СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2023. Т. 26, № 1. С. 161–178

УДК 517.983:514.8

РАЗЛОЖЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ В $\mathbb{R}^3$

И. Е. Светов[a], **А. П. Полякова**[b]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]svetovie@math.nsc.ru, [b]apolyakova@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 19.05.2022 г.; после доработки 04.10.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Введены обобщения оператора ротора, действующие на трёхмерные симметричные m-тензорные поля, и установлены их свойства. Для пространств трёхмерных тензорных полей получены новые детальные разложения, каждое слагаемое в которых строится с использованием одной функции. Такого рода разложения играют важную роль, в частности при исследовании томографических интегральных операторов, действующих на симметричные m-тензорные поля, $m \geqslant 1$, и построении алгоритмов для решения возникающих обратных задач.

Ключевые слова: разложение симметричного тензорного поля, соленоидальное поле, потенциальное поле, потенциал, оператор ротора, компьютерная томография, лучевое преобразование, преобразование Радона.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.115

ВВЕДЕНИЕ

Задачи реконструкции векторных характеристик сред по данным томографического типа были сформулированы во второй половине прошлого века при исследовании течений жидкости и газа, кровотока в крупных сосудах (доплеровская томография), океанических течений. К настоящему времени томографические исследования векторных или тензорных характеристик сред интенсивно развиваются, а области их приложений очень широки. Математические постановки, основные результаты и ссылки на них изложены, например, в работах [1–5]. Статьи [6–10] посвящены вопросам обращения экспоненциальных лучевых преобразований векторных полей, исследованию их свойств и описанию образов. Постановки задач тензорной томографии связаны с изучением анизотропных сред. Математические аспекты задачи исследованы в [11]. Хорошо известны ее приложения в магнито-фотоупругости [12, 13], изучении тензорных полей напряжений и остаточных напряжений [14, 15], дифракционной томографии деформаций [16], поляризационной томографии квантового излучения [17] и др. Отметим работу [18], в которой приведен обзор важных приложений тензорной томографии в физических науках и медицине.

Томографические интегральные операторы, действующие на симметричные тензорные поля валентности $m \geqslant 1$, обладают ненулевыми ядрами (см., например, [11]). В связи с этим исследование этих операторов и построение алгоритмов для решения томографических обратных задач существенным образом опираются на известные разложения пространств симметричных m-тензорных полей. Таким образом, получение новых и более детальных разложений тензорных полей является отдельной важной задачей. Особенную роль при этом играют

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-51-12008-ННИО_а).

разложения, в которых каждое слагаемое строится с использованием только одной функции (метод потенциалов). В первую очередь это даёт возможность получить формулы обращения операторов [4, 11, 19], действующих на m-тензорные поля, используя известные формулы обращения операторов, действующих на функции. Метод потенциалов для построения базисных полей применяется, например, при использовании метода наименьших квадратов и метода усечённого сингулярного разложения. В данной работе вводятся новые операторы, являющиеся обобщением оператора ротора и действующие на трёхмерные симметричные m-тензорные поля. Проведено исследование свойств этих операторов и получены новые детальные разложения симметричных тензорных полей в $\mathbb{R}^3$.

Структура работы следующая. В данном разделе приведены определения используемых пространств и дифференциальных операторов. Разд. 1 посвящён обзору ранее полученных результатов о разложении m-тензорных полей (подробнее см. [19]) и их использовании при решении задач тензорной томографии в $\mathbb{R}^2$. В разд. 2 даны определения двух интегральных операторов, действующих на тензорные поля в $\mathbb{R}^3$, и описаны проблемы, возникающие при исследовании их свойств и решении задач по их обращению. Разд. 1 и 2 дают мотивировку для получения новых и более детальных разложений трёхмерных тензорных полей. В разд. 3 изложен основной результат статьи.

Некоторые определения и обозначения даны для произвольной размерности пространства n, но использоваться будут только $n = 2, 3$.

Замечание 1. При томографических исследованиях изучаемый объект находится внутри томографа и зачастую он отделён от источников излучения и приёмников. Исходя из физического смысла, мы рассматриваем тензорные поля, имеющие ограниченный носитель D, такой, что его замыкание $\overline{D}$ содержится в единичном шаре

$$B = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} < 1\right\}$$

с границей ∂B, при этом считаем, что вне B поля тождественно равны нулю. Более того, исследуемые поля обладают необходимой гладкостью. Именно, потенциалы, поля и все необходимые производные непрерывны или могут иметь разрывы только первого рода. Ясно, что в качестве ограниченной области исследования может быть выбран не только единичный шар B.

Функции будем обозначать через $f(x)$, $g(x), \ldots$, а для потенциалов будем использовать обозначения $\phi(x)$, $\psi(x), \ldots$. Через $T^m(B)$ обозначается множество всех тензорных полей валентности m, компоненты которых определены в B. Через $S^m(B)$ обозначим подмножество множества $T^m(B)$, состоящее из симметричных тензорных полей валентности m, т. е. инвариантных относительно всех перестановок индексов. Для векторных и тензорных полей будем использовать обозначения $\mathbf{v}(x)$, $\mathbf{u}(x)$ и т. д., а для их компонент $v_i(x)$, $u_{ij}(x) = u_{ji}(x)$ и т. д. Скалярное произведение тензорных полей $\mathbf{v}(x)$ и $\mathbf{u}(x)$ в точке x определяется равенством

$$\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{u}(x)\rangle = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} v_{i_1\ldots i_m}(x) u_{i_1\ldots i_m}(x).$$

С использованием скалярного произведения будем записывать умножение симметричного m-тензорного поля $\mathbf{u}(x)$ m-кратно на постоянный вектор ξ:

$$\langle \mathbf{v}(x), \xi^m\rangle = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} v_{i_1\ldots i_m}(x)\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_m}.$$

Функциональное пространство $L_2(S^m(B))$ состоит из симметричных m-тензорных полей с интегрируемыми в квадрате компонентами, определёнными в B. Пространства Соболева для симметричных m-тензорных полей обозначим через $H^k(S^m(B))$. Через $H^k_0(S^m(B))$ обозначим пространство симметричных m-тензорных полей из $H^k(S^m(B))$, обращающихся в нуль на границе области вместе со всеми своими производными вплоть до $(k-1)$-го порядка.

Нам потребуются следующие дифференциальные операторы в $\mathbb{R}^n$:

Оператор ковариантного дифференцирования $\nabla\colon H^k(T^m(B)) \to H^{k-1}(T^{m+1}(B))$, действующий на тензорное поле $\mathbf{u} \in H^k(T^m(B))$ по формуле

$$(\nabla\mathbf{u})_{i_1\dots i_{m+1}}(x) = \frac{\partial u_{i_1\dots i_m}}{\partial x_{i_{m+1}}}(x).$$

Оператор симметризации $\sigma\colon H^k(T^m(B)) \to H^k(S^m(B))$ действует по правилу

$$(\sigma\mathbf{u})_{i_1\dots i_m}(x) = \frac{1}{m!}\sum_{\pi\in\Pi_m} u_{i_{\pi(1)}\dots i_{\pi(m)}}(x),$$

где суммирование производится по группе Π_m всех перестановок множества $\{1,\dots,m\}$.

