Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 512.5

О РУЧНЫХ АВТОМОРФИЗМАХ НЕКОТОРЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Е. И. Тимошенко

Аннотация: Для многообразия $\mathbf{A}_m\mathbf{A}$, заданного тождествами $[[x,y],[u,v]]=[z,w]^m = 1$, и многообразия $\mathbf{A}^2\wedge\mathbf{N}_c$, заданного тождествами $[x_1,\dots,x_{c+1}] = [[x,y],[u,v]] = 1$, найдены легко проверяемые условия для того, чтобы автоморфизмы свободной группы ранга r ($r \neq 3$) этих многообразий были ручными. Указаны не ручные автоморфизмы для метабелевых групп с одним определяющим соотношением. Библиогр. 13.

Пусть $\mathbf{M}$ — некоторое многообразие групп и $F_r(\mathbf{M})$ — свободная группа ранга r этого многообразия. Автоморфизм α группы $F_r(\mathbf{M})$ называется *ручным*, если он индуцирован некоторым автоморфизмом свободной группы F_r того же ранга при естественном гомоморфизме F_r на $F_r(\mathbf{M})$. Это понятие введено Бахмутом и Мочизуки. Они доказали [1], что для натурального m, делящегося на квадрат, свободная группа ранга $r \geq 2$ многообразия $\mathbf{A}_m\mathbf{A}$, заданного тождествами

$$[[x,y], \quad [u,v]] = [z,w]^m = 1,$$

имеет неручные автоморфизмы. Чейн [2] построил пример неручного автоморфизма в свободной метабелевой группе ранга 3. При $r \neq 3$ все автоморфизмы свободной метабелевой группы $S_r = F_r(\mathbf{A}^2)$ ручные, как показали независимо Бахмут и Мочизуки [3] и В. А. Романьков [4].

К. Гупта и автор доказали [5], что при любом не простом m существует примитивная система элементов группы $F_r(\mathbf{A}_m\mathbf{A})$, т. е. часть базиса этой группы длины $r-1$, не индуцированная примитивной системой группы F_r. Отсюда, в частности, следует, что при любом не простом m группа $F_r(\mathbf{A}_m\mathbf{A})$ имеет неручные автоморфизмы.

В § 1 приведены необходимые и достаточные условия для того, чтобы автоморфизм группы $F_r(\mathbf{A}_{p^n}\mathbf{A})$ (p простое, $r \neq 3$) был ручным. Отсюда следует алгоритмическая распознаваемость ручных автоморфизмов свободных групп многообразий $\mathbf{A}_{p^n}\mathbf{A}$ при $r \neq 3$.

Для группы G обозначим через $\gamma_{m+1}(G)$ $(m+1)$-й член нижнего центрального ряда группы G, т. е. $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_{m+1}(G) = [\gamma_m(G), G]$. Обозначим через $S_{r,m}$ свободную группу ранга r в многообразии метабелевых групп класса нильпотентности не выше m, т. е. $S_{r,m} = S_r/\gamma_{m+1}(S_r)$.

В [6] доказано, что группа $S_{r,m}$ для любых $r \geq 3$, $m \geq 3$ имеет примитивные системы элементов длины $r-1$, не индуцированные примитивными системами элементов группы S_r. Отсюда, в частности, следует, что группа $S_{r,m}$ имеет неручные автоморфизмы при любых $m \geq 3$ и $r \geq 3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00567).

Вопрос о распознавании ручных автоморфизмов сформулирован в обзоре [7]. Для конечно порожденных абелевых групп он решен в [8].

В [9] доказано, что для любого нильпотентного многообразия $\mathbf{N}$ и любой свободной группы $F_r(\mathbf{N})$ этого многообразия алгоритмически разрешим вопрос: является ли автоморфизм α группы $F_r(\mathbf{N})$ ручным? Алгоритм основан на финитной отделимости подгруппы ручных автоморфизмов в группе всех автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_r(\mathbf{N}))$. Мы приведем необходимые и достаточные условия для того, чтобы автоморфизм группы $S_{r,m}$ был ручным при $r \neq 3$. Отсюда будет следовать алгоритмическая распознаваемость ручных автоморфизмов группы $S_{r,m}$. Приведенный алгоритм более эффективен, чем алгоритм, основанный на финитной отделимости.

