УДК 517.968

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2023 В. Г. Романов[1a]**, Т. В. Бугуева**[1,2b]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2]*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]romanov@math.nsc.ru, [b]bugueva@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 31.10.2022 г.; после доработки 02.11.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Для волнового уравнения, содержащего нелинейность в виде полинома n-го порядка, изучается задача об определении коэффициентов полинома, зависящих от переменной $x \in \mathbb{R}^3$. Рассматриваются плоские волны с резким фронтом, распространяющиеся в однородной среде в направлении единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$ и падающие на неоднородность, локализованную внутри некоторого шара $B(R)$. Предполагается, что решения задач могут быть измерены в точках границы этого шара в моменты времени, близкие к приходу фронта волны для всевозможных значений вектора $\boldsymbol{\nu}$. Показывается, что решение обратной задачи сводится к серии задач рентгеновской томографии.

Ключевые слова: полулинейное волновое уравнение, обратная задача, плоские волны, рентгеновская томография, единственность.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.113

В последние годы появилось много работ, изучающих обратные задачи для нелинейных гиперболических уравнений. В работах [1–8] рассмотрены различные постановки обратных задач, связанных с определением метрики Лоренца или коэффициентов, входящих в эти уравнения. Так, в работе [1] изучаются обратные задачи для нелинейных гиперболических уравнений на глобально гиперболическом лоренцевом многообразии (M, g), в частности, в ней показано, что семейство наборов наблюдений, соответствующее точечным источникам, однозначно определяет конформный тип неизвестного открытого, относительно компактного множества $W \subset M$. В [2] на лоренцевом многообразии рассматриваются нелинейные обратные задачи для волнового уравнения с оператором Лапласа–Бельтрами. В [3] изучаются обратные задачи для гиперболических уравнений и систем, основанные на фокусировке волн. В работе [4] для полулинейных волновых уравнений на лоренцевых многообразиях с нелинейностью вида квадратичной производной изучается обратная задача определения фоновой лоренцевой метрики. В [5] на времени-ориентированном лоренцевом многообразии $(M; g)$ с непустой границей, удовлетворяющей предположению выпуклости, показано, что топологические, дифференцируемые и конформные структуры соответствующих подмножеств $S \subset M$ источников однозначно определяются по результатам измерений пересечений будущих световых конусов из точки S с фиксированным открытым подмножеством границы M. В работе [6] показывается, что сингулярности образуются после взаимодействия трёх поперечных полулинейных конормальных волн. В [7] рассматривается обратная краевая задача для нелинейного уравнения упругой волны; показывается, что все параметры, фигурирующие в уравнении, могут быть однозначно определены из граничных измерений при определённых геометрических предположениях.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

В [8] на лоренцевом многообразии $(M; g)$ с времени-подобной границей рассматривается полулинейное волновое уравнение и изучается восстановления метрики g и коэффициента a при нелинейности четвёртой степени. В работе [9] для полулинейного волнового уравнения исследуется обратная задача восстановления коэффициента $\alpha(x)$ при гладкой нелинейности $|u|^m$ при чётном целом m. В [10] в двумерном и трёхмерном пространствах исследуется обратная задача восстановления коэффициента полулинейного волнового уравнения при кубической нединейности и показывается, что с помощью преобразования Радона можно восстановить неизвестный коэффициент. В работе [11] рассматривается задача об определении коэффициента в полулинейном волновом уравнении при квадратичной нелинейности, а в работе [12] — при более общей нелинейности вида u^γ, $\gamma > 1$. При этом используется разложение решения прямой задачи по особенностям в окрестности фронта волны. В работе [13] для полулинейного волнового уравнения изучается задача об определении гладкой функции $f(x, u)$, финитной по x, по некоторой информации о решениях задач Коши для дифференциального уравнения. Показывается, что решение этой задачи сводится к серии задач рентгеновской томографии.