Оператор внутреннего дифференцирования $\mathrm{d}\colon H^k(S^m(B)) \to H^{k-1}(S^{m+1}(B))$ определяется формулой $\mathrm{d}\mathbf{u}(x) = \sigma(\nabla\mathbf{u})(x)$ и действует, например, на функцию $\psi \in H^k(B)$ и векторное поле $\mathbf{v} \in H^k(S^1(B))$ по правилам

$$(\mathrm{d}\psi)_i(x) = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x), \quad (\mathrm{d}\mathbf{v})_{ij}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)\right).$$

Оператор дивергенции $\mathrm{div}\colon H^k(S^{m+1}(B)) \to H^{k-1}(S^m(B))$ действует на симметричное тензорное поле $\mathbf{w}$ по правилу

$$(\mathrm{div}\,\mathbf{w})_{i_1\dots i_m}(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial w_{i_1\dots i_m j}}{\partial x_j}(x).$$

Оператор ротора rot: $H^k(S^1(B)) \to H^{k-1}(S^1(B))$ действует на трёхмерное векторное поле $\mathbf{v}$ по формуле

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^T.$$

Хорошо известно [11], что в n-мерном пространстве симметричное m-тензорное поле $\mathbf{w} \in H^k(S^m(B))$ единственным образом представимо в виде суммы потенциального $\mathrm{d}\mathbf{u}$ и соленоидального ${}^s\mathbf{w}$ ($\mathrm{div}\,{}^s\mathbf{w} = 0$) полей:

$$\mathbf{w} = {}^s\mathbf{w} + \mathrm{d}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}|_{\partial B} = 0. \tag{1}$$

Любое трёхмерное векторное поле $\mathbf{u}$ соленоидально тогда и только тогда, когда существует векторное поле $\mathbf{v}$ такое, что $\mathbf{u} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ (см., например, [20]). Алгоритм построения потенциальных симметричных m-тензорных полей $\mathrm{d}\mathbf{u}$ следует из определения оператора d, в то время как вопрос о конструктивном алгоритме построения соленоидальных симметричных m-тензорных полей ${}^s\mathbf{w}$ в пространстве размерности $n > 2$ до настоящего времени оставался открытым.

1. О РАЗЛОЖЕНИИ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ В $\mathbb{R}^2$

Оператор $\perp$-ковариантного дифференцирования $\nabla^\perp\colon H^k(T^m(B)) \to H^{k-1}(T^{m+1}(B))$ действует на двумерное тензорное поле $\mathbf{u} \in H^k(T^m(B))$ по правилу

$$(\nabla^\perp\mathbf{u})_{i_1\dots i_{m+1}}(x) = (-1)^{i_{m+1}}\frac{\partial u_{i_1\dots i_m}}{\partial x_{3-i_{m+1}}}(x).$$

Оператор $\perp$-внутреннего дифференцирования $\mathrm{d}^\perp\colon H^k(T^m(B)) \to H^{k-1}(S^{m+1}(B))$, действующий на двумерные тензорные поля, определяется формулой

$$\mathrm{d}^\perp \mathbf{u}(x) = \sigma(\nabla^\perp \mathbf{u})(x).$$

Операторы d и $\mathrm{d}^\perp$ перестановочны, т. е. для любого симметричного m-тензорного поля $\mathbf{w} \in H^2(S^m(B))$ имеет место равенство $\mathrm{d}(\mathrm{d}^\perp \mathbf{w}) = \mathrm{d}^\perp(\mathrm{d}\mathbf{w})$. Следовательно, поле $\mathrm{d}^\perp(\mathrm{d}\mathbf{w})$ потенциальное. Поля вида $(\mathrm{d}^\perp)^m\psi$, $\psi \in H^{m+1}(B)$, соленоиданые.

Используя операторы d и $\mathrm{d}^\perp$, была получена более детальная версия разложения (1) в пространстве $\mathbb{R}^2$ [19]. Именно, для любого поля $\mathbf{w} \in H^{k-m}(S^m(B))$ существуют потенциальные $\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^m \in H^{k-m}(S^m(B))$ и соленоидальное $\mathbf{v} \in H^{k-m}(S^m(B))$ симметричные m-тензорные поля, $k \geqslant m$, и порождающие их потенциалы $\psi^0, \ldots, \psi^m \in H^k(B)$ такие, что

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{u}^j \equiv (\mathrm{d}^\perp)^m \psi^0 + \sum_{j=1}^{m} \mathrm{d}^j (\mathrm{d}^\perp)^{m-j} \psi^j. \tag{2}$$

Данное разложение будет единственным при наложении граничных условий на потенциалы, согласующихся с условиями в разложении (1). Здесь и далее верхние индексы используются для нумерации тензорных полей и потенциалов. Исходя из физического смысла (см. замечание 1), в приложении этого разложения к задачам компьютерной томографии на потенциалы можно наложить условие $\psi^0, \ldots, \psi^m \in H^k(B) \cap H_0^m(B)$.

Разложение (2) позволило описать ядра и образы лучевых преобразований, действующих на симметричные m-тензорные поля в $\mathbb{R}^2$, и установить их связь с преобразованием Радона. Отметим, что эта связь даёт способ построения формул обращения лучевых преобразований с использованием формул обращения для преобразования Радона. Полученные теоретические результаты легли в основу дальнейших исследований операторов лучевых преобразований и алгоритмов по численному решению задачи восстановления тензорных полей на плоскости по известным значениям лучевых преобразований (задача тензорной томографии).

1. Построены и численно реализованы алгоритмы решения задачи тензорной томографии, основанные на методе наименьших квадратов, с использованием полиномов [21, 22] и B-сплайнов [9, 23] для построения базисных полей.

2. Построены сингулярные разложения операторов лучевых преобразований, действующих на векторные [24] и симметричные 2-тензорные поля [25]. Построены и численно реализованы алгоритмы, основанные на методе усечённого сингулярного разложения, для восстановления векторных [24] и 2-тензорных полей [26].

3. Построены и численно реализованы алгоритмы, основанные на методе приближённого обращения, для восстановления векторных и 2-тензорных [27] и m-тензорных полей [28].

Таким образом, важность детальных разложений тензорных полей, каждое слагаемое в которых строится с использованием одной функции, не вызывает сомнений.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ В $\mathbb{R}^3$

Напомним определения и свойства важных томографических операторов, действующих на трёхмерные симметричные m-тензорные поля. Пусть единичный вектор ξ задаёт направление прямой, $x \in \mathbb{R}^3$ — точка, $\langle x, \xi \rangle = 0$ и $\mathbf{w}(x)$ — симметричное m-тензорное поле в $\mathbb{R}^3$. Тогда оператор лучевого преобразования действует на $\mathbf{w}(x)$ по формуле

$$[\mathcal{P}_m \mathbf{w}](\xi, x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \langle \mathbf{w}(x + t\xi), \xi^m \rangle \, dt.$$

Пусть $\mathbf{w} = {}^s\mathbf{w} + \mathrm{d}\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\big|_{\partial B} = 0$. Лучевое преобразование потенциального поля $\mathrm{d}\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\big|_{\partial B} = 0$, тождественно равно нулю [11], т. е. имеет место равенство $[\mathcal{P}_m\mathbf{w}] = [\mathcal{P}_m\, {}^s\mathbf{w}]$. Поэтому по известным значениям лучевого преобразования $[\mathcal{P}_m\mathbf{w}]$ можно восстановить лишь соленоидальную часть ${}^s\mathbf{w}$ поля $\mathbf{w}$. Для разработки алгоритмов восстановления соленоидальной части трёхмерных симметричных m-тензорных полей, основанных на таких мощных подходах, как метод наименьших квадратов, метод усечённого сингулярного разложения, метод приближённого обращения и др., важно знать формулы для построения соленоидальных m-тензорных полей.