Во § 2 доказано существование неручных автоморфизмов в метабелевых группах с одним определяющим соотношением. Приводится алгоритм для их распознавания, когда определяющее соотношение лежит в коммутанте.

§ 1. Распознавание ручных автоморфизмов свободных групп некоторых метабелевых многообразий

В группе F_r зафиксируем некоторый базис $f_1, \dots, f_r$ и через $\partial_i g$ будем обозначать i-ю левую производную Фокса от элемента $g \in F_r$. Пусть в дальнейшем $\overline{S}_r = S_r/S'_r$. Заметим, что для элемента g из свободной метабелевой группы S_r однозначно определены значения производных Фокса в кольце $\mathbf{Z}(\overline{S}_r)$, соответствующие фиксированному базису $x_1, \dots, x_r$ группы S_r. Для элементов $g_1, \dots, g_r$ из группы S_r обозначим через $J_X(g)$ матрицу, составленную из значений левых производных Фокса $\partial_i g_j$ от элементов g_j в кольце $\mathbf{Z}(\overline{S}_r)$. Индекс X означает, что производные определяются в базисе $X = \{x_1, \dots, x_r\}$. Заметим, что если $y_1, \dots, y_r$ — другой базис группы S_r, то определители матриц $J_X(g)$ и $J_Y(g)$ получаются один из другого умножением на некоторый обратимый элемент кольца $\mathbf{Z}(\overline{S}_r)$, т. е. на элемент $a \in \pm(\overline{S}_r)$.

Лемма 1. *Пусть S_r — свободная метабелева группа с базисом $x_1, \dots, x_r$; $g_1, \dots, g_r$ — элементы из S_r; $\varphi = \{x_1 \to g_1, \dots, x_r \to g_r\}$ — эндоморфизм группы S_r; $\triangle$ — фундаментальный идеал кольца $\mathbf{Z}(\bar{S}_r)$; $J_X(g) = (\partial_i g_j)$ — матрица размерности $r \times r$, составленная из значений левых производных Фокса в кольце $\mathbf{Z}(\bar{S}_r)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если эндоморфизм φ индуцирует автоморфизм группы $F_r(\mathbf{A}_m\mathbf{A})$ $(m \geq 0)$, индуцированный некоторым автоморфизмом группы S_r, то*

$$\det(\partial_i g_j) = \pm a + m\alpha, \tag{1}$$

где a — некоторый элемент из $\bar{S}_r$, α — некоторый элемент из $\triangle$;

2) *при $r = 2$ верно и обратное, т. е. если $\det(\partial_i g_j)$ представим в виде (1), то φ индуцирует ручной автоморфизм группы $G_2 = F_2(\mathbf{A}_m\mathbf{A})$.*

Доказательство. 1. Пусть $\psi = \{x_1 \to h_1, \dots, x_r \to h_r\}$ — автоморфизм группы S_r, индуцирующий в группе $G_r = F_r(\mathbf{A}_m\mathbf{A})$ то же отображение, что и заданный эндоморфизм φ. Тогда $g_j = c_j^m h_j$, где $c_j \in S'_r$, $j = 1, \dots, r$. Так как $h_1, \dots, h_r$ — базис группы S_r, то $\det(\partial_i h_j)$ — обратимый элемент из $\mathbf{Z}(\overline{S}_r)$, т. е. $\det(\partial_i h_j) = \pm a$ для некоторого $a \in \overline{S}_r$. Ввиду того, что $\partial_i c_j \in \triangle$, имеем

$$\det(\partial_i g_j) = \det(\partial_i h_j + m\partial_i c_j) = \pm a + m\alpha$$

для некоторого $\alpha \in \triangle$.

