

УДК 519.634

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СХЛОПЫВАНИИ ПРИСОЕДИНЁННОЙ КАВЕРНЫ ПОСЛЕ КАВИТАЦИОННОГО УДАРА КРУГЛОГО ДИСКА

© 2023 М. В. Норкин^a

*Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук,
ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону 344090, Россия*

E-mail: norkinmi@mail.ru

Поступила в редакцию 10.11.2021 г.; после доработки 08.12.2021 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Рассматривается осесимметричная задача о вертикальном отрывном ударе круглого диска, герметично закрывающего дно бассейна, имеющего форму слоя. После удара диск движется вдоль вектора силы тяжести (вне слоя) с постоянной скоростью. При этом предполагается, что диск скользит вдоль твёрдых цилиндрических стенок как поршень. Особенностью этой задачи является то, что после удара образуется присоединённая каверна и появляется новая внутренняя свободная граница жидкости. Требуется изучить процесс схлопывания каверны при малых скоростях движения диска, которые соответствуют небольшим числам Фруда. В главном асимптотическом приближении формулируется задача с односторонними ограничениями, на основе которой определяется динамика линии отрыва и описывается процесс схлопывания каверны с учётом подъема внутренней свободной границы жидкости. При помощи метода разделения переменных в цилиндрических координатах и техники парных интегральных уравнений данная задача сводится к связанной нелинейной проблеме, включающей в себя трансцендентное уравнение для определения радиуса круговой линии отрыва и интегральное уравнение Фредгольма второго рода с гладким ядром. Показывается хорошее согласование аналитических результатов, полученных для большой толщины слоя, с прямыми численными расчётами.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, круглый диск, отрывной удар, аналитическое решение, динамика линии отрыва, схлопывание каверны, число Фруда, число кавитации.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.111

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование нестационарных кавитационных течений в идеальной несжимаемой жидкости приводит к динамическим смешанным задачам теории потенциала со свободными границами. При изучении кавитации, вызванной ударом плавающего тела, важную роль играет классическая модель удара с отрывом [1]. В момент удара положение системы не успеет измениться и образующаяся на поверхности тела зона отрыва характеризуется тем, что импульсивное давление в ней равняется нулю. В следующие после удара моменты времени внутренняя свободная граница отходит от поверхности тела и образуется присоединённая каверна, заполненная парами жидкости или газа (или газом при искусственной кавитации). Динамические задачи удара такого плана исследовались ранее в плоской постановке с помощью асимптотического анализа на малых временах (см. [2], где также приводится необходимая библиография). Такой подход позволяет определить форму каверны на некотором начальном этапе движения цилиндра. Дальнейшая динамика каверны изучалась только при малых скоростях движения цилиндра, которые соответствуют небольшим числам Фруда [3]. При этом учитывалась

возможность искусственного поддува воздуха в каверну со стороны тела (искусственная кавитация). Интерес к малым скоростям объясняется возможностью получить полное решение проблемы образования и схлопывания присоединённой каверны после кавитационного удара. С математической точки зрения данная проблема сводится к решению смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела. К настоящему времени разработаны эффективные численные методы решения таких задач. Однако при этом наблюдается большой дефицит в точных аналитических решениях. В динамической задаче о движении твёрдого тела в жидкости после кавитационного удара такие решения практически отсутствуют. Таким образом, важным является построение эффективного тестового примера, с помощью которого можно было наглядно разъяснить все тонкие моменты, возникающие при исследовании таких задач. К ним относятся вопросы, связанные с определением неизвестной априори линии отрыва, с формулировкой граничных условий типа неравенств и их равносильности условию Кутты — Жуковского, с работой специального итерационного метода, применяемого для решения задач со свободными границами, а также с нахождением формы внутренней свободной границы жидкости. Отметим, что при определении неизвестной априори зоны отрыва частиц жидкости и знака давления на смоченной поверхности тела весьма полезным оказывается вариационный принцип Огазо [4]. Такой подход стал активно использоваться в последнее время для решения плоских задач гидродинамического удара в классической постановке (см. [5], где также даны ссылки на предыдущие работы). Отметим, что интерес к этому принципу в предлагаемой статье вызван, в первую очередь, осесимметричностью и динамикой рассматриваемого процесса. Все эти вопросы обсуждаются в настоящей статье для специальной задачи такого плана, имеющей аналитическое решение. В центре внимания работы вертикальный и осесимметричный удар круглого диска, который герметично закрывает дно бассейна, имеющего форму слоя. Предполагается, что после удара диск движется вдоль вектора силы тяжести (вне слоя) с постоянной скоростью. В начальный момент времени (в момент, непосредственно следующий после удара) жидкость отрывается от диска сразу по всей его поверхности. После удара за диском образуется присоединённая каверна и вместе с ней появляется монотонно расширяющаяся кольцевая область контакта вблизи края диска (последнее равносильно монотонному уменьшению зоны отрыва). Требуется изучить процесс схлопывания каверны при медленных движениях диска после удара. Поставленная задача вначале сводится к смешанной краевой задаче теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела, а затем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, содержащему в качестве параметра неизвестный априори радиус круговой линии отрыва. В случае большой толщины слоя решение интегрального уравнения представляется в простой аналитической форме. В результате для определения искомого радиуса возникает трансцендентное уравнение, которое эффективно решается методом секущих. Отмечается хорошее согласование аналитических результатов с прямыми численными расчётами.