Плоскость $P_{\xi,s}$ в $\mathbb{R}^3$ задаётся нормальным уравнением $\langle \xi, x\rangle - s = 0$ для точек $x \in \mathbb{R}^3$. Здесь $|s|$ — расстояние от плоскости до начала координат, а ξ — нормальный вектор плоскости, $|\xi| = 1$. Преобразование Радона функции $f(x)$ задаётся формулой

$$[\mathcal{R}f](s,\xi) = \int\limits_{P_{\xi,s}} f(x)\, dx.$$

Нормальное преобразование Радона симметричного m-тензорного поля $\mathbf{u}(x)$ определяется формулой

$$\big[\mathcal{R}_m^{\perp}\mathbf{u}\big](s,\xi) = \int\limits_{P_{\xi,s}} \langle \mathbf{u}(x), \xi^m\rangle\, dx.$$

В отличие от преобразования Радона нормальные преобразования Радона векторных ($m = 1$) и симметричных 2-тензорных ($m = 2$) полей обладают ненулевыми ядрами. Соленоидальные векторные поля $\operatorname{rot}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in H_0^1(S^1(B))$, лежат в ядре нормального преобразования Радона: $\big[\mathcal{R}_1^{\perp} \operatorname{rot}\mathbf{u}\big](s,\xi) = 0$. Соленоидальные симметричные 2-тензорные поля $\mathbf{w}$, для компонент которых выполнено $(w_{1i}, w_{2i}, w_{3i})^T = \operatorname{rot}\mathbf{u}^i$, $\mathbf{u}^i \in H_0^1(S^1(B))$, $i = 1,2,3$, и потенциальные поля вида $\mathrm{d}(\operatorname{rot}\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in H_0^1(S^1(B))$, лежат в ядре нормального преобразования Радона, т. е. имеют место равенства $\big[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathbf{w}\big](s,\xi) = 0$ и $\big[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathrm{d}(\operatorname{rot}\mathbf{u})\big](s,\xi) = 0$. Таким образом, по известным значениям нормального преобразования Радона векторного поля можно восстановить лишь его потенциальную часть $\mathrm{d}\phi$, $\phi \in H^1(B)$, а по известному нормальному преобразованию Радона симметричного 2-тензорного поля можно надеяться восстановить только потенциальную часть вида $\mathrm{d}^2\phi$, $\phi \in H^2(B)$. (Детали см. в работах [29–31], посвящённых исследованию свойств нормального преобразования Радона трёхмерных векторных и 2-тензорных полей и разработке алгоритмов его обращения.)

Есть основания предполагать, что по известному нормальному преобразованию Радона $\big[\mathcal{R}_m^{\perp}\mathbf{v}\big]$ симметричного m-тензорного поля $\mathbf{v}$ можно восстановить лишь его потенциальную часть вида $\mathrm{d}^m\phi$, $\phi \in H^m(B)$, в то время как потенциальные поля других типов и соленоидальные поля лежат в его ядре. Отсутствие представлений этих полей тормозит исследование ядра нормального преобразования Радона $\mathcal{R}_m^{\perp}$ при $m > 2$ и, следовательно, разработку численных подходов по восстановлению симметричных m-тензорных полей по известным значениям нормального преобразования Радона.

3. РАЗЛОЖЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ В $\mathbb{R}^3$

3.1. Векторные поля в $\mathbb{R}^3$

Используя оператор rot, разложение (1) для трёхмерного векторного поля $\mathbf{w} \in H^k(S^1(B))$ можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{w} = \operatorname{rot}\mathbf{v} + \mathrm{d}\psi, \quad \psi\big|_{\partial B} = 0. \tag{3}$$

Необходимо отметить, что единственность понимается в смысле слагаемых в сумме (3), в то время как векторное поле $\mathbf{v}$ определяется не единственным образом, так как для любого

$\phi \in H^2(B)$ имеет место равенство $\operatorname{rot}(\mathrm{d}\phi) = 0$. Отметим работы [20, 32–35], посвящённые исследованию пространства трёхмерных векторных полей и построению разложений для них. Упомянем работы [36, 37], посвящённые исследованию разложения соленоидального векторного поля $\mathbf{v}$ на тороидальную $\mathbf{t}$ и полоидальную $\mathbf{p}$ части:

$$\mathbf{v} = \mathbf{t} + \mathbf{p} = \operatorname{rot}(x_1 t, x_2 t, x_3 t)^T + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(x_1 p, x_2 p, x_3 p)^T,$$

где $t(x)$ и $p(x)$ — некоторые функции.

Введём операторы $\operatorname{rot}_i\colon H^k(B) \to H^{k-1}(S^1(B))$, $i = 1, 2, 3$, действующие на потенциал $\varphi \in H^k(B)$ по формулам

$$\operatorname{rot}_1 \varphi = \operatorname{rot}(\varphi, 0, 0)^T = \left(0, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^T, \quad \operatorname{rot}_2 \varphi = \operatorname{rot}(0, \varphi, 0)^T = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, 0, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^T,$$
$$\operatorname{rot}_3 \varphi = \operatorname{rot}(0, 0, \varphi)^T = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, 0\right)^T.$$

Общие формулы для компонент векторного поля $\operatorname{rot}_i \varphi$ следующие:

$$(\operatorname{rot}_i \varphi)_i = 0, \quad (\operatorname{rot}_i \varphi)_{i+1} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i+2}}, \quad (\operatorname{rot}_i \varphi)_{i+2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i+1}}.$$

Здесь и далее индексы для операторов, компонент полей и переменных определены по модулю 3, т. е., например, при $i = 2$ имеем $i + 1 = 3$ и $i + 2 = 1$.

Для векторного поля $\mathbf{v}$ с компонентами $v_i = \psi^i$, $i = 1, 2, 3$, имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \operatorname{rot}_i \psi^i.$$

Поэтому, используя операторы rot_i, $i = 1, 2, 3$, разложение (3) для векторного поля $\mathbf{w} \in H^k(S^1(B))$ можно переписать в виде

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3} \operatorname{rot}_i \psi^i + \mathrm{d}\psi^0, \quad \psi^i \in H^{k+1}(B), \quad i = 0, \ldots, 3, \quad \psi^0\big|_{\partial B} = 0. \tag{4}$$

Потенциалы в разложении (4) определяются не единственным образом. Поскольку $\operatorname{rot}(\mathrm{d}\varphi) = 0$, то к вектору $(\psi^1, \psi^2, \psi^3)^T$ можно добавить $\mathrm{d}\varphi$ с некоторым потенциалом φ так, чтобы $\psi^3 - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} \equiv 0$. Таким образом, в разложении (4) можно положить $\psi^3 \equiv 0$. Поэтому в записи этого разложения можно использовать, например, только операторы rot_1 и rot_2:

$$\mathbf{w} = \operatorname{rot}_1 \psi^1 + \operatorname{rot}_2 \psi^2 + \mathrm{d}\psi^0, \quad \psi^i \in H^{k+1}(B), \quad i = 0, 1, 2, \quad \psi^0\big|_{\partial B} = 0. \tag{5}$$

Разложение соленоидальной части в разложении (5) определено неоднозначно. Именно, пусть $\operatorname{rot}_1 \psi^1 + \operatorname{rot}_2 \psi^2 = \operatorname{rot}_1 \widetilde{\psi}^1 + \operatorname{rot}_2 \widetilde{\psi}^2$, тогда имеет место система равенств

$$\frac{\partial\psi^1}{\partial x_3} = \frac{\partial\widetilde{\psi}^1}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial\psi^2}{\partial x_3} = \frac{\partial\widetilde{\psi}^2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial\psi^2}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi^1}{\partial x_2} = \frac{\partial\widetilde{\psi}^2}{\partial x_1} - \frac{\partial\widetilde{\psi}^1}{\partial x_2}.$$

Решая эту систему, приходим к выводу, что

$$\psi^1 = \widetilde{\psi}^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \quad \psi^2 = \widetilde{\psi}^2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2},$$

где $\phi(x_1, x_2)$ — некоторая функция, не зависящая от x_3.