2. Пусть $r = 2$ и $\det(\partial_i g_j)$ можно записать в виде (1). Через $\bar{g}$ обозначим образ элемента $g \in S_r$ в группе $\overline{S}_r$. Так как $\det(\partial_i g_j)$ обратим над кольцом $\mathbf{Z}_m(G_2/G_2')$, то из [10] следует, что g_1, g_2 — базис группы G_2. Тогда $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ — базис группы $\overline{S}_2$. Значит, для элемента $\alpha \in \triangle$ можно найти $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{Z}(\overline{S}_2)$ такие, что

$$\alpha = \alpha_1(\bar{g}_1 - 1) + \alpha_2(\bar{g}_2 - 1).$$

Обозначим

$$\alpha_{11} = \alpha_2(1 - \bar{x}_2), \quad \alpha_{12} = \alpha_2(\bar{x}_1 - 1), \quad \alpha_{21} = \alpha_1(\bar{x}_2 - 1), \quad \alpha_{22} = \alpha_1(1 - \bar{x}_1). \tag{2}$$

Так как

$$\alpha_{11}(\bar{x}_1 - 1) + \alpha_{12}(\bar{x}_2 - 1) = 0, \quad \alpha_{21}(\bar{x}_1 - 1) + \alpha_{22}(\bar{x}_2 - 1) = 0, \tag{3}$$

найдутся элементы c_1 и c_2 из коммутанта S_2' такие, что $\alpha_{ij} = \partial_j c_i$. Обозначим $h_i = c_i^m g_i$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\det(\partial_i h_j) = \det(\partial_i g_j) + m \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \partial_1 g_2 \\ \alpha_{12} & \partial_2 g_2 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} \partial_1 g_1 & \alpha_{21} \\ \partial_2 g_1 & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Так как $\partial_1 g_2(\bar{x}_1 - 1) + \partial_2 g_2(\bar{x}_2 - 1) = \bar{g}_2 - 1$, то

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \partial_1 g_2 \\ \alpha_{12} & \partial_2 g_2 \end{vmatrix} = \alpha_2(1 - \bar{g}_2).$$

Аналогично

$$\begin{vmatrix} \partial_1 g_1 & \alpha_{21} \\ \partial_2 g_1 & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_1(1 - \bar{g}_1).$$

Следовательно, $\det(\partial_i h_j) = \pm a$, т. е. h_1, h_2 — базис группы S_2. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть p — простое число, $n \geq 1$; $g_1, \dots, g_r$ — элементы свободной метабелевой группы S_r с базисом $x_1, \dots, x_r$. Эндоморфизм $\varphi = \{x_i \to g_i, i = 1, \dots, r\}$ группы S_r тогда и только тогда индуцирует автоморфизм группы $G_r = F_r(\mathbf{A}_{p^n}\mathbf{A})$, индуцированный некоторым автоморфизмом группы S_r, когда определитель матрицы $J_X(g) = (\partial_i g_j)$, составленной из значений левых производных Фокса в кольце $\mathbf{Z}(\overline{S}_r)$, можно записать в виде*

$$\det(\partial_i g_j) = \pm a + p^n \alpha \tag{4}$$

для некоторого $a \in \overline{S}_r$ и некоторого элемента α из фундаментального идеала $\triangle$ кольца $\mathbf{Z}(\overline{S}_r)$.

Доказательство. При $r = 2$ утверждение теоремы следует из леммы 1.

Заметим, что достаточно доказать утверждение теоремы для элементов $g_1, \dots, g_r$ вида

$$g_i = c_i^{p^n} x_i \text{ при } i = 1, \dots, r-2, \quad g_j = c_j^{p^n} d_j^p x_j \text{ при } j = r-1, r,$$

где c_i, c_j, d_j — элементы из коммутанта S_r', причем элементы d_j зависят только от x_{r-1}, x_r.

Действительно, система элементов $g_1, \dots, g_{r-2}$ примитивна в группе G_r и поэтому согласно [5] индуцирована примитивной системой элементов группы S_r. Выберем в группе S_r базис так, что $g_i = c_i^{p^n} x_i$ при $i = 1, \dots, r-2$. Определитель матрицы $(\partial_i g_j)$, составленной из значений производных в новом базисе, также имеет вид (4). Так как образы элементов $g_1, \dots, g_r$ составляют базис группы