Объясним, какое место занимает данная работа среди работ, близких к её тематике. Современные исследования по проблеме резко нестационарного взаимодействия твердых тел с жидкостью (удар, разгон, торможение) осуществляются по следующим основным направлениям. Во-первых, это задачи генерации волн движущимся в жидкости телом. Последние работы в этом направлении связаны с задачами разгона (движения тела в жидкости из состояния покоя с постоянным ускорением). Результаты исследований в этой области отражены в [6]. Как правило, задачи, связанные с генерацией волн, решаются без учета явления кавитации. Во-вторых, отметим задачи проникания твердых тел в жидкость с учетом явления отрыва частиц жидкости от их поверхностей. Подробный обзор работ по этой тематике дан в [7]. Третье направление связано с динамическими кавитационными задачами удара твердых тел, плавающих на поверхности жидкости или полностью в неё погруженных. Исследования этих задач были начаты в работе [8] и продолжены в работах автора (ссылки на предыдущие работы даны в [2, 3]). Настоящая работа является развитием идей предыдущих работ этого направления.

В ней впервые строится аналитическое решение динамической кавитационной задачи удара, которое является важным дополнением к предыдущим численно-аналитическим исследованиям. Построенное аналитическое решение позволяет лучше понять процесс кавитации, который происходит после удара при малых числах Фруда. При больших числах Фруда динамическая кавитационная задача удара остается малоизученной и поэтому представляет интерес для дальнейших исследований.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается слой идеальной несжимаемой тяжёлой жидкости, в основание которого герметично вставлен круглый диск. После удара диск движется в вертикальном направлении (вне слоя) с постоянной скоростью. Предполагается, что образующаяся за диском область ограничена с боков твёрдыми цилиндрическими стенками (можно считать, что диск скользит вдоль стенок как поршень). Особенностью этой задачи является то, что в результате удара происходит отрыв частиц жидкости от твёрдой поверхности и образование присоединённой каверны за телом. Требуется изучить процесс схлопывания каверны при малых скоростях движения диска, которые соответствуют небольшим числам Фруда. Существенно отметить, что первоначальная зона отрыва, которая определяется на основе классической модели удара [1], совпадает со всей поверхностью диска. Вследствие этого начальные условия в рассматриваемой динамической кавитационной задаче будут нулевыми. После удара вблизи края диска образуется монотонно расширяющаяся кольцевая область контакта, которая в момент схлопывания каверны совпадает со всей поверхностью диска. Такая модель схлопывания оправдывается при малом возмущении внутренней свободной границы жидкости и не очень большом давлении в каверне (порядка атмосферного). Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с диском (рис. 1), имеет вид

$$\Delta\varphi = 0, \quad R \in \Omega(t), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -1, \quad z = 0, \quad c(\varepsilon\tau) < r < 1, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial\varphi}{\partial z} + 0.5\varepsilon^2(\nabla\varphi)^2 + z - \varepsilon^2\tau - H - 0.5\chi = 0, \quad R \in S_1(t), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + 1 = \frac{\partial\zeta}{\partial r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial\zeta}{\partial\tau}, \quad R \in S_1(t), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial\varphi}{\partial z} + 0.5\varepsilon^2(\nabla\varphi)^2 + \psi = 0, \quad R \in S_2(t), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \quad R \in S_2(t), \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \quad r = 1, \quad 0 < z < \varepsilon^2\tau, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad z = \varepsilon^2\tau, \quad r > 1, \quad (1.8)$$

$$\nabla\varphi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.9)$$

$$\varphi(r, z, 0) = 0, \quad \zeta(r, 0) = 0, \quad \psi(r, 0) = 0. \quad (1.10)$$

В поставленной задаче используется растянутое время τ , связанное с безразмерным временем t равенством $\tau = \varepsilon^{-1}t$. Функции φ , ζ , ψ выражаются через потенциал скоростей Φ , а также возмущения внутренней и внешней свободных границ жидкости η и ξ по формулам

$$\varphi(r, z, \tau) = \varepsilon^{-1}\Phi(r, z, \varepsilon\tau), \quad \zeta(r, \tau) = \eta(r, \varepsilon\tau), \quad \psi(r, \tau) = \xi(r, \varepsilon\tau).$$

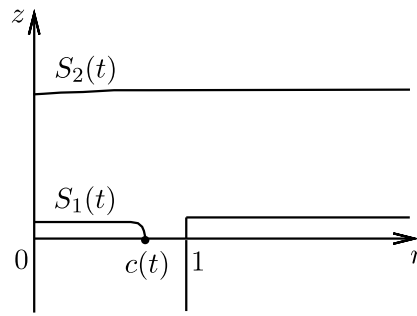


Рис. 1. Схема течения жидкости в меридиональной полуплоскости в момент времени t

Модель (1.1)–(1.10) содержит следующие характерные параметры:

$$\varepsilon = \text{Fr} = \frac{v_0}{\sqrt{ga}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho ga},$$

где Fr — число Фруда; χ — число кавитации (безразмерная разность давлений на внешней свободной поверхности и в каверне); p_a — атмосферное давление; p_c — давление в каверне; g — ускорение свободного падения; ρ — плотность жидкости; v_0 — скорость диска, a — его радиус.

