

Типы изоморфизмов и элементарные теории полурешеток Роджерса

С. А. Бадаев(Казахстан), С. С. Гончаров,
А.Сорби(Италия)

Аннотация

Мы исследуем несовпадение типов изоморфизма и элементарные теории полурешеток Роджерса вычислимых нумераций семейств множеств из различных уровней арифметической иерархии.

Среди многих возможных приложений теории обобщенно вычислимых нумераций, предложенной в работе [5], наиболее интересны и популярны *арифметические нумерации*, т.е. нумерации семейств арифметических множеств. При рассмотрении семейства \mathcal{A} Σ_n^0 -множеств обобщенно вычислимые нумерации могут быть охарактеризованы следующим образом: нумерация α семейства \mathcal{A} является обобщенно вычислимой, если и только если $\{\langle x, i \rangle : x \in \alpha(i)\}$ является множеством из Σ_n^0 . В дальнейшем такие нумерации α будут просто называться Σ_n^0 -*вычислимыми*. Напомним, что если α и β являются нумерациями одного и того же множества объектов, то говорят, что α *сводится* к β (в символах: $\alpha \leq \beta$) если существует вычислимая функция f такая, что $\alpha = \beta \circ f$. Мы пишем $\alpha \equiv \beta$, если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$. Класс эквивалентности нумерации α (в зависимости, конечно, от совокупности изучаемых нумераций) будет обозначаться символом $\text{deg}(\alpha)$. Поскольку \leq есть отношение предпорядка, то \equiv является отношением эквивалентности. Если \mathcal{A} — семейство Σ_n^0 -множеств, то \equiv разбивает множество $\text{Com}_n^0(\mathcal{A})$ всех Σ_n^0 -вычислимых нумераций на классы эквивалентности, порождая таким образом структуру степеней, обозначаемую через $\mathcal{R}_n^0(\mathcal{A})$ и называемую *полурешеткой Роджерса* семейства \mathcal{A} . В настоящей статье мы продолжаем исследования типов изоморфизма полурешеток Роджерса, начатое в [1]. Нас интересуют различия между элементарными теориями и типами изоморфизма для семейств из различных уровней арифметической иерархии.

Теорема 1.[2] В каждом фиксированном уровне арифметической иерархии существует бесконечно много семейств с попарно различными элементарными теориями их полурешеток Роджерса.

В [1] мы установили, что для каждого n тип изоморфизма полурешетки Роджерса *некоторого* Σ_{n+5}^0 -вычислимого семейства \mathcal{B} отличается от типа изоморфизма полурешетки Роджерса $\mathcal{R}_{n+1}^0(\mathcal{A})$ произвольного Σ_{n+1}^0 -вычислимого семейства \mathcal{A} .

Теорема 2.[3] Для каждого n тип изоморфизма полурешетки Роджерса *каждого* нетривиального Σ_{n+4}^0 -вычислимого семейства \mathcal{B} отличен от типов изоморфизма полурешеток Роджерса $\mathcal{R}_{n+1}^0(\mathcal{A})$ всех Σ_{n+1}^0 -вычислимых семейств \mathcal{A} .

Список литературы

- [1] Badaev S., Goncharov S., Sorbi A., *Isomorphism types and theories of Rogers semilattices of arithmetical numberings*. In *Computability and Models*, S.B. Cooper and S.S. Goncharov eds.—Kluwer / Plenum Publishers, New York, 2003, pp. 79–91.
- [2] Бадаев С.А., Гончаров С.С., Сорби А., *Об элементарных теориях полурешеток Роджерса*. Алгебра и логика, v44(2005), N3, 261-268.
- [3] Бадаев С.А., Гончаров С.С., Сорби А., *Типы изоморфизмов полурешеток Роджерса семейств из различных уровней арифметической иерархии*. Алгебра и логика, в печати.
- [4] Ершов Ю.Л., *Теория нумераций*. Наука, Москва, 1977.
- [5] Гончаров С.С., Сорби А., *Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса*. Алгебра и логика, 1997, т. 36, № 6, стр. 621–641.