$\overline{S}_r$, то, меняя, если нужно, два последних элемента базиса группы S_r, можно считать, что $g_j = u_j x_j$ при $j = r-1, r$, где $u_j \in S'_r$. Если в запись элемента u_j входит одна из переменных $x_1, \ldots, x_{r-2}$, то сопряжением некоторым элементом из группы $\langle x_1, \ldots, x_{r-2} \rangle$ придем от элемента

$$g_j = u_j x_j = w_j(x_{r-1}, x_r) x_i w'_j(x_1, \ldots, x_r) x_j$$

к элементу

$$g'_j = x_i w'_j(x_1, \ldots, x_r) x_j w_j(x_{r-1}, x_r).$$

Так как переход от элементов $g_1, \ldots, g_r$ к элементам $g_1, \ldots, g_{r-2}, g'_{r-1}, g'_r$ индуцирован ручным автоморфизмом, достаточно доказать теорему для системы элементов $g_1, \ldots, g_{r-2}, g'_{r-1}, g'_r$. Умножим элемент g'_j на элемент g_i^{-1} слева. Тем самым мы уменьшим число вхождений элементов $x_1, \ldots, x_{r-1}$ в ту часть элемента g'_j, которая не записывается в виде $c_j^{p^n}$. Продолжая процесс, мы придем к системе элементов

$$c_1^{p^n} x_1, \ldots, c_{r-2}^{p^n} x_{r-2},\ c_{r-1}^{p^n} u_1 x_{r-1},\ c_r^{p^n} u_2 x_r,$$

где $c_1, \ldots, c_r \in S'_r$, а элементы u_1 и u_2 зависят лишь от x_{r-1}, x_r.

Поскольку полученная система элементов образует базис в группе G_r, образы элементов $u_1 x_{r-1}$, $u_2 x_r$ составляют базис группы $F_2(\mathbf{A}_p\mathbf{A})$, порожденной образами элементов x_{r-1}, x_r. Но любой автоморфизм этой группы индуцирован автоморфизмом группы $F_2(\mathbf{A}^2)$. Поэтому от базиса x_{r-1}, x_r можно перейти к другому базису y_1, y_2 группы $F_2(\mathbf{A}^2)$, в котором $u_1 x_{r-1} = d_{r-1}^p y_1$, $u_2 x_r = d_r^p y_2$. Базис $x_1, \ldots, x_{r-2}, y_1, y_2$ обладает требуемым свойством.

Обозначим

$$M_1 = (\partial_i g_j)_{(r-2)\times(r-2)},\ \text{где } i = 1, \ldots, r-2;\ j = 1, \ldots, r-2;$$

$$M_2 = (\partial_i g_j)_{2\times 2},\ \text{где } i = r-1, r;\ j = r-1, r,$$

а производные вычисляются в новом базисе. Так как в новом базисе определитель матрицы $J(g)$ имеет вид (4), а $\det(M_1) = 1 + p^n\beta$, $\det(M_2) = 1 + p\gamma$ при некоторых $\beta, \gamma \in \triangle$, то

$$\pm a + p^n\alpha \equiv (1 + p^n\beta)(1 + p\gamma) \pmod{p^n\triangle}.$$

Применяя к этому равенству тривиализацию $\varepsilon : \mathbf{Z}(\overline{S}_r) \to \mathbf{Z}$, видим, что $a = 1$. Поэтому $p\gamma \in p^n\triangle$, т. е. $\gamma \in p^{n-1}\triangle$. Таким образом, $\det(M_2) = 1 + p^n\delta$, $\delta \in \triangle$. Но тогда по лемме 1 отображение

$$\chi = \{x_{r-1} \to d_{r-1}x_{r-1},\ x_r \to d_r x_r\}$$

индуцировано некоторым автоморфизмом группы $S_2 = \langle x_{r-1}, x_r \rangle$. Теорема доказана.

Из того, что каждый автоморфизм группы S_r является ручным при $r \neq 3$, получаем

Следствие 1. *При $r \neq 3$, любом $n \geq 1$ и простом p проблема распознавания ручных автоморфизмов группы $F_r(\mathbf{A}_{p^n}\mathbf{A})$ решается алгоритмически.*

Пример 1. Пусть $n \geq 2$, $1 \leq i \leq n-1$, $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Тогда отображение

$$\varphi = \{x_1 \to [x_1,x_2]^{p^i}x_1, x_2 \to [x_1,x_2]^{p^i}x_2, x_j \to x_j \text{ при } j = 3,\dots,r\}$$

индуцирует неручной автоморфизм группы $F_r(\mathbf{A}_{p^n}\mathbf{A})$, так как элемент $\det(\partial_i g_j) = 1 + p^i(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ в кольце $\mathbf{Z}_{p^n}(\overline{S}_r)$ обратим, но не представим в виде (4).