Безразмерные переменные вводятся по формулам

$$t' = \frac{a}{v} t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad z' = az, \quad \Phi' = av\Phi, \quad p' = \rho v^2 p,$$

где штрихами помечаются размерные величины, а характерная скорость $v = \sqrt{ga}$.

Связь неподвижных координат X, Y, Z с подвижными x, y, z устанавливается при помощи соотношений $X = x, Y = y, Z = z - v_0 t$. Предполагается, что ось z направлена против вектора силы тяжести, начало координат находится в центре диска.

В работе также применяются следующие обозначения: $\Omega(t)$ — область течения жидкости; $S_1(t)$ — внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $S_2(t)$ — внешняя свободная поверхность жидкости, которая до начала процесса была горизонтальной; $c(t)$ — радиус круговой линии отрыва, отделяющей в момент времени t область безотрывного обтекания от зоны отрыва; H — толщина невозмущённого слоя жидкости; R — радиус-вектор с координатами (r, z) , где r, z — цилиндрические координаты.

На линии отрыва ставится условие Кутты — Жуковского, означающее, что скорость жидкости на ней должна быть конечной.

2. ГЛАВНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Так как в самом общем виде задача (1.1)–(1.10) является достаточно сложной, то вначале необходимо провести упрощение данных уравнений. Основные трудности, связанные с решением этой задачи, заключаются в том, что на неизвестных заранее свободных границах формулируются нелинейные краевые условия. Кроме этого неизвестной оказывается линия отрыва, отделяющая на поверхности тела область безотрывного обтекания от зоны отрыва. В настоящей работе упрощение проводится в предположении, что параметр ε является малой величиной. Решение поставленной задачи будем искать в виде следующих асимптотических разложений:

$$\varphi(r, z, \tau) = \varphi_1(r, z, \tau) + \dots, \quad c(t) = c(\varepsilon\tau) = c_0(\tau) + \dots, \quad (2.1)$$

$$\zeta(r, \tau) = \varepsilon^2 \zeta_1(r, \tau) + \dots, \quad \psi(r, \tau) = \varepsilon^2 \psi_1(r, \tau) + \dots, \quad (2.2)$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по ε .

Подставляя разложения (2.1)–(2.2) в уравнение и граничные условия задачи (1.1)–(1.10), осуществляя с помощью формулы Тейлора перенос краевых условий с возмущённых участков границы области $\Omega(t)$ на первоначально невозмущённый уровень, а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , придём в главном приближении к смешанной краевой задаче теории потенциала в области $\Omega(0)$. В предположении, что линия отрыва монотонно стягивается в точку, проинтегрируем динамическое условие в зоне отрыва по времени от 0 до τ при фиксированном $r \in (0, c_0(\tau))$. Интегрируя также динамическое условие на внешней свободной границе, придём к следующей задаче:

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad R \in \Omega(0), \quad (2.3)$$

$$\varphi_1 = (0.5\chi + H)\tau, \quad z = 0, \quad 0 < r < c_0(\tau), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -1, \quad z = 0, \quad c_0(\tau) < r < 1, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad 1 < r < \infty, \quad (2.6)$$

$$\varphi_1 = 0, \quad z = H; \quad \nabla\varphi_1 \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Начальное условие для потенциала скорости будет выполнено, так как при $\tau = 0$ получается задача для уравнения Лапласа с нулевыми граничными условиями ($c_0(0) = 1$). В силу неизвестности $c_0(\tau)$ задача (2.3)–(2.7) является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами. Радиус круговой линии отрыва в каждый момент времени определяется из условия Кутты — Жуковского, которое оказывается равносильным системе неравенств

$$(0.5\chi + H)\tau - \varphi_1 \geq 0, \quad z = 0, \quad c_0(\tau) < r < 1, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \geq -1, \quad z = 0, \quad 0 < r < c_0(\tau). \quad (2.9)$$

Отметим, что условие Кутты — Жуковского удобно использовать при построении аналитического решения задачи, а систему неравенств (2.8)–(2.9) при решении задачи прямыми численными методами.

Неравенство (2.8) является следствием динамического условия $p \geq p_c$, говорящего о том, что давление в зоне контакта не может опускаться ниже давления в каверне (неравенство для давления интегрируется по времени от 0 до τ). Кинематическое условие (2.9) приближённо означает, что жидкие частицы не могут входить внутрь твёрдого тела.

Существенно отметить, что по своей структуре задача (2.3)–(2.9) совпадает с классической задачей об ударе с отрывом, для которой доказана теорема существования и единственности решения [9].

3. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Решение задачи (2.3)–(2.7) с дополнительным условием Кутты — Жуковского на круговой линии отрыва можно разделить на два основных этапа. Вначале строится решение линейной смешанной краевой задачи теории потенциала для слоя при любом фиксированном $c = c_0(\tau)$ ($0 < c < 1$). После этого неизвестная априори величина c находится из условия регулярности решения данной задачи на линии раздела краевых условий. Для решения первой задачи применяется метод парных интегральных уравнений [10–12]. Гармоническая функция φ_1 , удовлетворяющая граничному условию при $z = H$ и условию на бесконечности, представляется в виде

$$\varphi_1(r, z, \tau) = \int_0^\infty A(\lambda) \frac{\operatorname{sh} \lambda(H - z)}{\operatorname{ch} \lambda H} J_0(\lambda r) d\lambda,$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода, а неизвестная функция $A(\lambda)$ определяется из граничных условий (2.4)–(2.6). В результате возникает система парных интегральных уравнений:

$$\int_0^{\infty} A(\lambda) \operatorname{th} \lambda H J_0(\lambda r) d\lambda = (0.5\chi + H)\tau, \quad 0 < r < c,$$

$$\int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = f_0(r), \quad f_0(r) = 1, \quad c < r < 1; \quad f_0(r) = 0, \quad 1 < r < \infty.$$

Традиционными методами, с помощью разрывных интегралов Вебера — Шафхейтлина [10–13], показывается, что второму из парных уравнений можно удовлетворить, если представить функцию $A(\lambda)$ в виде интеграла:

$$A(\lambda) = \int_0^1 f(s) \cos \lambda s ds, \quad f(s) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-s^2}, \quad c \leq s \leq 1, \quad (3.1)$$

где функция $f(s)$ предполагается непрерывной при $0 \leq s \leq c$.

Подставляя далее этот интеграл в первое из парных уравнений, придём для определения функции $f(s)$ при $0 \leq s \leq c$ к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с гладким ядром ($0 \leq x \leq c$):

$$f(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^c K(x, s) f(s) ds = \frac{2}{\pi} (0.5\chi + H)\tau + \frac{2}{\pi^2} \int_c^1 K(x, s) \sqrt{1-s^2} ds, \quad (3.2)$$

$$K(x, s) = K(x-s) + K(x+s); \quad K(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda H}}{\operatorname{ch} \lambda H} \cos \lambda t d\lambda.$$

Отметим, что интегральное уравнение с похожим по структуре ядром возникает в классической задаче о безотрывном ударе круглого диска [14]. Однако существенное отличие состоит в том, что величина c , входящая в уравнение (3.2), априори неизвестна и подлежит определению вместе с решением данного уравнения. В результате возникает связанная нелинейная задача, которую предлагается решать асимптотически, при больших H . Заметим, что интегральный оператор в (3.2) будет сжимающим при достаточно больших H в соответствующем пространстве непрерывных функций. Это даёт возможность применить для решения интегрального уравнения метод последовательных приближений. Раскладывая полученные приближения в ряды по степеням H^{-1} и убеждаясь, что каждое следующее приближение добавляет в асимптотику функции $f(x)$ члены более высокого порядка малости, чем предыдущие, придём к асимптотике решения интегрального уравнения (3.2). Отметим, что зависимость величины c от H , в силу её ограниченности, можно не конкретизировать на данном этапе построения асимптотики (порядок малости остаточного члена не уменьшится). Для эффективной реализации указанного алгоритма необходимо вначале построить асимптотику ядра $K(x, s)$. С этой целью в интеграле $K(t)$ производится замена переменной ($\lambda H \rightarrow \lambda$), после которой функция $\cos(H^{-1}\lambda t)$ раскладывается по формуле Тейлора с последующим умножением на экспоненциально убывающую функцию и почленным интегрированием по t от 0 до ∞ . Коэффициенты полученного разложения выражаются через произведение $\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)$, $\alpha = 3, 5, 7, \dots$, где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана. На основании полученного представления интеграла $K(t)$ выписывается асимптотика ядра $K(t, s)$, а после этого, по описанному

выше алгоритму, находится асимптотика решения интегрального уравнения (3.2). Пренебрегая в ней членами порядка H^{-3} и выше, получим следующее приближённое равенство ($0 \leq x \leq c$):

$$f(x) = \frac{2}{\pi}(0.5\chi + H)\tau + \frac{4 \ln 2}{\pi^2}\tau c + \frac{2 \ln 2}{\pi^2}gH^{-1} + \left[\frac{4(\ln 2)^2}{\pi^3}cg - \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2}(x^2 + \frac{1}{3}c^2)\tau c \right] H^{-2},$$

$$g = \left(\chi + \frac{4 \ln 2}{\pi}c \right)\tau c + \frac{\pi}{2} - \arcsin c - c\sqrt{1-c^2}. \quad (3.3)$$

Обратим внимание на то, что в рассматриваемом приближении решение интегрального уравнения является квадратичной функцией по x , зависящей от параметра c сложным нелинейным образом.

Далее остановимся на вопросе определения величины c . Для этого найдём явное выражение для потенциала $\varphi_1(r, 0, \tau)$ при $c < r < 1$:

$$\varphi_1(r, 0, \tau) = \int_0^c \frac{f(s) ds}{\sqrt{r^2 - s^2}} + \frac{2}{\pi} \int_c^r \frac{\sqrt{1-s^2}}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \int_0^c K(t, s) f(s) ds - \frac{2}{\pi^2} \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \int_c^1 K(t, s) \sqrt{1-s^2} ds. \quad (3.4)$$

Делая во втором интеграле замену переменной $s = r \sin \varphi$, а в последних двух слагаемых производя разбиение промежутка интегрирования $[0, r]$ на два с помощью точки c и учитывая равенство (3.2), представим искомый потенциал в следующей форме:

$$\varphi_1(r, 0, \tau) = \frac{2}{\pi}(0.5\chi + H)\tau \arcsin \frac{c}{r} + \frac{2}{\pi} \int_{\arcsin(c/r)}^{\pi/2} \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_c^r \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \int_0^c K(t, s) f(s) ds - \frac{2}{\pi^2} \int_c^r \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \int_c^1 K(t, s) \sqrt{1-s^2} ds. \quad (3.5)$$

