуют объёмные и сдвиговые свойства гетерогенной среды. В частном случае $\Delta \gg a, b$ или $\beta = 0$, параметры $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ и полученные эффективные коэффициенты согласуются с работами [3, 4, 7–9, 13, 16]. Этот частный случай характеризует пренебрежение границами раздела фаз (либо их влияние на поле интегрально зануляется). Отметим, что в работе [2] в эффективных коэффициентах упругости присутствует один параметр $\gamma \neq 1$, который интегрально учитывает микроструктуру среды.

Для перехода к вязкоупругим эффективным коэффициентам в формуле (8) следует провести следующие замены:

$$K^* \to K^* - i\omega\zeta^*, \quad \mu^* \to \mu^* - i\omega\eta^*, \quad K_\nu = K_\nu - i\omega\zeta_\nu, \quad \mu_\nu = \mu_\nu - i\omega\eta_\nu, \quad \nu = 1,\ 2,$$

где ζ^* и η^* — эффективные коэффициенты объёмной и сдвиговой вязкостей соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе модифицированного концепцией обобщённой производной оператора вязкоупругого линейного уравнения и проведённого осреднения сформулирована задача многих тел в гетерогенной среде для функции Грина. С учётом представленных гипотез найдено решение этой задачи, характеризующее переходный слой и отображающее коллективное взаимодействие фаз при распространении вязкоупругого поля по гетерогенной среде. С учётом найденного решения для осреднённой функции Грина в рамках метода условных моментов получены эффективные коэффициенты вязкоупругости, интегрально учитывающие микроструктуру системы (физические свойства и характерные размеры фаз) в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.
2. *Мишин А.В.* Обобщённая производная и её использование для анализа микроструктуры гетерогенной среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. V. 24, № 4. С. 79–96; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.406
3. *Khoroshun L.P.* A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites // Mekh. Kompos. Mater. 1995. V. 31, N 3. P. 310–318.
4. *Khoroshun L.P.* Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // Appl. Mech. 2000. V. 30, N 10. P. 30–62.
5. *Hashin Z., Shtrikman S.* On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10, N 4. P. 335–342.
6. *Hashin Z., Shtrikman S.* A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials // J. Mech. Phys. Solids. 1963. V. 11, N 2. P. 127–140.
7. *Hashin Z., Shtrikman S.* Conductivity of polycrystals // Phys. Rev. 1963. V. 130, N 129. P. 129–133.
8. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977.
9. *Bruggeman D.A.G.* Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten von Vielrkistallen der nichtregularen Systeme // Ann. Phys. 1936. Bd. 417, N 25. P. 645–672.
10. *Kroner E.* Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls // Z. Phys. 1958. Bd. 151, N 4. P. 504–518.
11. *Hill R.A.* Self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13, N 4. P. 213–222.
12. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. N. Y.: Acad. Press, 1982.
13. *Eshelby J.* Continuum Theory of Dislocations. N. Y.: Acad. Press, 1956.