В настоящей работе мы используем результаты работы [13] для исследования задачи об определении коэффициентов волнового уравнения с полиномиальной нелинейностью. В рассматриваемой задаче определяются все коэффициенты полинома, зависящие от переменной $x \in \mathbb{R}^3$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{gathered} u_{tt} - \Delta u - \sum_{k=1}^{n} q_k(x) u^k = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^4, \\ u|_{t<0} = g(t - R - x \cdot \boldsymbol{\nu}), \end{gathered} \tag{1}$$

в которой $q_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, — непрерывные финитные функции переменной $x \in \mathbb{R}^3$, носители которых содержатся внутри шара $B(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R\}$, $R > 0$, а $g(t)$ является при $t = 0$ разрывной функцией, $g(+0) = \alpha > 0$ и $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Дополнительно предположим, что структура функции $g(t)$ такова: $g(t) = \alpha > 0$ для значений $t \in [0, \eta]$, где $\eta > 0$, а при $t > \eta$ произвольна (в частности, может быть $g(t) = 0$ при $t > \eta$). Параметр α может меняться, пробегая некоторое множество значений. В уравнении (1) $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — вектор, принадлежащий единичной сфере $\mathbb{S}^2$. Уравнение $u = g(t + t_0 - x \cdot \boldsymbol{\nu})$ описывает в однородном пространстве (т. е. при всех $q_k(x) \equiv 0$) плоскую волну, бегущую в направлении вектора $\boldsymbol{\nu}$. В момент времени $t = 0$ фронт этой волны касается в точке $x = -R\boldsymbol{\nu}$ области $B(R)$, в которой сосредоточена неоднородность.

В поставленной выше задаче $\boldsymbol{\nu}$ и α играют роль параметров. Поэтому её решение обозначим через $u(x, t, \alpha, \boldsymbol{\nu})$. Иногда, для краткости записи, зависимость решения от $\boldsymbol{\nu}$ и α будет опускаться.

В дальнейшем нас будет интересовать задача об определении функций $q_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, по некоторой информации о решениях задачи (1). Как уже было сказано выше, мы будем предполагать, что коэффициенты $q_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, являются непрерывными функциями всюду в $\mathbb{R}^3$ и равными нулю вне шара $B(R)$. Дополнительно предположим, что они ограничены некоторой положительной постоянной Q:

$$|q_k(x)| \leqslant Q, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad k = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Обозначим $S_+(R, \boldsymbol{\nu}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R,\ x \cdot \boldsymbol{\nu} > 0\}$.

Обратная задача. Найти функции $q_k(x)$ в области $B(R)$ по следующей информации о решениях задачи (1):

$$\begin{gathered} u(x, t, \boldsymbol{\nu}, \alpha_m) = h_m(x, t, \boldsymbol{\nu}), \quad 0 < \alpha_m < 1/2, \\ \text{для всех} \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}^2, \quad x \in S_+(R, \boldsymbol{\nu}), \quad t \in (0, R + x \cdot \boldsymbol{\nu} + \varepsilon), \quad m = \overline{1,n}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $h_m(x,t,\boldsymbol{\nu})$ — заданные функции и $\varepsilon \in (0,\eta)$ — произвольное малое положительное число.

При исследовании этой задачи мы используем результаты работы [13] о существовании и единственности ограниченного решения задачи (1) в некоторой окрестности фронта $t = R + x\cdot\boldsymbol{\nu}$ бегущей волны. Введём обозначения, соответствующие работе [13]. Обозначим $f(x,u) := \sum\limits_{k=1}^{n} q_k(x)u^k$. При сделанных выше предположениях относительно функций $q_k(x)$ носитель функции $f(x,u)$ при любом фиксированном значении $u > 0$ содержится в шаре $B(R)$. Для функции $f(x,u)$ справедливы оценки

$$|f(x,u)| \leqslant f_0(u) = Qnu, \quad |f_u(x,u)| \leqslant Qn^2 =: M(n), \quad (x,u) \in B(R)\times[0,1]. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $\nu \in S^2$, $\alpha \in (0,1/2)$, а функции $q_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, и $g(t)$ удовлетворяют сделанным выше предположениям. Тогда вблизи характеристической поверхности $t = R + x\cdot\boldsymbol{\nu}$ существует единственное обобщённое решение задачи* (1) *и оно представимо в виде*

$$u(x,t,\boldsymbol{\nu},\alpha) = \alpha H(t - R - x\cdot\boldsymbol{\nu}) + [\beta(x,\boldsymbol{\nu},\alpha) + \bar{u}(x,t)]H_1(t - R - x\cdot\boldsymbol{\nu}), \tag{5}$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда: $H(t) = 1$ для $t \geqslant 0$ и $H(t) = 0$ для $t < 0$ и $H_1(t) = tH(t)$, а функция $\beta(x,\boldsymbol{\nu},\alpha)$ вычисляется по формуле

$$\beta(x,\boldsymbol{\nu},\alpha) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty f(x - s\boldsymbol{\nu},\alpha)\,ds. \tag{6}$$