В общем случае (для произвольной c) производная функции φ_1 по r имеет при $r = c$ корневую особенность. Условие регулярности, обеспечивающее выполнение условия Куты – Жуковского, состоит в том, что коэффициент при указанной особенности должен стремиться к нулю при $r \rightarrow c+0$. Дифференцируя равенство (3.5) по r (предварительно проведя в последних двух слагаемых интегрирование по частям), выделяя корневую особенность и используя формулу (3.2) при $x = c$, запишем искомое условие в виде

$$f(c) - \frac{2}{\pi} \sqrt{1-c^2} = 0. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) представляет собой трансцендентное уравнение для определения величины c . Она позволяет по заданному τ определить радиус круговой линии отрыва $c = c_0(\tau)$ в главном приближении по ε . В дальнейшем, при численной реализации, величина $f(c)$ будет находиться с помощью приближённой формулы (3.3). Подчеркнём, что c входит в $f(c)$ и как аргумент ($x = c$), и как параметр.

Обратим внимание на то, что равенство (3.6) фактически является условием непрерывности функции $f(x)$ при $x = c$. Таким образом, условие регулярности решения краевой задачи на линии отрыва формулируется в терминах непрерывности функции $f(x)$. Такая формулировка получается благодаря представлению решения системы парных интегральных уравнений

в форме (3.1). Если интеграл в (3.1) разбить на сумму двух интегралов (по промежуткам $[0, c]$ и $[c, 1]$), то второе слагаемое будет занулять второе из парных уравнений. Последнее полностью соответствует традиционному подходу к решению таких систем. Однако отметим, что если сразу занулить второе из парных уравнений с помощью продолжения его правой части на промежуток $[0, c]$ и разложения в интеграл Фурье — Бесселя, то, вообще говоря, получится другая форма записи условия регулярности.

Отметим, что существует другой способ определения неизвестной априори зоны отрыва частиц жидкости, который основан на применении вариационного принципа Огазо [4]. Суть этого метода состоит в следующем. Рассмотрим решение линейной смешанной краевой задачи (2.3)–(2.7) в любой фиксированной точке $M(r, z) \in \Omega(0)$ (τ тоже фиксировано). При этом радиусу круговой линии раздела краевых условий будем придавать различные значения (вместо $c_0(\tau)$ будем писать c). Таким образом возникает функция $F(c)$, которая каждому $c \in (0, 1)$ ставит в соответствие решение данной линейной задачи в фиксированной точке $M(r, z)$. Согласно вариационному принципу Огазо, истинное течение жидкости, удовлетворяющее условию Кутты — Жуковского, соответствует экстремальному значению этой функции (в более общем случае — функционалу). Заметим, что в качестве фиксированной точки M можно взять любую точку на диске в зоне контакта (обосновывается с помощью предельного перехода). Чтобы применить этот принцип, нужно в формуле (3.4) зафиксировать переменную $r > c$ и продифференцировать функцию φ_1 по параметру c . Дифференцируя также интегральное уравнение (3.2) по этому параметру и используя полученное равенство, будем иметь:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial c} = \frac{f(c) - \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - c^2}}{\sqrt{r^2 - c^2}} + G(r, c) = 0,$$

где функция $G(r, c)$ стремится к нулю при $r \rightarrow c + 0$.

Отсюда, в силу произвольности r ($c < r < 1$), сразу следует формула (3.6). Отметим, что вариационный принцип Огазо оказывается здесь более эффективным, чем первый способ нахождения радиуса круговой линии отрыва.

Далее определим радиус круговой линии отрыва с помощью системы неравенств (2.8), (2.9). Используя точное решение задачи (2.3)–(2.7) при любом фиксированном $c = c_0(\tau)$, получим явные выражения для левых частей рассматриваемых неравенств. Первое из них приводит к соотношению $f(c) - \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - c^2} \geq 0$, а второе — к неравенству противоположного знака $f(c) - \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - c^2} \leq 0$. В результате получаем точное равенство, совпадающее с (3.6). Объясним преобразования, связанные с первым неравенством (2.8). Делая в последних двух интегралах (3.5) замену переменной $t = r \sin \psi$, а затем применяя ко всем интегралам теорему о среднем, выделим в левой части (2.8) множитель $\pi/2 - \arcsin(r/c)$. После деления обеих частей неравенства на эту положительную величину, устремим $r \rightarrow c + 0$ и используем формулу (3.2) при $x = c$. В результате придём к искомому неравенству. Преобразования, связанные с неравенством (2.9), не вызывают никаких затруднений. Таким образом, подходы, основанные на применении условия Кутты — Жуковского и системы неравенств (2.8)–(2.9), приводят к одному и тому же уравнению для определения радиуса круговой линии отрыва. Если построено решение, удовлетворяющее системе неравенств, то условие (3.6), являющееся их прямым следствием, как раз и обеспечивает выполнение условия Кутты — Жуковского (зануляется коэффициент при корневой особенности для производной). Обратное соответствие устанавливается при больших H , с помощью асимптотической (3.3). Таким образом, доказываем эквивалентность двух различных подходов.