3.2. Симметричные 2-тензорные поля в $\mathbb{R}^3$

Используя разложения (1) и (3), нетрудно получить разложение для трёхмерного симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{u} \in H^k(S^2(B))$:

$$\mathbf{u} = {}^s\mathbf{u} + \mathrm{d}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) + \mathrm{d}^2\psi. \tag{6}$$

Соленоидальная часть ${}^s\mathbf{u}$ представима в виде

$${}^s\mathbf{u} = (\operatorname{rot}\mathbf{v}^1\ \operatorname{rot}\mathbf{v}^2\ \operatorname{rot}\mathbf{v}^3) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3^1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2^1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_3^2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2^2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_3^3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2^3}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1^1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3^1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1^2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3^2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1^3}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3^3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2^1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1^1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2^2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1^2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2^3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1^3}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

для некоторых векторных полей $\mathbf{v}^j = (v_1^j, v_2^j, v_3^j)^T$, $j = 1,2,3$. В силу симметричности поля ${}^s\mathbf{u}$ (${}^su_{ij} = {}^su_{ji}$) на компоненты векторных полей $\mathbf{v}^j$, $j = 1,2,3$, налагаются условия:

$$\frac{\partial v_1^1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3^1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_3^2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2^2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial v_2^1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1^1}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3^3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2^3}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial v_2^2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1^2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_1^3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3^3}{\partial x_1}.$$

Возникает вопрос: как конструировать произвольные соленоидальные симметричные 2-тензорные поля в $\mathbb{R}^3$?

Обобщим операторы rot_i на случай симметричных тензорных полей произвольной валентности $\operatorname{rot}_i\colon H^k(S^m(B)) \to H^{k-1}(S^{m+1}(B))$, $i = 1,2,3$. Они действуют на поле $\mathbf{u} \in H^k(S^m(B))$ по формулам

$$\operatorname{rot}_i \mathbf{u} = \sigma\mathbf{v}, \quad i = 1,2,3,$$

где компоненты поля $\mathbf{v} \in H^{k-1}(T^{m+1}(B))$ определены формулами

$$v_{j_1\ldots j_{m+1}} = (\operatorname{rot}_i(u_{j_1\ldots j_m}))_{j_{m+1}}, \quad j_1,\ldots,j_{m+1} = 1,2,3.$$

Пример. Поясним действие оператора rot_1 на простом примере. Найдём компоненты $\operatorname{rot}_1\mathbf{v}$, где $\mathbf{v} \in H^1(S^1(B))$ — некоторое векторное поле:

$$\operatorname{rot}_1\mathbf{v} = \sigma\left(\operatorname{rot}_1 v_1 \quad \operatorname{rot}_1 v_2 \quad \operatorname{rot}_1 v_3\right) = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) & -\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. В приведённом примере у симметричного 2-тензорного поля $\mathrm{rot}_1\,\mathbf{v}$ компонента 11 равна нулю. Этим свойством обладают и остальные операторы rot_2 и rot_3. Именно, имеем $(\mathrm{rot}_i\,\mathbf{v})_{ii} = 0$ для всех $i = 1, 2, 3$. Аналогичное свойство имеет место и для симметричных тензорных полей произвольной валентности m. Действительно, применяя оператор rot_i к компонентам симметричного m-тензорного поля $\mathbf{u}$, имеем набор векторных полей $\mathrm{rot}_i(u_{i_1\ldots i_m})$, $i_1, \ldots, i_m = 1, 2, 3$, у каждого из которых i-я компонента равна нулю: $(\mathrm{rot}_i(u_{i_1\ldots i_m}))_i = 0$. Следовательно, после применения оператора симметризации имеем $(\mathrm{rot}_i\,\mathbf{u})_{\underbrace{i\ldots i}_{m+1}} = 0$.

Используя операторы rot_i, $i = 1, 2, 3$, введём операторы $\mathrm{rot}_{ij}\colon H^k(B) \to H^{k-2}(S^2(B))$, $i, j = 1, 2, 3$, переводящие функции в симметричные 2-тензорные поля по правилам $\mathrm{rot}_{ij}\,\varphi = \mathrm{rot}_i(\mathrm{rot}_j\,\varphi)$, $i, j = 1, 2, 3$. Компоненты полей $\mathrm{rot}_{ij}\,\varphi$, $i, j = 1, 2, 3$, вычисляются по формулам

$$\mathrm{rot}_{11}\,\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} \\ 0 & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rot}_{12}\,\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} & 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rot}_{22}\,\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} & 0 & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} & 0 & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rot}_{23}\,\varphi = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} & 0 & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rot}_{33}\,\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} & 0 \\ -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rot}_{13}\,\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем общие формулы для вычисления компонент полей $\mathrm{rot}_{ii}\,\varphi$ и $\mathrm{rot}_{i\,i+1}\,\varphi$, $i = 1, 2, 3$:

$$\mathrm{rot}_{ii}\,\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+2}^2} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}} \\ 0 & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rot}_{ii+1}\,\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{j+2}^2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{j+1}\partial x_{j+2}} \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{j+2}^2} & 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_{j+2}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{j+1}\partial x_{j+2}} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_{j+2}} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_{j+1}} \end{pmatrix}.$$

Здесь индекс $i = 1, 2, 3$ указывает, что запись компонент симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{u}$ приводится в виде

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{ii} & u_{i\,i+1} & u_{i\,i+2} \\ u_{i+1\,i} & u_{i+1\,i+1} & u_{i+1\,i+2} \\ u_{i+2\,i} & u_{i+2\,i+1} & u_{i+2\,i+2} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Следующая теорема описывает свойства операторов rot_i, $i = 1, 2, 3$, действующих на функции и векторные поля.

Теорема 1. *Имеют место следующие свойства.*

1. *Операторы* rot_i, $i = 1, 2, 3$, *и* d *перестановочны, т. е. для* $\varphi \in H^2(B)$ *имеем* $\mathrm{rot}_i(\mathrm{d}\varphi) = \mathrm{d}(\mathrm{rot}_i\,\varphi)$, $i = 1, 2, 3$. *Следовательно, поля* $\mathrm{rot}_i(\mathrm{d}\varphi)$, $i = 1, 2, 3$, *потенциальные.*

2. *Операторы* rot_i, $i = 1, 2, 3$, *перестановочны, т. е. для любого* $\varphi \in H^2(B)$ *выполнено*

$$\mathrm{rot}_i(\mathrm{rot}_{i+1}\,\varphi) = \mathrm{rot}_{i+1}(\mathrm{rot}_i\,\varphi), \quad i = 1, 2, 3.$$

3. *Для произвольного векторного поля* $\mathbf{v} \in H^2(S^1(B))$ *выполнено*

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}_i\,\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}_i(\mathrm{div}\,\mathbf{v}), \quad i = 1, 2, 3.$$

4. *Для произвольного* $\varphi \in H^3(B)$ *поля* $\mathrm{rot}_{ij}\,\varphi$, $i, j = 1, 2, 3$, *соленоидальные, т. е. имеют место равенства* $\mathrm{div}(\mathrm{rot}_{ij}\,\varphi) = 0$, $i, j = 1, 2, 3$.

5. *Для произвольного* $\varphi \in H^3(B)$ *имеют место равенства*

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}_i(\mathrm{d}\varphi)) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}_i\,\Delta\varphi, \quad i = 1, 2, 3,$$

где Δ *— оператор Лапласа.*

Доказательство. 1. Используя правило записи компонент (8) для $\mathrm{rot}_i(\mathrm{d}\varphi)$, имеем представление для $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}_i(\mathrm{d}\varphi) &= \sigma\left(\mathrm{rot}_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \quad \mathrm{rot}_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i+1}}\right) \quad \mathrm{rot}_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i+2}}\right)\right) \\
&= \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+2}^2} \\ -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+1}} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}^2} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+2}} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+1}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+2}^2} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}^2}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+1}} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+2}^2} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}^2}\right) & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}} \end{pmatrix} \\
&= \sigma\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+2}} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+1}} \\ 0 & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}^2} \\ 0 & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+2}^2} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \sigma \begin{pmatrix} \mathrm{d}(0) & \mathrm{d}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{i+2}}\right) & \mathrm{d}\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{i+1}}\right) \end{pmatrix} = \mathrm{d}(\mathrm{rot}_i\,\varphi).$$

Пункт 2 устанавливается аналогично доказательству п. 1 с использованием правила записи компонент (8) для $\mathrm{rot}_i(\mathrm{rot}_{i+1}\,\varphi)$ и $\mathrm{rot}_{i+1}(\mathrm{rot}_i\,\varphi)$, $i = 1, 2, 3$.