Напомним, что группа $S_{r,m}$ вложена в группу матриц вида

$$\begin{pmatrix} a + \triangle^m & (\alpha_1 + \triangle^m)t_1 + \dots + (\alpha_r + \triangle^m)t_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $a \in \overline{S}_r$; $\alpha_i \in \mathbf{Z}(\overline{S}_r)$; $t_1,\dots,t_r$ — базис свободного $\mathbf{Z}(\overline{S}_r)/\triangle^m$-модуля. Матрица вида (5) — образ некоторого элемента из $S_{r,m}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\bar{x}_i - 1) \equiv a - 1 \pmod{\triangle^m}.$$

Образом элемента $g \in S_r$ в группе матриц является

$$\begin{pmatrix} \bar{g} + \triangle^m & (\partial_1 g + \triangle^m)t_1 + \dots + (\partial_r g + \triangle^m)t_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\bar{g} \in \overline{S}_r$, $\partial_i g$ — значение производной Фокса в кольце $\mathbf{Z}(\overline{S}_r)$. Отсюда следует, что $\partial_i g \in \triangle^m$ для $i = 1,\dots,r$ тогда и только тогда, когда $g \in \gamma_{m+1}(S_r)$.

Лемма 2. 1. *Если отображение $\varphi = \{x_i \to g_i, i = 1,\dots,r\}$, $g_i \in S_r$, группы S_r индуцирует автоморфизм группы $S_{r,m}$, индуцированный некоторым автоморфизмом группы S_r, то*

$$\det(\partial_i g_j) = \pm a + \alpha, \tag{6}$$

где a — некоторый элемент из S_r, $\alpha \in \triangle^m$.

2. *При $r = 2$ верно и обратное, т. е. если $\det(\partial_i g_j)$ записывается в виде (6), то существует некоторый автоморфизм группы S_2, индуцирующий в группе $S_{2,m}$ то же отображение, что и эндоморфизм φ.*

Доказательство. 1. Пусть $\psi = \{x_i \to h_i,\ i = 1,\dots,r\}$ — автоморфизм группы S_r и $g_j = c_j h_j$, где $c_j \in \gamma_{m+1}(S_r)$. Тогда $\partial_i c_j \in \triangle^m$ и $\det(\partial_i g_j) = \pm a + \beta$, где $a \in \overline{S}_r, \beta \in \triangle^m$.

2. Пусть $r = 2$ и $\det(\partial_i g_j)$ можно записать в виде (6). Как и при доказательстве леммы 1, вычислим $\alpha_{ij} \in \triangle^m$, которые удовлетворяют условиям 3. Тогда найдутся $c_1, c_2 \in \gamma_{m+1}(S_r)$ такие, что $\alpha_{ij} = \partial_j c_i$. Так как $\det(\partial_i(c_j g_j)) = \pm a$, лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $m \geq 2$; $g_1,\dots,g_r$ — элементы свободной метабелевой группы S_r с базисом $x_1,\dots,x_r$. Эндоморфизм $\varphi = \{x_i \to g_i,\ i = 1,\dots,r\}$ группы S_r тогда и только тогда индуцирует автоморфизм группы $S_{r,m}$, индуцированный некоторым автоморфизмом группы S_r, когда определитель матрицы $J_X(g) = (\partial_i g_j)$, составленной из значений левых производных Фокса в кольце $\mathbf{Z}(\overline{S}_r)$, можно записать в виде*

$$\det(\partial_i g_j) = \pm a + \alpha, \tag{7}$$

где $a \in \overline{S}_r$, $\alpha \in \triangle^m$.