На основании кинематического уравнения (1.4) получается явное выражение для возмущения внутренней свободной границы жидкости в главном приближении по ε . Оно находится по первой формуле (2.1), где функция $\zeta_1(r, \tau)$ для большой толщины слоя представляется в ви-

де (используется асимптотическое разложение (3.3) до членов порядка H^{-1} включительно):

$$\zeta_1(r, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\tau \arcsin \sqrt{\frac{c_0^2(s) - r^2}{1 - r^2}} ds, \quad 0 < r < c_0(\tau). \quad (3.7)$$

Здесь величина $c_0(s)$ (при каждом фиксированном s) определяется решением трансцендентного уравнения (3.6). Отметим, что несмотря на то, что возмущение внутренней свободной границы является малой величиной, совсем простой формулы для её определения не получается. Также обратим внимание на то, что формула (3.7) эффективна везде, за исключением маленькой окрестности линии отрыва (однородное граничное условие при $r = c_0(\tau)$ не выполняется).

В заключение этого раздела обсудим вопрос о корректности полученного решения. Наряду с условием Кутты — Жуковского должно также выполняться другое важное физическое условие — положительности давления на смоченной поверхности тела. При малых скоростях и искусственной кавитации требуется даже большее: чтобы давление в зоне контакта не опускалось ниже давления в каверне. Последнее приводит к следующему неравенству в главном асимптотическом приближении по ε :

$$(0.5\chi + H) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \geq 0, \quad z = 0, \quad c_0(\tau) < r < 1.$$

Учитывая, что решение задачи (2.3)–(2.9) зависит от τ и от $c = c_0(\tau)$, получим равенство

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \Big|_c + \frac{\partial \varphi_1}{\partial c} \Big|_\tau c'_0(\tau),$$

в котором производные по τ и c берутся при фиксированных c и τ соответственно.

Далее воспользуемся вариационным принципом Огазо [4], на основании которого можно утверждать, что второе слагаемое в последней формуле равно нулю. При этом первое слагаемое, представляющее собой производную функции φ_1 по τ при фиксированном c , определяется на основе решения линейной задачи. В результате производная функции φ_1 по τ будет определяться решением задачи (2.3)–(2.7), где в краевом условии (2.4) следует положить $\tau = 1$, а правую часть условия (2.5) нужно занулить. Так как $c_0(\tau)$ определяется на основе решения задачи со свободной границей (2.3)–(2.9), то нахождение производной по τ сводится к решению краевой задачи с уже известной линией раздела краевых условий. Это даёт возможность провести качественный анализ задачи и показать, что при больших H выполняется сформулированное условие для давления.

4. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Трансцендентное уравнение (3.6) может быть эффективно решено численно с помощью метода секущих. Найденные приближённые значения величины $c_0(\tau)$ сравниваются с аналогичными результатами, полученными на основе специального итерационного метода, применяемого для решения задачи (2.3)–(2.9). В этом подходе последовательно уточняется неизвестная априори зона отрыва частиц жидкости, соответствующая фиксированному τ . В качестве начального приближения выбирается круг такого маленького радиуса, для которого нарушается динамическое условие в виде неравенства вблизи линии раздела краевых условий (формула (2.8)). Точка на смоченной поверхности тела, в которой левая часть неравенства (2.8) достигает отрицательного минимума, принимается за следующее приближение к величине $c_0(\tau)$ (в силу осевой симметрии можно считать, что точка меняется вдоль фиксированного радиус-вектора). Дальше процесс повторяется. Каждый следующий шаг итерационного процесса приводит к уменьшению зоны отрицательных значений данной функции. Процесс заканчивается,

когда эта зона полностью исчезает. Отметим, что линейные задачи, возникающие на каждом шаге итерационного процесса, решаются численно, с помощью метода конечных элементов, с применением пакета FreeFem++ [15]. Подробное изложение этого метода даётся в работах, посвящённых начальному этапу движения твёрдых тел в жидкости с учётом явления кавитации (см., например, [2]).

В таблице приведены численные значения величины $c_0(\tau)$, полученные двумя различными способами (c_{anal} — аналитическое решение, c_{num} — численное). Параметры задачи выбраны следующим образом: $\chi = 0$, $H = 3$. При численной реализации учитываются боковые цилиндрические стенки, которые предполагаются удалёнными от диска на расстояние, которое в 100 раз больше его радиуса. При $\tau = 0.3$ зона отрыва практически уже не видна (происходит схлопывание тонкой каверны).

Сравнение численных и аналитических результатов

| τ | c_{num} | c_{anal} |
|--------|------------------|-------------------|
| 0.1 | 0.933 | 0.937 |
| 0.2 | 0.720 | 0.722 |
| 0.25 | 0.513 | 0.515 |
| 0.29 | 0.171 | 0.172 |

На рис. 2 показана динамика круговой линии отрыва с учётом подъема внутренней свободной границы жидкости. Для наглядности расчёты выполнены при $\varepsilon = 1$. Отметим, что на основе формулы (3.7) можно получить простую оценку для поперечного размера каверны в главном асимптотическом приближении: $0 < \zeta(r, \tau) \leq \varepsilon^2 \tau$. Таким образом, возмущение внутренней свободной границы жидкости будет оставаться малой величиной в широком диапазоне изменения параметра ε (в рассмотренном примере это возмущение будет совсем небольшим даже при $\varepsilon = 1$). Также обратим внимание на то, что, зная $c_0(\tau)$, можно определить зависимость радиуса круговой линии отрыва от безразмерного времени t с помощью элементарного пересчёта ($t = \varepsilon \tau$, $0 < \varepsilon < 1$).