3. Используя правило записи компонент (8) для $\mathrm{rot}_i\,\mathbf{v}$, имеем представление для $i = 1, 2, 3$:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}_i\,\mathbf{v}) = \mathrm{div}\,\sigma \begin{pmatrix} \mathrm{rot}_i\,v_i & \mathrm{rot}_i\,v_{i+1} & \mathrm{rot}_i\,v_{i+2} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{div}\,\sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial v_{i+1}}{\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial v_{i+2}}{\partial x_{i+2}} \\ -\dfrac{\partial v_i}{\partial x_{i+1}} & -\dfrac{\partial v_{i+1}}{\partial x_{i+1}} & -\dfrac{\partial v_{i+2}}{\partial x_{i+1}} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{div} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_{i+2}} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_{i+1}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial v_{i+1}}{\partial x_{i+2}} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_{i+2}}{\partial x_{i+2}} - \dfrac{\partial v_{i+1}}{\partial x_{i+1}}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_{i+1}} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_{i+2}}{\partial x_{i+2}} - \dfrac{\partial v_{i+1}}{\partial x_{i+1}}\right) & -\dfrac{\partial v_{i+2}}{\partial x_{i+1}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_{i+2}}\left(\sum\limits_{j=1}^{3}\dfrac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_{i+1}}\left(\sum\limits_{j=1}^{3}\dfrac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}_i(\mathrm{div}\,\mathbf{v}).$$

Пункты 4, 5 следуют из п. 3 при $\mathbf{v} = \mathrm{rot}_j\,\varphi$, $j = 1, 2, 3$, и $\mathbf{v} = \mathrm{d}\varphi$ соответственно. □

Используя разложение (4) и операторы rot_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, мы можем переписать разложение (6) для трёхмерного симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{w} \in H^k(S^2(B))$ в следующем виде:

$$\begin{gathered} \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3}(\mathrm{rot}_{ii}\,\psi^i + \mathrm{rot}_{i\,i+1}\,\psi^{i+3}) + \sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}(\mathrm{rot}_i\,\psi^{i+6}) + \mathrm{d}^2\psi^0, \\ \psi^i \in H^{k+2}(B), \quad i = 0, \ldots, 9. \end{gathered} \tag{9}$$

В частности, в разложении (9) соленоидального симметричного 2-тензорного поля участвуют только первые шесть слагаемых.

Теорема 2. *Пусть* ${}^s\mathbf{u} \in H^1(S^2(B))$ *— некоторое соленоидальное симметричное 2-тензорное поле. Тогда в его разложении* (9) *можно подобрать потенциалы таким образом, что из шести операторов* rot_{ii}, $\mathrm{rot}_{i\,i+1}$, $i = 1, 2, 3$, *будут участвовать только три такие, что ни одно из чисел 1, 2, 3 не участвует среди индексов сразу для всех трёх операторов.*

Доказательство. Получим один из возможных вариантов представления ${}^s\mathbf{u}$ с использованием трёх операторов. Другие варианты могут быть получены аналогичным путём. Положим в представлении (7) соленоидального поля ${}^s\mathbf{u}$ тождественно равными нулю v_1^1 и v_2^2 (см. пояснения к формуле (5)). Тогда получим

$${}^s\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3^1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2^1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_3^2}{\partial x_2} & {}^su_{13} \\ -\dfrac{\partial v_3^1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1^2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3^2}{\partial x_1} & {}^su_{23} \\ \dfrac{\partial v_2^1}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial v_1^2}{\partial x_2} & {}^su_{33} \end{pmatrix},$$

где компоненты ${}^s u_{i3}$, $i = 1, 2, 3$, подлежат определению. В силу симметричности поля ${}^s\mathbf{u}$

$$-\frac{\partial v_3^1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_3^2}{\partial x_2}, \quad {}^s u_{13} = \frac{\partial v_2^1}{\partial x_1}, \quad {}^s u_{23} = -\frac{\partial v_1^2}{\partial x_2}.$$

Из первого равенства следует, что существует некоторая функция $\varphi \in H^3(B)$ такая, что $v_3^1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}$, $v_3^2 = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}$. Определим компоненту ${}^s u_{33}$ из условия соленоидальности поля ${}^s\mathbf{u}$:

$$\frac{\partial\, {}^s u_{33}}{\partial x_3} = -\left(\frac{\partial {}^s u_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial {}^s u_{23}}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 v_1^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 v_2^1}{\partial x_1^2}.$$

Для некоторых функций $\psi, \chi \in H^3(B)$ выполнено $v_2^1 = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_3}$, $v_1^2 = \dfrac{\partial \chi}{\partial x_3}$ и, следовательно, ${}^s u_{33} = \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}$. Таким образом, мы получили представление произвольного соленоидального симметричного 2-тензорного поля ${}^s\mathbf{u}$ с использованием трёх функций:

$${}^s\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} & -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3} \\ -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x_3^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} & -\dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3} & -\dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x_2 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \end{pmatrix} = \operatorname{rot}_{11} \chi + \operatorname{rot}_{22}(-\psi) + \operatorname{rot}_{33} \varphi.$$

Дополнительное условие на операторы, для представимости любого симметричного 2-тензорного поля с использованием трёх операторов, связано со свойством операторов rot_i, $i = 1, 2, 3$, из замечания 2. Действительно, если, например, индекс 1 есть у всех операторов, тогда мы имеем сумму:

$$\operatorname{rot}_{11} \varphi^1 + \operatorname{rot}_{12} \varphi^2 + \operatorname{rot}_{13} \varphi^3 = \operatorname{rot}_1(\operatorname{rot}_1 \varphi^1 + \operatorname{rot}_2 \varphi^2 + \operatorname{rot}_3 \varphi^3) = \operatorname{rot}_1 \mathbf{v},$$

где $\mathbf{v} = \operatorname{rot}_1 \varphi^1 + \operatorname{rot}_2 \varphi^2 + \operatorname{rot}_3 \varphi^3$. Тогда у симметричного 2-тензорного поля $\operatorname{rot}_1 \mathbf{v}$ компонента 11 равна нулю. Следовательно, с использованием операторов rot_{11}, rot_{12}, rot_{13} невозможно получить представление соленоидального поля ${}^s\mathbf{u}$, у которого ${}^s u_{11} \neq 0$. $\square$

Используя теорему 2 и разложение (5), разложение (9) для трёхмерного симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{w} \in H^k(S^2(B))$ можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{w} = \operatorname{rot}_{11} \psi^1 + \operatorname{rot}_{12} \psi^2 + \operatorname{rot}_{22} \psi^3 + \mathrm{d}(\operatorname{rot}_1 \psi^4) + \mathrm{d}(\operatorname{rot}_2 \psi^5) + \mathrm{d}^2 \psi^0, \tag{10}$$

где $\psi^i \in H^{k+2}(B)$, $i = 0, \ldots, 5$. Отметим, что представление соленоидальной части поля $\mathbf{w}$ только с использованием операторов rot_{11}, rot_{12} и rot_{22} можно получить, используя рассуждения доказательства теоремы 2 и положив $v_3^1 = v_3^2 = 0$.

Замечание 3. Количество потенциалов, участвующих в разложениях (5) и (10), совпадает с количеством различных компонент векторного и симметричного 2-тензорного полей соответственно.

3.3. Симметричные m-тензорные поля в $\mathbb{R}^3$

Введём операторы $\operatorname{rot}_{i_1 \ldots i_m} : H^k(B) \to H^{k-m}(S^m(B))$, $i_1, \ldots, i_m = 1, 2, 3$, переводящие функции в симметричные m-тензорные поля по правилам

$$\operatorname{rot}_{i_1 \ldots i_m} \varphi = \operatorname{rot}_{i_1} \big(\ldots \big(\operatorname{rot}_{i_m} \varphi \big) \big), \quad i_1, \ldots, i_m = 1, 2, 3.$$

Доказательства теорем для симметричных m-тензорных полей отличаются от доказательств аналогичных теорем для симметричных 2-тензорных полей лишь более трудоёмкими вычислениями чисто технического характера и поэтому не приводятся.