Доказательство. Используя аргументацию из доказательства теоремы 1 и тот факт, что любой автоморфизм свободной двуступенно нильпотентной группы $S_{r,2}$ индуцирован автоморфизмом группы S_r, получим, что достаточно рассмотреть систему элементов $g_1, \dots, g_r$ вида

$$g_i = c_i x_i \text{ при } i = 1, \dots, r-2; \quad g_j = c_j d_j x_j \text{ при } i = r-1, r,$$

где $c_i, c_j \in \gamma_{m+1}(S_r)$, $d_j \in \gamma_3(S_r)$ и d_j зависят только от x_{r-1}, x_r. Как и при доказательстве теоремы 1, получим

$$\pm a + \alpha = (\pm b + \beta) \cdot (\pm c + \gamma),$$

где $b, c \in \overline{S}_r$, $\beta \in \triangle^m$, $\gamma \in \triangle^2$. Тогда $\pm a - (\pm b) \cdot (\pm c) \in \triangle^2$. Это возможно лишь при $\pm a = (\pm b) \cdot (\pm c)$. Значит, $\gamma \in \triangle^m$, и теорема доказана.

Лемма 3. *Пусть A — свободная абелева группа с базисом $a_1, \dots, a_r$, α — элемент из кольца $\mathbf{Z}(A)$, $m \geq 1$. Вопрос о существовании элемента $a \in A$ такого, что*

$$\alpha \equiv \pm a \pmod{\triangle^m}, \tag{8}$$

где $\triangle$ — фундаментальный идеал кольца $\mathbf{Z}(A)$, решается алгоритмически при любом $m \geq 1$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon : \mathbf{Z}(A) \to \mathbf{Z}$ — тривиализация кольца $\mathbf{Z}(A)$. Если сравнение (8) имеет решение, то $\varepsilon(\alpha) = \pm 1$. Для определенности возьмем $\varepsilon(\alpha) = 1$, и тогда нужно рассматривать сравнение

$$\alpha \equiv a \pmod{\triangle^m}. \tag{9}$$

Умножая левую и правую части (9) на подходящий элемент из A, можно добиться того, что все слагаемые в α имеют вид $a_1^{m_1} \dots a_r^{m_r}$, где $m_i \geq 0$. Поэтому

$$\alpha = 1 + \sum_i l_i (a_1 - 1)^{p_{i1}} \dots (a_r - 1)^{p_{ir}},$$

где l_i — целые числа, $p_{ij} \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{r} p_{ij} < m$ при любом i.

Пусть искомый элемент a имеет вид $a_1^{x_1} \dots a_r^{x_r}$. Покажем, что существует лишь конечное множество возможных значений x_i и эти значения эффективно определяются. Действительно, пусть

$$\varepsilon_1 = \{a_1 \to a_1, a_j \to 1 \text{ при } j = 2, \dots, r\}$$

и $\triangle_1 = \varepsilon_1(\triangle)$. Если

$$\varepsilon_1(\alpha) = 1 + \beta_1(a_1 - 1) + \dots + \beta_{m-1}(a_1 - 1)^{m-1},$$

где β_i целые, то, вычисляя $(m-1)$-ю производную по a_1 от левой и правой части сравнения

$$\varepsilon_1(a) \equiv a_1^{x_1} \pmod{\triangle_1^m},$$

получим $\beta_{m-1}(m-1)! \equiv x_1(x_1 - 1) \dots (x_1 - m + 2) a_1^{x_1 - m + 1} \pmod{\triangle_1}$. При $a_1 = 1$ получим $\beta_{m-1}(m-1)! = x_1(x_1 - 1) \dots (x_1 - m + 2)$. Отсюда получаем только конечное число возможных значений для x_1. Так как вопрос о вхождении элемента из $\mathbf{Z}(A)$ в $\triangle^m$ решается алгоритмически, лемма доказана.

Следствие 2. *Вопрос о распознавании ручных автоморфизмов группы $S_{r,m}$ решается алгоритмически при любых $r \neq 3$ и $m \geq 2$.*

Пример 2. Эндоморфизм

$$\varphi = \{x_1 \to [x_1, x_2, x_1] x_1, x_i \to x_i \text{ при } \ i = 2, \dots, r\}$$

свободной метабелевой группы S_r индуцирует неручной автоморфизм группы $S_{r,3}$. Действительно, $\det(\partial_i g_j) = (\bar{x}_1 - 1)(1 - \bar{x}_2) + 1$. Равенство $\det(\partial_i g_j) = a$ невозможно при любом $a \in \overline{S}_r$.