14. *Khoroshun L.P.* Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media // Appl. Mech. 1978. V. 14. P. 3–17.
15. *Khoroshun L.P.* Conditional-moment method in problems of the mechanics of composite materials // Appl. Mech. 1987. V. 23, N 10. P. 100–108.
16. *Болотин В.В., Москаленко В.Н.* Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. Т. 34, № 1. С. 66–72.
17. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
18. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
19. *Mori T., Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metall. 1973. V. 21. P. 571–574.
20. *Castaneda P.P., Willis J.R.* The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media // J. Mech. Phys. Solids. 1995. V. 43. P. 1919–1951; http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(95)00058-Q
21. *Fedotov A.* The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials // J. Mater. Sci. 2018. V. 53. P. 5092–5102.
22. *Chen L.Y. et al.* Processing and properties of magnesium containing a dense uniform dispersion of nanoparticles // Nature. 2015. V. 528. Article 7583.
23. *Morsi K., Patel V.V.* Processing and properties of titanium-titanium boride (TiBw) matrix composites // J. Mater. Sci. 2007. V. 42, N 6. P. 2037–2047.
24. *Mishin A.V., Fomin V.M.* Investigation of the elastic properties of the material obtained by the method of cold gas-dynamic spraying with laser treatment // Appl. Mech. Tech. Phys. 2021. N 6. P. 966–971.
25. *Fomin V.M. et al.* Deposition of cermet coatings on the basis of Ti, Ni, WC, and B4C by cold gas dynamic spraying with subsequent laser irradiation // Phys. Mesomech. 2020. V. 23, N 4. P. 291–300.
26. *An Q. et al.* Two-scale TiB/Ti64 composite coating fabricated by two-step process // J. Alloys Compd. 2018. V. 755. P. 29–40.
27. *Фомин В.М., Голышев А.А., Маликов А.Г. и др.* Создание функционально-градиентного материала методом аддитивного лазерного сплавления // Прикл. математика и теор. физика. 2020. Т. 61, № 5. С. 224–234.
28. *Gao J. et al.* Networks formed from interdependent networks // Nat. Phys. 2012. V. 8, N 1. P. 40–48.
29. *Huang X. et al.* Robustness of interdependent networks under targeted attack // Phys. Rev. E: Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys. 2011. V. 83, N 6. Article 065101; DOI:10.1103/PhysRevE.83.065101
30. *Gao J. et al.* Robustness of a network of networks // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107, N 19. Article number 195701; DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.195701.
31. *Мишин А.В.* Учёт обобщённой производной и коллективного влияния фаз на процесс гомогенизации // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. V. 25, № 4. С. 86–98.
32. *Khoroshun L.P.* Elastic properties of materials reinforced with unidirectional short fibers // Appl. Mech. 1972. V. 8, N 10. P. 1–7.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.3

CARRYING OUT HOMOGENIZATION IN VISCOELASTIC HETEROGENEOUS MEDIA TAKING INTO ACCOUNT THE COLLECTIVE INFLUENCE OF BOUNDARIES

A. V. Mishin[1,2]

[1]*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, ul. Institutskaya 4/1, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2]*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: alekseymishin1994@gmail.com

Received 06.07.2022, revised 16.09.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. The effective coefficients of viscoelasticity of a heterogeneous medium are obtained on the basis of the generalized derivative formalism, which reflects the internal boundaries of a heterogeneous medium. A solution is sought for the averaged Green's function for the found modified operator, taking into account the averaging and subsequent analysis of the operator. The effective viscoelasticity coefficients integrally take into account the microstructure of the system (physical properties and characteristic phase sizes) in an explicit form, that is a consequence of the solution obtained, which expresses the solution of the many-body problem in a heterogeneous medium.

Keywords: heterogeneous medium, microstructure, transition layer, generalized derivative, Green's function, averaging, viscoelasticity.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.109

REFERENCES

1. Shvarts L. Matematicheskie metody dlya fizicheskikh nauk [Matematicheskie metody dlya fizicheskikh nauk]. Moscow: Mir, 1965 (in Russian).
2. Mishin A.V. Obobshchennaya proizvodnaya i ee ispol'zovanie dlya analiza mikrostruktury geterogennoi sredy. [Generalized derivative and its use for analysis of the microstructure of a heterogeneous medium]. *Siber. Zhurn. Indust. Mat.*, 2021, Vol. 24, No. 4, pp. 79–96 (in Russian); DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.406
3. Khoroshun L.P. A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites. *Mekh. Kompos. Mater.*, 1995, Vol. 31, No. 3, pp. 310–318.
4. Khoroshun L.P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites. *Appl. Mech.*, 2000, Vol. 30, No. 10, pp. 30–62.
5. Hashin Z., Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 1962, Vol. 10, No. 4, pp. 335–342.
6. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1963, Vol. 11, No. 2, pp. 127–140.
7. Hashin Z., Shtrikman S. Conductivity of polycrystals. *Phys. Rev.*, 1963, Vol. 130, No. 129, pp. 129–133.
8. Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [Theory of elasticity of microhomogeneous media]. Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

9. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten von Vielrkistallen der nichtregularen Systeme. *Ann. Phys.*, 1936, Bd. 417, No. 25, pp. 645–672.