Теорема 3. *Имеют место следующие свойства.*

1. *Операторы* rot_i, $i = 1,2,3$, *и* d *перестановочны, т. е. для произвольного* $\mathbf{w} \in H^2(S^m(B))$, $m \geqslant 0$, *имеем* $\operatorname{rot}_i(\mathrm{d}\mathbf{w}) = \mathrm{d}(\operatorname{rot}_i \mathbf{w})$, $i = 1,2,3$. *Следовательно, поля* $\operatorname{rot}_i(\mathrm{d}\mathbf{w})$, $i = 1,2,3$ *потенциальные.*

2. *Операторы* rot_i, $i = 1,2,3$, *перестановочны, т. е. для любого* $\mathbf{w} \in H^2(S^m(B))$, $m \geqslant 0$, *выполнено*

$$\operatorname{rot}_i(\operatorname{rot}_{i+1} \mathbf{w}) = \operatorname{rot}_{i+1}(\operatorname{rot}_i \mathbf{w}), \quad i = 1,2,3.$$

3. *Для произвольного симметричного тензорного поля* $\mathbf{w} \in H^2(S^m(B))$, $m \geqslant 1$, *выполнено*

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}_i \mathbf{w}) = \left(\frac{m}{m+1}\right) \operatorname{rot}_i(\operatorname{div} \mathbf{w}), \quad i = 1,2,3.$$

4. *Для произвольного* $\varphi \in H^{m+1}(B)$ *поля* $\operatorname{rot}_{i_1 \dots i_m} \varphi$, $i_1, \dots, i_m = 1,2,3$, *соленоидальные, т. е. имеют место равенства* $\operatorname{div}\big(\operatorname{rot}_{i_1 \dots i_m} \varphi\big) = 0$, $i_1, \dots, i_m = 1,2,3$.

5. *Для произвольного* $\mathbf{w} \in H^3(S^m(B))$, $m \geqslant 0$, *имеют место равенства*

$$\operatorname{div}\big(\operatorname{rot}_i\big(\mathrm{d}\mathbf{w}\big)\big) = \left(\frac{m+1}{m+2}\right) \operatorname{rot}_i \triangle \mathbf{w}, \quad i = 1,2,3,$$

где оператор Лапласа Δ *применяется покомпонентно.*

Отметим, что коэффициенты в пп. 3 и 5 возникают вследствие того, что в левой и правой частях равенств оператор симметризации применяется к полям различной валентности.

Теорема 4. *Пусть* ${}^s\mathbf{u} \in H^1(S^m(B))$, $m \geqslant 1$, *— некоторое соленоидальное симметричное* m*-тензорное поле. Тогда в его разложении*

$${}^s\mathbf{u} = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m \leqslant 3} \operatorname{rot}_{i_1 \dots i_m} \psi^{i_1 \dots i_m},$$

где $\psi^{i_1 \dots i_m} \in H^{m+1}(B)$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m \leqslant 3$, *можно подобрать потенциалы таким образом, что не более* $m+1$ *из них будут отличны от нуля. При этом для любого поля* ${}^s\mathbf{u} \in H^1(S^m(B))$ *новое разложение на* $m+1$ *слагаемых будет иметь место, если ни одно из чисел* 1, 2, 3 *не участвует среди индексов сразу для всех* $m+1$ *операторов.*

Под условия теоремы 4 подходит, например, следующий вариант разложения соленоидального поля:

$${}^s\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{m} \operatorname{rot}_{\underbrace{1 \dots 1}_{m-k} \underbrace{2 \dots 2}_{k}} \psi^k, \quad \psi^k \in H^{m+1}(B), \quad k = 0, \dots, m.$$

Используя это разложение, получаем новое детальное разложение симметричного m-тензорного поля.

Теорема 5. *Любое трёхмерное тензорное поле* $\mathbf{w} \in H^k(S^m(B))$, $m \geqslant 1$, *можно представить в виде суммы*

$$\mathbf{w} = \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{d}^{m-n} (\operatorname{rot}_{\underbrace{1 \dots 1}_{n-k} \underbrace{2 \dots 2}_{k}} \psi^{i_{kn}}) + \mathrm{d}^m \psi^1, \quad i_{kn} = k + 1 + \frac{n(n+1)}{2}, \tag{11}$$

где $\psi^i \in H^{k+m}(B)$, $i = 1, \dots, \dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$.

Замечание 4. Количество потенциалов, участвующих в разложении (11), совпадает с количеством различных компонент симметричного m-тензорного поля, как в векторном и 2-тензорном случаях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введены новые дифференциальные операторы, являющиеся обобщением оператора ротора и действующие на трёхмерные симметричные m-тензорные поля. Проведено исследование свойств этих операторов и получены новые детальные разложения симметричных m-тензорных полей в $\mathbb{R}^3$. В частности, показано, что поля, участвующие в разложении любого симметричного m-тензорного поля, могут быть построены с использованием трёх операторов: оператора внутреннего дифференцирования d и, например, операторов rot_1, rot_2. При этом число потенциалов, участвующих в разложении, совпадает с количеством различных компонент симметричного m-тензорного поля. По своим свойствам операторы rot_i, $i = 1, 2, 3$, являются аналогами оператора $\mathrm{d}^\perp$, действующего на двумерные тензорные поля. Результаты, полученные в работе, представляют фундаментальный и прикладной интерес, в частности для дальнейшего изучения свойств продольного лучевого преобразования и нормального преобразования Радона, действующих на трёхмерные симметричные m-тензорные поля, и разработки алгоритмов численного решения задач по обращению этих операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Norton S.J.* Tomographic reconstruction of 2-D vector fields: application to flow imaging // Geophys. J. Internat. 1989. V. 97, N 1. P. 161–168; DOI:10.1111/j.1365-246X.1989.tb00491.x
2. *Braun H., Hauck A.* Tomographic reconstruction of vector fields // IEEE Trans. Signal Processing. 1991. V. 39, N 2. P. 464–471; DOI:10.1109/78.80830
3. *Sparr G., Strahlen K., Lindstrem K., Persson H. W.* Doppler tomography for vector fields // Inverse Problems. 1995. V. 11, N 5. P. 1051–1061; DOI:10.1088/0266-5611/11/5/009
4. *Defrise M., Gullberg G.T.* 3D reconstruction of tensors and vectors. Technical Report. N LBNL–54936. Berkeley: LBNL, 2005.
5. *Schuster T.* 20 years of imaging in vector field tomography: a review // Math. Meth. Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Dariation Therapy (IMRT). Basel: Birkhauser, 2008. P. 389–424.
6. *Kazantsev S.G., Bukhgeim A.A.* Inversion of the scalar and vector attenuated x-ray transforms in a unit disc // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2007. V. 15, N 7. P. 735–765; DOI:10.1515/jiip.2007.040
7. *Tamasan A.* Tomographic reconstruction of vector fields in variable background media // Inverse Problems. 2007. V. 23, N 5. P. 2197–2205; DOI:10.1088/0266-5611/23/5/022
8. *Ainsworth G.* The attenuated magnetic ray transform on surfaces // Inverse Probl. Imaging. 2013. V. 7, N 1. P. 27–46; DOI:10.3934/ipi.2013.7.27
9. *Svetov I. E., Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T.* A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium // Math. Comput. Simul. 2014. V. 97. P. 207–223; DOI:10.1016/j.matcom.2013.10.002
10. *Monard F.* Inversion of the attenuated geodesic X-ray transform over functions and vector fields on simple surfaces // SIAM J. Math. Anal. 2016. V. 48, N 2. P. 1155–1177; DOI:10.1137/15M1016412
11. *Шарафутдинов В. А.* Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск: Наука, 1993.
12. *Puro A.* Magneto-photoelasticity as parametric tensor field tomography // Inverse Problems. 1998. V. 14, N 5. P. 1315–1330; DOI:10.1088/0266-5611/14/5/015
13. *Sharafutdinov V.* The linearized problem of magneto-photoelasticity // Inverse Probl. Imaging. 2014. V. 8, N 1. P. 247–257; DOI:10.3934/ipi.2014.8.247
14. *Aben H.K., Idnurm S.J., Josepson J., Kell K.-J. E., Puro A. E.* Optical tomography of stress tensor field // Analytical Meth. Optical Tomography. Proc. SPIE. 1991. V. 1843. P. 220–229; DOI:10.1117/12.131894

15. *Пуро А.Э., Каров Д.Д.* Тензорная томография остаточных напряжений // Оптика и спектроскопия. 2007. Т. 103, № 4. С. 698–703.