Рис. 2. Схлопывание каверны с учётом подъема внутренней свободной границы жидкости при $h = 3$; $\tau = 0.1, 0.2, 0.29$

Остановимся на определении времени схлопывания тонкой каверны τ_* , которое находится из условия $c_0(\tau_*) = 0$. Полагая в (3.6) $c = 0$ и используя (3.3), будем иметь:

$$\tau_* = (0.5\chi + H)^{-1}(1 - 0.5 \ln 2 H^{-1}).$$

В рассмотренном выше примере время схлопывания, полученное на основании прямого численного решения задачи со свободной границей (2.3)–(2.9), принадлежит промежутку $(0.29, 0.3)$. Время схлопывания, найденное с помощью асимптотической формулы, приближённо равно 0.295. Аналогичные исследования были проведены при различных других H (с сохранением значений остальных параметров задачи). Так, например, при $H = 2$, $H = 1$ получаем соответствующие численные интервалы $(0.41, 0.42)$, $(0.67, 0.68)$ и моменты $\tau_* = 0.413, 0.653$, определяемые по приведённой выше асимптотической формуле. На основании проведённого

сравнения можно сделать вывод о широком диапазоне применимости данной асимптотической формулы (даже при $H = 1$ погрешность составляет всего 4%).

Используя аналитическое решение, можно проанализировать работу специального итерационного метода и показать, что каждое следующее приближение определяется на основе решения трансцендентного уравнения. Действительно, пусть известно приближение c_n к радиусу круговой линии отрыва (в (2.3)–(2.7) вместо $c_0(\tau)$ пишем c_n). Тогда, при плавном увеличении r , $r > c_n$, левая часть неравенства (2.8) вначале убывает, достигает отрицательного минимума, а затем возрастает до положительных значений. Значение r , при котором достигается указанный минимум, как раз и соответствует следующему приближению для радиуса круговой линии отрыва. Дифференцируя формулу (3.5) по r (предварительно проведя в последних двух слагаемых интегрирование по частям), приравнявая эту производную нулю и полагая $r = c_{n+1}$, получим трансцендентное уравнение для определения следующего приближения. Если теперь n устремить к бесконечности, то в пределе получится уравнение для определения радиуса $c = c_0(\tau)$ круговой линии отрыва (формула (3.6)). Последнее обосновывается с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые проводились при определении зоны отрыва. Фактически нужно перейти к пределу в коэффициенте при главном члене асимптотики производной функции φ_1 по r (при $r \rightarrow c_n$), положив в этом коэффициенте $r = c_{n+1}$, и учесть, что c_n и c_{n+1} стремятся к одному пределу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована задача о кавитационном ударе круглого диска, герметично закрывающего дно бассейна, имеющего форму слоя. В случае медленных движений диска после удара найдено аналитическое решение задачи. Для определения радиуса круговой линии отрыва получено трансцендентное уравнение, которое решается совместно с интегральным уравнением Фредгольма второго рода. В случае большой толщины слоя решение интегрального уравнения представляется в простой аналитической форме и, таким образом, задача полностью сводится к решению трансцендентного уравнения. Обсуждаются разные подходы к определению неизвестной априори зоны отрыва частиц жидкости. Показывается, что радиус круговой линии отрыва можно определить с помощью условия Кутты — Жуковского, вариационного принципа Огазо, а также специальной системы неравенств, которые формулируются в зонах контакта и отрыва. Отмечается хорошее согласование аналитических результатов с прямыми численными расчётами. Также обсуждаются вопросы, связанные с работой специального итерационного метода, применяемого для решения задач со свободными границами, с определением формы каверны и корректностью полученного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. Норкин М.В. Движение прямоугольного цилиндра в жидкости после удара на малых временах с образованием каверны // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 2. С. 106–118; doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.208
3. Норкин М.В. Динамика точек отрыва при ударе плавающего кругового цилиндра // Прикл. механика и техн. физика. 2019. Т. 60, № 5. С. 19–27; doi.org/10.15372/PMTF20190503
4. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
5. Поляков Н.В., Гоман О.Г., Катан В.А. К вопросу об ударном взаимодействии тела и жидкости со свободной поверхностью при наличии отрыва // Докл. НАН Украины. 2016. № 8. С. 46–52; doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.046
6. Голиков А.Е., Макаренко Н.И. Гидродинамические нагрузки при разгоне цилиндра под свободной поверхностью // Прикл. механика и техн. физика. 2022. Т. 63, № 5. С. 89–99; DOI: 10.15372/PMTF20220509

7. *Reinhard M., Korobkin A.A., Cooker M.J.* Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration // *J. Engrg. Math.* 2016. V. 96, N 1. P. 155–174; doi.org/10.1007/s10665-015-9788-8
8. *Norkin M., Korobkin A.* The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder // *J. Engrg. Math.* 2011. V. 70. P. 239-254; doi.org/10.1007/s10665-010-9416-6
9. *Юдович В.И.* Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость // *Владикавказ. мат. журн.* 2005. Т. 7, № 3. С. 79–91; <http://mi.mathnet.ru/vmj168>
10. *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977.
11. *Вирченко Н.А.* Парные (тройные) интегральные уравнения. Киев: Выща школа, 1989.
12. *Mandal B.N., Mandal N.* *Advances in Dual Integral Equations.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 1999.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
14. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Удар круглого диска о жидкость конечной глубины // *Прикл. математика и механика.* 1957. Т. 21, № 4. С. 525–532.
15. *Жуков М.Ю., Ширяева Е.В.* Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008.