Здесь ds — элемент евклидовой длины, а функция $\bar{u}(x,t)$ в (5) *является непрерывной по своим аргументам и бесконечно малой при $t \to R + x\cdot\nu + 0$.*

Доказательство. Пусть $F(u)$ — первообразная для функции $1/f_0(u) = 1/(Qnu)$, определённая формулой

$$F(u) = \int\limits_1^u \frac{dt}{Qnt} = \frac{1}{Qn}\ln u, \quad u \in (0,1).$$

Обозначим $G(\boldsymbol{\nu},\eta) = \{(x,t) \mid 0 \leqslant t - R - x\cdot\boldsymbol{\nu} \leqslant \eta\}$ и положим

$$\eta \in R(0,(F(2\alpha) - F(\alpha))) = (0,\ln 2)R/(Qn).$$

Напомним, что мы предположили, что $g(t) = \alpha$ для $t \in [0,\eta]$ и $\alpha \in (0,1/2)$.

В однородной среде (т. е. при $f(x,u) \equiv 0$) решение задачи (1) имеет вид $u(x,t) = g(t - R - x\cdot\boldsymbol{\nu})$. Так как $g(t) = 0$ для $t < 0$, то решение задачи (1) равно нулю при $t < R + x\cdot\boldsymbol{\nu}$. Этим объясняется появление функции Хевисайда в формуле (5). Из формулы Кирхгофа для неоднородного волнового уравнения следует, что решение задачи (1) удовлетворяет в области $G(\boldsymbol{\nu},\eta)$ интегральному уравнению

$$u(x,t) = \alpha + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\xi - x| + \xi\cdot\boldsymbol{\nu} + R \leqslant t} \frac{f(\xi, u(\xi, t - |\xi - x|))}{|\xi - x|}\,d\xi, \quad (x,t) \in G(\boldsymbol{\nu},\eta). \tag{7}$$

В формуле (7) область интегрирования представляет собой внутренность парабалоида

$$P(x,t,\boldsymbol{\nu}) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 | \,\xi\cdot\boldsymbol{\nu} + |\xi - x| + R = t\}.$$

При $t \to R + x\cdot\boldsymbol{\nu} + 0$ этот параболоид стягивается к лучу $L(x,\boldsymbol{\nu}) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 | \,\xi = x - s\boldsymbol{\nu}, s \geqslant 0\}$.

Для решения уравнения (7) в области $G(\boldsymbol{\nu},\eta)$ верна теорема 1 из [13], которая по формулировке совпадает с приведённой выше, причём для решения задачи (1) справедливо неравенство (см. неравенство (18) из работы [13]):

$$0 < u(x,t) \leqslant 2\alpha < 1, \ (x,t) \in G(\boldsymbol{\nu},\eta). \tag{8}$$

Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *и в обратной задаче* $\alpha_m \in (0, 1/2)$, $m = \overline{1,n}$, *и, кроме того,* $\alpha_m \neq \alpha_k$, *если* $m \neq k$. *Тогда информация* (3) *однозначно определяет интегралы*

$$\int_0^\infty q_k(x - s\boldsymbol{\nu})ds = w_k(x, \boldsymbol{\nu}), \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}^2, \quad x \in S_+(R, \boldsymbol{\nu}), \quad k = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 формулы (3), (6) приводят к равенствам

$$\begin{gathered}\int_0^\infty f(x - s \cdot \boldsymbol{\nu}, \alpha_m)\, ds = \sum_{k=1}^n \alpha_m^k \int_0^\infty q_k(x - s \cdot \boldsymbol{\nu})\, ds = 2\beta(x, \boldsymbol{\nu}, \alpha_m) =: \gamma(x, \boldsymbol{\nu}, \alpha_m), \\ m = \overline{1,n},\end{gathered} \tag{10}$$

в которых функции $\gamma_m(x, \boldsymbol{\nu})$ вычисляются по формуле

$$\gamma_m(x, \boldsymbol{\nu}) = 2 \lim_{t \to R + x \cdot \boldsymbol{\nu} + 0} \frac{\partial h_m}{\partial t}(x, t, \boldsymbol{\nu}) = 2 \frac{\partial h_m}{\partial t}(x, R + x \cdot \boldsymbol{\nu} + 0, \boldsymbol{\nu}).$$