§ 2. О ручных автоморфизмах метабелевых групп с одним определяющим соотношением

В обзоре [7] К. Гупты и Шпильрайна поставлен вопрос о существовании неручных автоморфизмов для групп с одним определяющим соотношением.

Обобщая ранее введенное понятие ручного автоморфизма для относительно свободных групп, мы назовем автоморфизм ϕ группы F_r/R ручным, если он индуцирован некоторым автоморфизмом группы F_r, т. е. $\alpha(R) \le R$ и $\alpha(f_i)R = \phi(f_iR)$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_r)$ и некоторого базиса $f_1, \dots, f_r$ группы F_r.

Вопрос о существовании неручных автоморфизмов для метабелевых групп с одним определяющим соотношением также интересен, так как при $r \ne 3$ все автоморфизмы свободной метабелевой группы являются ручными. Г. А. Носков [10] доказал теорему, дающую достаточные условия для того, чтобы метабелева группа с одним определяющим соотношением имела лишь ручные IA-автоморфизмы, т. е. автоморфизмы, тождественные на факторгруппе по коммутанту. Однако вопрос о существовании неручных автоморфизмов для метабелевых групп с одним определяющим соотношением не рассматривался.

Предложение 1. *Существуют метабелевы группы с одним определяющим соотношением, имеющие неручные IA-автоморфизмы.*

Доказательство. Как показано в [11], для любых $r \ge 2$ и не простого $n \ge 2$ группа $F_r(\mathbf{A}_n\mathbf{A})$ имеет автоморфизмы, не индуцированные автоморфизмами свободной метабелевой группы S_r. Пусть

$$\psi_1 = \{x_1 \to x_1c_1, x_2 \to x_2c_2\},$$

где $c_i \in S_2'$, — эндоморфизм группы S_2, индуцирующий неручной автоморфизм группы $F_2(\mathbf{A}_n\mathbf{A})$. Расширим ψ_1 до эндоморфизма ψ группы S_r, полагая $\psi(x_i) = x_i$ при $2 \le i \le r$.

Пусть R — нормальное замыкание элемента $[x_1, x_2]^n$ в группе S_r и $G = S_r/R$ — метабелева группа с одним определяющим соотношением. Покажем, что ψ индуцирует автоморфизм группы G. Действительно,

$$\psi([x_1, x_2]) = [x_1c_1, x_2c_2] = [x_1, x_2]^\gamma$$

для некоторого $\gamma \in \mathbf{Z}(\overline{S}_r)$. Поэтому $\psi(R) \le R$. Далее, ψ_1 индуцирует автоморфизм группы $F_2(\mathbf{A}_n\mathbf{A}) = S_2/\langle [x_1, x_2]^n \rangle^{S_2}$. Поэтому группа S_2 порождена нормальной подгруппой $\langle [x_1, x_2]^n \rangle^{S_2}$ и элементами x_1c_1 и x_2c_2. Значит, группа, порожденная элементами $x_1c_1, x_2c_2, x_3, \dots, x_r$ и подгруппой R, совпадает с S_r. Так как G — хопфова группа, то ψ индуцирует автоморфизм группы G.

Докажем, что этот автоморфизм не индуцирован автоморфизмом группы S_r. В противном случае найдутся $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \mathbf{Z}(\overline{S}_r)$ такие, что

$$y_1 = x_1c_1[x_1, x_2]^{n\gamma_1},\ y_2 = x_2c_2[x_1, x_2]^{n\gamma_2},\ y_3 = x_3[x_1, x_2]^{n\gamma_3}, \dots, y_r = x_r[x_1, x_2]^{n\gamma_r}$$

— базис группы S_r. Рассмотрим матрицу $J_X(Y) = (\partial_i y_j)_{r\times r}$, составленную из производных Фокса от элементов этого базиса. Она обратима тогда и только тогда, когда обратима матрица второго порядка, составленная из производных Фокса от элементов y_1 и y_2. Обратимость последней матрицы равносильна тому, что ψ_1 — ручной автоморфизм. Так как это не верно и при любом $r \ne 3$ все автоморфизмы группы S_r ручные, предложение доказано.