10. Kroner E. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. *Z. Phys.*, 1958, Bd. 151, No. 4, pp. 504–518.

11. Hill R.A. Self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, Vol. 13, No. 4, pp. 213–222.

12. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. N. Y.: Acad. Press, 1982.

13. Eshelby J. Continuum Theory of Dislocations. N. Y.: Acad. Press, 1956.

14. Khoroshun L.P. Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media. *Appl. Mech.*, 1978, Vol. 14, pp. 3–17.

15. Khoroshun L.P. Conditional-moment method in problems of the mechanics of composite materials. *Appl. Mech.*, 1987, Vol. 23, No. 10, pp. 100–108.

16. Bolotin V.V., Moskalenko V.N Zadacha ob opredelenii uprugikh postoyannykh mikroneodnorodnoi sredy [The problem of determining the elastic constants of a micro-homogeneous medium]. *Zhurn. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1968, Vol. 34, No. 1, pp. 66–72 (in Russian).

17. Nigmatulin R.I. Osnovy mekhaniki geterogennykh sred [Fundamentals of heterogeneous media mechanics]. Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).

18. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh [Averaging of processes in periodic environments]. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).

19. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*, 1973, Vol. 21, pp. 571–574.

20. Castaneda P.P., Willis J.R. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *J. Mech. Phys. Solids*, 1995, Vol. 43, pp. 1919–1951; http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(95)00058-Q

21. Fedotov A. The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials. *J. Mater. Sci.*, 2018, Vol. 53, pp. 5092–5102.

22. Chen L.Y. et al. Processing and properties of magnesium containing a dense uniform dispersion of nanoparticles. *Nature*, 2015, Vol. 528, article 7583.

23. Morsi K., Patel V.V. Processing and properties of titanium-titanium boride (TiBw) matrix composites. *J. Mater. Sci.*, 2007, Vol. 42, No. 6, pp. 2037–2047.

24. Mishin A.V., Fomin V.M. Investigation of the elastic properties of the material obtained by the method of cold gas-dynamic spraying with laser treatment. *Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, No. 6, pp. 966–971.

25. Fomin V.M. et al. Deposition of cermet coatings on the basis of Ti, Ni, WC, and B4C by cold gas dynamic spraying with subsequent laser irradiation. *Phys. Mesomech.*, 2020, Vol. 23, No. 4, pp. 291–300.

26. An Q. et al. Two-scale TiB/Ti64 composite coating fabricated by two-step process. *J. Alloys Compd.*, 2018, Vol. 755, pp. 29–40.

27. Fomin V.M., Golyshev A.A., Malikov A.G. i dr. Sozdanie funktsional'no-gradientnogo materiala metodom additivnogo lazernogo splavleniya [Creation of a functional gradient material by additive laser fusion]. *Prikl. Mat. Teor. Fiz.*, 2020, Vol. 61, No. 5, pp. 224–234 (in Russian).

28. Gao J. et al. Networks formed from interdependent networks. *Nat. Phys.*, 2012, Vol. 8, No. 1, pp. 40–48.

29. Huang X. et al. Robustness of interdependent networks under targeted attack. *Phys. Rev. E: Stat. Nonlinear, Soft Matter. Phys.*, 2011, Vol. 83, No. 6, article 065101; DOI:10.1103/PhysRevE.83.065101

30. Gao J. et al. Robustness of a network of networks.*Phys. Rev. Lett.*, 2011. Vol. 107, No. 19. article 195701; DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.195701.

31. Mishin A.V. Uchet obobshchennoi proizvodnoi i kollektivnogo vliyaniya faz na protsess gomogenizatsii [Taking into account the generalized derivative and the collective influence of phases on the homogenization process]. *Siber. Zhurn. Indust. Mat.*, 2022. Vol. 25, No. 4, pp. 86–98 (in Russian).

32. Khoroshun L.P. Elastic properties of materials reinforced with unidirectional short fibers. *Appl. Mech.*, 1972, Vol. 8, No. 10, pp. 1–7.