Равенства (10) представляют собой систему линейных уравнений относительно интегралов от функций $q_k(x)$, $k = \overline{1,n}$. Определителем этой системы является определитель Вандермонда, который в силу условия теоремы 2 ($\alpha_m \neq \alpha_k$ при $m \neq k$) отличен от нуля. Решая систему (10), находим

$$\int_0^\infty q_k(x - s\boldsymbol{\nu})\, ds = w_k(x, \boldsymbol{\nu}), \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}^2, \quad x \in S_+(R, \boldsymbol{\nu}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Теорема 2 доказана. □

Таким образом, обратная задача сводится к решению n интегральных уравнений (9). Каждое из них представляет собой задачу рентгеновской томографии (см., например, [14]). В самом деле, уравнение (9) означает, что для любого вектора $\boldsymbol{\nu}$ и любой точки x, принадлежащей полусфере $S^+(R, \boldsymbol{\nu})$, известен интеграл от функции $q_k(x)$ по лучу $L(x, \boldsymbol{\nu})$. С учётом того, что функция $q_k(x)$ равна нулю вне шара $B(R)$, получаем, что от $q_k(x)$ заданы интегралы по всевозможным прямым. Таким образом, надо найти функцию $q_k(x)$ через известные от неё интегралы по всем прямым. Это и есть задача рентгеновской томографии. Известно, что решение этой задачи единственно [14]. В связи с этим верна следующая теорема единственности.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда обратная задача может иметь только одно решение.*

Существует большое множество алгоритмом и программ, позволяющих успешно решать задачу томографии (см., например, [14–28]).

Замечание. Теорема единственности обратной задачи остаётся верной, если данные (3) заданы не для всех единичных векторов $\boldsymbol{\nu}$, а лишь для сравнительно небольшого множества. Достаточно, например, предположить, что вектор $\boldsymbol{\nu}$ пробегает множество значений $\mathbb{S}^2(\boldsymbol{\nu}_0, \delta) = \{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}^2 \mid |\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_0| < \delta\}$, где $\boldsymbol{\nu}_0 \in \mathbb{S}^2$ и $\delta > 0$ (см., даже более сильное утверждение в работе [28]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G.* Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations // Invent. Math. 2018. V. 212. P.781–857; arXiv:1405.3386v4 [math.DG] 20 Sep 2017

2. *Lassas M., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds // Commun. Math. Phys. 2018. V. 360. P. 555–609; arXiv:1606.06261v1 [math.AP] 20 Jun 2016
3. *Lassas M.* Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations // Proc. Internat. Congress Math. 2018. V. 3. P. 3739–3760.
4. *Wang Y., Zhou T.* Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // Commun. Partial Differ. Equ. 2019. V. 44, N 11. P. 1140–1158.
5. *Hintz P., Uhlmann G.* Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets // Internat. Math. Res. Notices. 2019. V. 22. P. 6949–6987; arXiv:1705.01215v2 [math.DG] 27 May 2020
6. *Barreto A.S.* Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions // Inverse Probl. Imaging. 2020. V. 14, N 6. P. 1057–1105; arXiv:2001.11061v1 [math.AP] 29 Jan 2020
7. *Uhlmann G., Zhai J.* On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation // J. Math. Pures Appl. 2021. V. 153. P. 114–136.
8. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation; arXiv:2107.08513v1 [math.AP] 18 Jul 2021
9. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai l J.* The Dirichlet-to-Neumann map for a semilinear wavevequation on Lorentzian manifolds; arXiv:2103.08110v1 [math.AP] 15 Mar 2021
10. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly non-linear regime // Commun. Math. Phys. 2022. V. 392. P. 25–53; DOI: https://doi.org/10.1007/s00220-022-04359-0
11. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Обратная задача для нелинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 2. С. 83–100.
12. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 3. С. 154–169.
13. *Романов В.Г.* Обратная задача для полулинейного волнового уравнения // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022, Т. 504, № 1. С. 36–41.
14. *Natterer F.* The Mathematics of Computerized Tomography. N. Y.: J. Wiley & Sons, 1986.
15. *Davison M.E.* A singular value decomposition for the Radon transform in n-dimensional Euclidean space // Numer. Funct. Anal. Optimiz. 1981. V. 3. P. 321–340.
16. *Пикалов В.В., Преображенский Н.Г.* Вычислительная томография и физический эксперимент // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141, N 3. С. 469–498.
17. *Deans S.R.* The Radon Transform and Some of Its Applications. N. Y.: J. Wiley & Sons, 1983.
18. *Louis A.K.* Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15, N 3. P. 621–633.
19. *Louis A.K.* Incomplete data problems in x-ray computerized tomography // Numer. Math. 1986. V. 48, N 3. P. 251–262; https://doi.org/10.1007/BF01389474
20. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987.
21. *Michette A.G., Buckley C.J.* X-Ray Science and Technology. N. J.: Taylor & Francis, 1993.
22. *Бойко В.М., Оришич А.М., Павлов А.А., Пикалов В.В.* Методы оптической диагностики в аэрофизическом эксперименте. Новосибирск: изд. НГУ, 2009.
23. *Derevtsov E.Yu., Efimov A.V., Louis A.K., Schuster T.* Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 19, N 4–5. P. 689–715; DOI: 10.1515/jiip.2011.047
24. *Аниконов Д.С., Назаров В.Г., Прохоров И.В.* Интегродифференциальный индикатор для задачи однаракурсной томографии // Сиб. журн. индустр. матем. 2014. Т. 17, № 2. С. 3–10.
25. *Liu R., Yu H., Yu H.* Singular value decomposition-based 2D image reconstruction for computed tomography // J. XRay Sci. Technol. 2016. V. 25, N 1. P. 1–22; DOI: 10.3233/XST-16173
26. *Borg L., Frikel J., Orgensen J.S., Quinto E.T.* Analyzing reconstruction artifacts from arbitrary incomplete X-ray CT data; arXiv:1707.03055v4 [math.FA] 26 Jun 2018