UDC 519.634

**ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM ON COLLAPSE
OF AN ATTACHED CAVITY AFTER CAVITATION IMPACT
OF A CIRCULAR DISK**

© 2023 M. V. Norkin

*Southern Federal University,
ul. Milchakov 8a, Rostov-on-Don 344090, Russia*

E-mail: norkinmi@mail.ru

Received 10.11.2021, revised 08.12.2021, accepted 12.01.2023

Abstract. We consider the axisymmetric problem of the vertical separation impact of a circular disk that hermetically closes the bottom of a pool in the form of a layer. After the impact, the disk moves along the gravity vector (outside the layer) at a constant speed. In this case, it is assumed that the disc slides along the solid cylindrical walls like a piston. A feature of this problem is that after the impact, an attached cavity is formed and a new internal free boundary of the fluid appears. It is required to study the process of collapse of the cavity at low velocities of the disk, which correspond to small Froude numbers. In the leading asymptotic approximation, a problem with one-sided constraints is formulated, on the basis of which the dynamics of the separation line is determined and the process of collapse of the cavity is described taking into account the rise of the internal free boundary of the liquid. Using the method of separating variables in cylindrical coordinates and the technique of paired integral equations, this problem is reduced to a coupled nonlinear problem that includes a transcendental equation for determining the radius of a circular separation line and a Fredholm integral equation of the second kind with a smooth kernel. A good agreement of analytical results obtained for a large layer thickness with direct numerical calculations is shown.

Keywords: ideal incompressible fluid, round disk, separation impact, analytical solution, dynamics of the separation line, collapse of the cavity, Froude number, cavitation number.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.111

REFERENCES

1. Sedov L.I. Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki [Two-dimensional problems of hydrodynamics and aerodynamics]. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
2. Norkin M.V. The movement of a rectangular cylinder in a liquid at short times after impact with formation of a cavity. *J. Appl. Indust. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 2, pp. 385–395; doi.org/10.1134/S1990478920020155
3. Norkin M.V. Dynamics of separation points upon impact of a floating circular cylinder. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2019, Vol. 60, No. 5, pp. 798–804; doi.org/10.1134/S0021894419050031
4. Lions J.L. Optimal'noe upravlenie sistemami, opisivaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi [Optimal control of systems described by partial differential equations]. Moscow: Mir, 1972 (in Russian).
5. Polyakov N.V., Goman O.G., Katan V.A. K voprosu ob udarnom vzaimodeistvii tela i zhidkosti so svobodnoi poverkhnost'yu pri nalichii otrывa [Impact interaction of a solid and a fluid with a free surface in the presence of separation]. *Dokl. Nats. Akad. Nauk Ukrainy*, 2016, No. 8, pp. 46–52 (in Russian); doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.046

6. Golikov A.E., Makarenko N.I. Gidrodinamicheskie nagruzki pri razgone tsilindra pod svobodnoi poverkhnost'yu [Hydrodynamic loads during cylinder acceleration under a free surface]. *Prikl. Mech. Tech. Phys.*, 2022, Vol. 63, No. 5, pp. 89–99 (in Russian); DOI: 10.15372/PMTF20220509
7. Reinhard M., Korobkin A.A., Cooker M.J. Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration. *J. Engrg. Math.*, 2016, Vol. 96, No. 1, pp. 155–174; doi.org/10.1007/s10665-015-9788-8
8. Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder. *J. Engrg. Math.*, 2011, Vol. 70, pp. 239–254; doi.org/10.1007/s10665-010-9416-6
9. Yudovoch V.I. Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость [One-valued solvability of a problem of a solid body impact on a inhomogeneous liquid]. *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2005, Vol. 7, No. 3, pp. 79–91 (in Russian); <http://mi.mathnet.ru/vmj168>
10. Uflyand Ya.S. Metod parnykh uravnenii v zadachakh matematicheskoi fiziki [Method of pair equations in problems of mathematical physics]. Leningrad: Nauka, 1977 (in Russian).
11. Virchenko N.A. Parnye (troinye) integral'nye uravneniya [Double (triple) integral equations]. Kiev: Vyscha Shkola, 1989 (in Russian).
12. Mandal B.N., Mandal N. *Advances in Dual Integral Equations*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 1999.
13. Bateman H., Erdelyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii [Higher transcendental functions]*. Vol. 2. Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).
14. Vorovich I.I., Yudovich V.I. Udar kruglogo diska o zhidkost' konechnoi glubiny [Impact round disc of finite depth fluid]. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1957, Vol. 21, No. 4, pp. 525–532 (in Russian).
15. Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. Ispol'zovanie paketa konechnykh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii [Application of software package of finite elements Freefem++ for problems of hydrodynamics, electrophoresis, and biology]. Rostov-on-Don: Izd. Yuzhn. Federal. Univ., 2008 (in Russian).