16. *Lionheart W., Withers P.* Diffraction tomography of strain // Inverse Problems. 2015. V. 31, N 4. Article 045005; DOI:10.1088/0266-5611/31/4/045005

17. *Карасев В.П.* Поляризационная томография квантового излучения: теоретические аспекты. Операторный подход // Теор. и мат. физика. 2005. Т. 145, № 3. С. 344–357; DOI:10.4213/tmf1904

18. *Tao W., Rohmer D., Gullberg G.T., Seo Y., Huang Q.* An Analytical Algorithm for Tensor Tomography From Projections Acquired About Three Axes // IEEE Trans. Medical Imaging. 2022. V. 41, N 11. P. 3454–3472. DOI: 10.1109/TMI.2022.3186983

19. *Derevtsov E.Yu., Svetov I.E.* Tomography of tensor fields in the plain // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3, N 2. P. 24–68;

20. *Weyl H.* The method of ortogonal projection in potential theory // Duke Math. J. 1940. V. 7, N 1. P. 411–444; DOI:10.1215/S0012-7094-40-00725-6

21. *Деревцов Е.Ю., Кашина И.Г.* Численное решение задачи векторной томографии с помощью полиномиальных базисов // Сиб. журн. вычисл. мат. 2002. Т. 5, № 3. С. 233–254.

22. *Деревцов Е.Ю., Кашина И.Г.* Приближённое решение задачи реконструкции тензорного поля второй валентности с помощью полиномиальных базисов // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 1. С. 39–62.

23. *Светов И.Е., Полякова А.П.* Восстановление 2-тензорных полей, заданных в единичном круге, по их лучевым преобразованиям на основе МНК с использованием B-сплайнов // Сиб. журн. индустр. математики. 2010. Т. 13, № 2. С. 183–199.

24. *Derevtsov E.Yu., Efimov A.V., Louis A.K., Schuster T.* Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 19, N 4–5. P. 689–715; DOI:10.1515/jiip.2011.047

25. *Деревцов Е.Ю., Полякова А.П.* Решение задачи интегральной геометрии 2-тензорных полей методом сингулярного разложения // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 3. С. 73–94.

26. *Светов И.Е., Полякова А.П.* Приближённое решение задачи двумерной 2-тензорной томографии с использованием усеченного сингулярного разложения // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 480–499. DOI:10.17377/semi.2015.12.041

27. *Derevtsov E.Yu., Louis A.K., Maltseva S.V., Polyakova A. P., Svetov I. E.* Numerical solvers based on the method of approximate inverse for 2D vector and 2-tensor tomography problems // Inverse Problems. 2017. V. 33, N 12. Article 124001; DOI:10.1088/1361-6420/aa8f5a

28. *Светов И.Е., Полякова А.П., Мальцева С.В.* Метод приближённого обращения для операторов лучевых преобразований, действующих на двумерные симметричные m-тензорные поля // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 1. С. 104–115; DOI:10.33048/sibjim.2019.22.110

29. *Полякова А.П.* Восстановление векторного поля в шаре по его нормальному преобразованию Радона // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13, № 4. С. 119–142.

30. *Светов И.Е.* Метод приближённого обращения для операторов преобразования Радона функций и нормального преобразования Радона векторных и симметричных 2-тензорных полей в $\mathbb{R}^3$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 1073–1087; DOI:10.33048/semi.2020.17.081

31. *Polyakova A.P.* Singular value decomposition of a normal Radon transform operator acting on 3D symmetric 2-tensor fields // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18, № 2. С. 1572–1595; DOI:10.33048/semi.2021.18.117

32. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965.

33. *Быховский Э.Б., Смирнов Н.В.* Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа // Тр. МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 5–36.

34. *Girault V., Raviart P.-A.* Finite Element Methods for Navier—Stokes Equations, Theory and Algorithms. Berlin: Springer-Verl., 1986; DOI:10.1007/978-3-642-61623-5

35. *Borchers W., Sohr H.* On the equations $\operatorname{rot} v = g$ and $\operatorname{div} u = f$ with zero boundary conditions // Hokkaido Math. J. 1990. V. 19. P. 67–87; DOI:10.14492/HOKMJ/1381517172

36. *Backus G.E.* Poloidal and toroidal fields in geomagnetic field modeling // Rev. Geophysics. 1986. V. 24, N 1. P. 75–109; DOI:10.1029/rg024i001p00075

37. *Казанцев С.Г., Кардаков В.Б.* Полоидально-тороидальное разложение соленоидальных векторных полей в шаре // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 74–95; DOI:10.33048/sibjim.2019.22.307

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.983:514.8

DECOMPOSITION OF SYMMETRIC TENSOR FIELDS IN $\mathbb{R}^3$

© 2023 I. E. Svetov[a], A. P. Polyakova[b]

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]svetovie@math.nsc.ru, [b]apolyakova@math.nsc.ru

Received 19.05.2022, revised 04.10.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. In the article, we introduce generalizations of the curl operator acting on three-dimensional symmetric m-tensor fields and establish properties of them. For the spaces of three-dimensional tensor fields, new detailed decompositions are obtained. Each term in the decompositions is constructed using of one function. Decompositions of this kind play a special role, in particular, in the study of tomographic integral operators acting on symmetric m-tensor fields, $m \geqslant 1$, and in the construction of algorithms for solving the emerging inverse problems.

Keywords: decomposition of symmetric tensor field, solenoidal field, potential field, potential, curl operator, computerized tomography, ray transform, Radon transform.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.115

REFERENCES

1. Norton S.J. Tomographic reconstruction of 2-D vector fields: application to flow imaging. *Geophys. J. Internat.*, 1989, Vol. 97, No. 1, pp. 161–168; DOI:10.1111/j.1365-246X.1989.tb00491.x
2. Braun H., Hauck A. Tomographic reconstruction of vector fields. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1991, Vol. 39, No. 2, pp. 464–471; DOI:10.1109/78.80830
3. Sparr G., Strahlen K., Lindstrem K., Persson H. W. Doppler tomography for vector fields. *Inverse Problems*, 1995, Vol. 11, No. 5, pp. 1051–1061; DOI:10.1088/0266-5611/11/5/009
4. Defrise M., Gullberg G.T. 3D reconstruction of tensors and vectors. Technical Report. N LBNL–54936. Berkeley: LBNL, 2005.
5. Schuster T. 20 years of imaging in vector field tomography: a review. *Math. Meth. Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Dariation Therapy (IMRT)*. Basel: Birkhauser, 2008. P. 389–424.
6. Kazantsev S.G., Bukhgeim A.A. Inversion of the scalar and vector attenuated x-ray transforms in a unit disc. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2007, Vol. 15, No. 7, pp. 735–765; DOI:10.1515/jiip.2007.040
7. Tamasan A. Tomographic reconstruction of vector fields in variable background media. *Inverse Problems*, 2007, Vol. 23, No. 5, pp. 2197–2205; DOI:10.1088/0266-5611/23/5/022
8. Ainsworth G. The attenuated magnetic ray transform on surfaces. *Inverse Probl. Imaging*, 2013, Vol. 7, No. 1, pp. 27–46; DOI:10.3934/ipi.2013.7.27
9. Svetov I. E., Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T. A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium. *Math. Comput. Simul.*, 2014, Vol. 97, pp. 207–223; DOI:10.1016/j.matcom.2013.10.002
10. Monard F. Inversion of the attenuated geodesic X-ray transform over functions and vector fields on simple surfaces. *SIAM J. Math. Anal.*, 2016, Vol. 48, No. 2, pp. 1155–1177; DOI:10.1137/15M1016412
11. Sharafutdinov V. A. Integral Geometry of Tensor Fields. Utrecht: VSP, 1994; DOI:10.1515/9783110900095