27. *Xu Y., Yu H., Sushmit A., Lyu Q., Wang G., Li Y., CAO X., Maltz J.S.* Cardiac CT motion artifact grading via semi-automatic labeling and vessel tracking using synthetic image-augmented training data // J. XRay Sci. Technol. 2022. V. 30, N 3. P. 433–445; DOI: 10.3233/XST-211109

28. *Шарафутдинов В.А.* Об определении оптическогол тела, расположенного в однородной среде, по его изображениям // Математические методы для решения прямых и обратных задач геофизики. Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1981. С. 123–148.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.968

INVERSE PROBLEM FOR WAVE EQUATION WITH POLYNOMIAL NONLINEARITY

© 2023 **V. G. Romanov**[1a], **T. V. Bugueva**[1,2b]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,*
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,
[2]*Novosibirsk State University,*
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]romanov@math.nsc.ru, [b]bugueva@math.nsc.ru

Received 31.10.2022, revised 02.11.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. For a wave equation containing nonlinearity in the form of a n-th order polynomial, the problem of determining the coefficients of the polynomial depending on the variable $x \in \mathbb{R}^3$ is studied. Plane waves propagating with a sharp front in a homogeneous medium in the direction of a unit vector $\boldsymbol{\nu}$ and falling on inhomogeneity localized inside some ball $B(R)$ are considered. It is assumed that the solutions of forward problems for all possible ν can be measured at points of the boundary of this ball at time close to the arrival of the wave front. It is shown that the solution of the inverse problem is reduced to a series of X-ray tomography problems.

Keywords: semilinear wave equation, inverse problem, plane waves, X-ray tomography, uniqueness.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.113

REFERENCES

1. Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G. Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations. *Invent. Math.*, 2018, Vol. 212, pp.781–857; arXiv:1405.3386v4 [math.DG] 20 Sep 2017
2. Lassas M., Uhlmann G., Wang Y. Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds. *Commun. Math. Phys.*, 2018, Vol. 360, pp. 555–609; arXiv:1606.06261v1 [math.AP] 20 Jun 2016
3. Lassas M. Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations. *Proc. Internat. Congress Math.*, 2018, Vol. 3, pp. 3739–3760.
4. Wang Y., Zhou T. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 2019, Vol. 44, No. 11, pp. 1140–1158.
5. Hintz P., Uhlmann G. Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets. *Internat. Math. Res. Notices*, 2019, Vol. 22, pp. 6949–6987; arXiv:1705.01215v2 [math.DG] 27 May 2020
6. Barreto A.S. Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions. *Inverse Probl. Imaging*, 2020, Vol. 14, No. 6, pp. 1057–1105; arXiv:2001.11061v1 [math.AP] 29 Jan 2020
7. Uhlmann G., Zhai J. On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation. *J. Math. Pures Appl.*, 2021, Vol. 153, pp. 114–136.
8. Barreto A.S., Stefanov P. Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation; arXiv:2107.08513v1 [math.AP] 18 Jul 2021
9. Hintz P., Uhlmann G., Zhai l J. The Dirichlet-to-Neumann map for a semilinear wavevequation on Lorentzian manifold; arXiv:2103.08110v1 [math.AP] 15 Mar 2021

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

10. Barreto A.S., Stefanov P. Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly non-linear regime. *Commun. Math. Phys.*, 2022, Vol. 392, pp. 25–53;
DOI: https://doi.org/10.1007/s00220-022-04359-0
11. Romanov V. G., Bugueva T. V. Inverse problem for a nonlinear wave equation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2022, Vol. 16, No. 2, pp. 333–348.
12. Romanov V. G., Bugueva T. V. The problem of determining the coefficient of the nonlinear term in a quasilinear wave equation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2022, Vol. 16, No. 3, pp. 550–562.
13. Romanov V. G. An inverse problem for a semilinear wave equation. Doklady Math., 2022, Vol. 105, No. 3, pp. 166–170.
14. Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. N. Y.: Wiley & Sons, 1986.
15. Davison M.E. A singular value decomposition for the Radon transform in n-dimensional Euclidean space. *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, 1981, Vol. 3, pp. 321–340.
16. Pikalov V.V., Preobrazhenskii N.G. Вычислительная томография и физический эксперимент [Computational tomography and physical experiment]. *Uspekhi Fiz. Nauk*, 1983, Vol. 141, No. 3, pp. 469–498 (in Russian).
17. Deans S.R. The Radon Transform and Some of Its Applications. N. Y.: J. Wiley & Sons, 1983.
18. Louis A.K. Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform. *SIAM J. Math. Anal.*, 1984, Vol. 15, No. 3, pp. 621–633.
19. Louis A.K. Incomplete data problems in x-ray computerized tomography. *Numer. Math.*, 1986, Vol. 48, No. 3, pp. 251–262; https://doi.org/10.1007/BF01389474
20. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya., Timonov A.A. Matematicheskie zadachi komp'yuternoi tomografii [Mathematical problems of computed tomography]. Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
21. Michette A.G., Buckley C.J. X-Ray Science and Technology. N. J.: Taylor & Francis, 1993.
22. Boyko V.M., Orishich A.M., Pavlov A.A., Pikalov V.V. Методы оптической диагностики в аэрофизическом эксперименте [Methods of optical diagnostics in an aerophysical experiment]. Novosibirsk: izd. NSU, 2009 (in Russian).
23. Derevtsov E.Yu., Efimov A.V., Louis A.K., Schuster T. Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2011, Vol. 19, No. 4–5, pp. 689–715; DOI: 10.1515/jiip.2011.047
24. Anikonov D.S., Nazarov V.G., Prokhorov I.V. Integrodifferentsial'nyi indikator dlya zadachi odnorakursnoi tomografii [Integro-differential indicator for the problem of single-angle tomography]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2014, Vol. 17, No. 2, pp. 3–10 (in Russian).
25. Liu R., Yu H., Yu H. Singular value decomposition-based 2D image reconstruction for computed tomography. *J. XRay Sci. Technol.*, 2016, Vol. 25, No. 1, pp. 1–22; DOI: 10.3233/XST-16173
26. Borg L., Frikel J., Orgensen J.S., Quinto E.T. Analyzing reconstruction artifacts from arbitrary incomplete X-ray CT data; arXiv:1707.03055v4 [math.FA] 26 Jun 2018
27. Xu Y., Yu H., Sushmit A., Lyu Q., Wang G., Li Y., CAO X., Maltz J.S. Cardiac CT motion artifact grading via semi-automatic labeling and vessel tracking using synthetic image-augmented training data. *J. XRay Sci. Technol.*, 2022, Vol. 30, No. 3, pp. 433–445; DOI: 10.3233/XST-211109
28. Sharafutdinov V.A. Ob opredelenii opticheskogol tela, raspolozhennogo v odnorodnoi srede, po ego izobrazheniyam [On the determination of an optical body located in a homogeneous medium from its images]. Matematicheskie metody dlya resheniya pryamykh i obratnykh zadach geofiziki [Mathematical methods for solving direct and inverse problems of geophysics]. Novosibirsk: izd. VTs SO AN SSSR, 1981, pp. 123–148 (in Russian).