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

12. Puro A. Magneto-photoelasticity as parametric tensor field tomography. *Inverse Problems*, 1998, Vol. 14, No. 5, pp. 1315–1330; DOI:10.1088/0266-5611/14/5/015
13. Sharafutdinov V. The linearized problem of magneto-photoelasticity. *Inverse Probl. Imaging*, 2014, Vol. 8, No. 1, pp. 247–257; DOI:10.3934/ipi.2014.8.247
14. Aben H.K., Idnurm S.J., Josepson J., Kell K.-J. E., Puro A. E. Optical tomography of stress tensor field. *Analytical Meth. Optical Tomography. Proc. SPIE*, 1991, Vol. 1843, pp. 220–229; DOI:10.1117/12.131894
15. Puro A. E., Karov D. D. Tensor field tomography of residual stresses. *Optics and Spectroscopy*, 2007, Vol. 103, No. 4, pp. 678–682; DOI:10.1134/S0030400X07100244
16. Lionheart W., Withers P. Diffraction tomography of strain. *Inverse Problems*, 2015, Vol. 31, No. 4, article 045005; DOI:10.1088/0266-5611/31/4/045005
17. Karassiov V. P. Polarization tomography of quantum radiation: theoretical aspects and operator approach. *Theor. Math. Phys.*, 2005, Vol. 145, No. 3, pp. 1666–1677; DOI:10.1007/s11232-005-0189-4
18. Tao W., Rohmer D., Gullberg G.T., Seo Y., Huang Q. An analytical algorithm for tensor tomography from projections acquired about three axes. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2022, Vol. 41, No. 11, pp. 3454–3472; DOI: 10.1109/TMI.2022.3186983
19. Derevtsov E.Yu., Svetov I.E. Tomography of tensor fields in the plain. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2015, Vol. 3, No. 2, pp. 24–68;
20. Weyl H. The method of ortogonal projection in potential theory. *Duke Math. J.*, 1940, Vol. 7, No. 1 pp. 411–444; DOI:10.1215/S0012-7094-40-00725-6
21. Derevtsov E.Yu., Kashina I.G. Chislennoe reshenie zadachi vektornoi tomografii s pomoshch'yu polinomial'nykh bazisov [Numerical solution of the vector tomography problem using polynomial bases]. *Sib. Zhurn. Vychisl. Mat.*, 2002, Vol. 5, No. 3, pp. 233–254 (in Russian).
22. Derevtsov E.Yu., Kashina I.G. Priblizhennoe reshenie zadachi rekonstruktsii tenzornogo polya vtoroi valentnosti s pomoshch'yu polinomial'nykh bazisov [Approximate solution of the problem of reconstruction of the tensor field of the second valence using polynomial bases]. Sib. Zhurn. Indust. Mat., 2002, Vol. 5, No. 1, pp. 39–62 (in Russian).
23. Svetov I.E., Polyakova A.P. Reconstruction of 2-tensor fields, given in a unit circle, by their ray transform based on LSM with B-splines. *Numer. Anal. Appl.*, 2010, Vol. 3, No. 2, pp. 151–164; DOI:10.1134/S1995423910020047
24. Derevtsov E.Yu., Efimov A.V., Louis A.K., Schuster T. Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2011, Vol. 19, No. 4–5, pp. 689–715; DOI:10.1515/jiip.2011.047
25. Derevtsov E.Yu., Polyakova A.P. An application of the SVD-method to the problem of integral geometry of 2-tensor fields. *J. Math. Sci.*, 2014, Vol. 202, No. 1, pp. 50–71; DOI:10.1007/s10958-014-2033-6
26. Svetov I.E., Polyakova A.P. Priblizhennoe reshenie zadachi dvumernoi 2-tenzornoi tomografii s ispol'zovaniem usechennogo singulyarnogo razlozheniya [Approximate solution of the problem of two-dimensional 2-tensor tomography using truncated singular decomposition]. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2015, Vol. 12, pp. 480–499 (in Russian); DOI:10.17377/semi.2015.12.041
27. Derevtsov E.Yu., Louis A.K., Maltseva S.V., Polyakova A. P., Svetov I. E. Numerical solvers based on the method of approximate inverse for 2D vector and 2-tensor tomography problems. *Inverse Problems*, 2017, Vol. 33, No. 12, article 124001; DOI:10.1088/1361-6420/aa8f5a
28. Svetov I.E., Polyakova A.P., Maltseva S.V. The method of approximate inverse for ray transform operators on two-dimensional symmetric m-tensor fields. *J. Appl. Indust. Math.*, 2019, Vol. 13, No. 1, pp. 157–167; DOI:10.1134/S1990478919010162
29. Polyakova A.P. Reconstruction of a vector field in a ball from its normal Radon transform. *J. Math. Sci.*, 2015, Vol. 205, No. 3, pp. 418–439; DOI:10.1007/s10958-015-2256-1
30. Svetlov I.E. Metod priblizhennogo obrashcheniya dlya operatorov preobrazovaniya Radona funktsii i normal'nogo preobrazovaniya Radona vektornykh i simmetrichnykh 2-tenzornykh polei v $\mathbb{R}^3$ [Method of approximate inversion for Radon transformation operators of functions and normal Radon transformation of vector and symmetric 2-tensor fields in $\mathbb{R}^3$]. *Sibir. Elektron. Mat. Izv.*, 2020, Vol. 17, pp. 1073–1087 (in Russian); DOI:10.33048/semi.2020.17.081

31. Polyakova A.P. Singular value decomposition of a normal Radon transform operator acting on 3D symmetric 2-tensor fields. *Sibir. Elektron. Mat. Izv.*, 2021, Vol. 18, No. 2, pp. 1572–1595; DOI:10.33048/semi.2021.18.117

32. Kochin N.E. Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniya [Vector calculus and the beginnings of tensor calculus]. Moscow: Nauka, 1965 (in Russian).

33. Bykhovsky E.B., Smirnov N.V. Ob ortogonal'nom razlozhenii prostranstva vektor-funktsii, kvadratichno summiruemykh po zadannoi oblasti, i operatorakh vektornogo analiza [On the orthogonal decomposition of the space of vector functions, quadratically summable over a given domain, and vector analysis operators]. *Tr. MIAN SSSR*, 1960, Vol. 59, pp. 5–36 (in Russian).

34. Girault V., Raviart P.-A. Finite Element Methods for Navier—Stokes Equations, Theory and Algorithms. Berlin: Springer-Verl., 1986; DOI:10.1007/978-3-642-61623-5

35. Borchers W., Sohr H. On the equations $\operatorname{rot} v = g$ and $\operatorname{div} u = f$ with zero boundary conditions. *Hokkaido Math. J.*, 1990, Vol. 19, pp. 67–87; DOI:10.14492/HOKMJ/1381517172

36. Backus G.E. Poloidal and toroidal fields in geomagnetic field modeling. *Rev. Geophysics*, 1986, Vol. 24, No. 1, pp. 75–109; DOI:10.1029/rg024i001p00075

37. Kazantsev S. G., Kardakov V. B. Poloidal-toroidal decomposition of solenoidal vector fields in the ball. *J. Appl. Indust. Math.*, 2019, Vol. 13, No. 3, pp. 480–499; DOI:10.1134/S1990478919030098