Предложение 2. *Проблема распознавания ручных автоморфизмов метабелевых групп с n порождающими и одним определяющим соотношением из коммутанта решается положительно при $n \neq 3$.*

Доказательство. Рассмотрим вначале более общую ситуацию. Пусть $g_1, \ldots, g_m \in S_r'$ и N — нормальное замыкание этих элементов в S_r, $G = S_r/N$. Предположим, что эндоморфизм $\phi = \{x_i \to y_i,\ i = 1, \ldots, r\}$ индуцирует в группе G автоморфизм $\bar{\phi}$. Автоморфизм $\bar{\phi}$ индуцирован некоторым автоморфизмом группы S_r тогда и только тогда, когда найдутся $h_1, \ldots, h_r \in N$ такие, что отображение $\alpha = \{x_i \to y_i h_i,\ i = 1, \ldots, r\}$ является автоморфизмом группы S_r. Так как $g_i \in S_r'$, то $h_i = g_1^{\gamma_{i1}} \ldots g_m^{\gamma_{im}}$ для некоторых $\gamma_{ij} \in \mathbf{Z}(\overline{S}_r)$.

Отображение α является автоморфизмом тогда и только тогда, когда матрица $(\partial_j(y_i h_i))_{r\times r}$ обратима. Заметим, что

$$\partial_j h_i = \sum_{l=1}^{m} \gamma_{il} \partial_j g_l.$$

Рассмотрим матрицы

$$A'_{r\times m} = (\gamma_{il}), \quad B'_{r\times r} = (\partial_j y_i), \quad B''_{m\times r} = (\partial_j g_l)$$

и единичную матрицу $E_{r\times r}$, где $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, $l \in \{1, \ldots, m\}$. Обозначим через $A_{r\times(r+m)}$ матрицу, левая часть которой совпадает с матрицей E, а правая — с матрицей A'. Обозначим через $B_{(r+m)\times r}$ матрицу, верхняя часть которой совпадает с матрицей B', а нижняя — с матрицей B''. Тогда $(\partial_j(y_i h_i)) = AB$. Известно (см. [12]), что определитель матрицы AB записывается в виде

$$\det(AB) = \sum_{\bar{u}} A(\bar{u}) B^t(\bar{u}),$$

где $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_r)$, $1 \leq u_1 < \cdots < u_r \leq r + m$, а $D(\bar{u})$ — минор r-го порядка матрицы D с r строками, вычисленный по столбцам $u_1, \ldots, u_r$, t — операция транспонирования. Заметим, что все миноры r-го порядка матрицы B'' равны нулю. Поэтому определитель матрицы $(\partial_j(y_i h_i))$ имеет степень не выше $\min(r-1, m)$ по переменным γ_{jl}. Если $m = 1$ или $r = 2$, то обратимость матрицы равносильна разрешимости уравнения вида

$$\sum_{p=1}^{v} t_p a_p + t_0 a_0 = 1 \tag{10}$$

относительно неизвестных $t_0, \ldots, t_v \in \mathbf{Z}(\overline{S}_r)$, причем t_0 — единица кольца $\mathbf{Z}(\overline{S}_r)$, а $a_p \in \mathbf{Z}(\overline{S}_r)$.

Вопрос о разрешимости (10) решается положительно. В самом деле, пусть c — неединичный элемент из S_r'. В группе

$$H = S_r / \langle c^{a_1}, \ldots, c^{a_v} \rangle^{S_r}$$

решается положительно проблема сопряженности [13]. Но элементы c и c^{a_0} сопряжены в H тогда и только тогда, когда уравнение (10) имеет решение при $t_0 \in -\overline{S}_r$. Аналогично, элементы c и c^{-a_0} сопряжены тогда и только тогда, когда (10) имеет решение при $t_0 \in \overline{S}_r$. Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bachmuth S., Mochizuki H. Y.* Infinite generation of automorphism groups // Proc. «Groups — Korea 1988». Pusan, 1988. P. 25–28.
2. *Chein O.* IA-automorphisms of free and free metabelian groups // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. P. 605–629.
3. *Bachmuth S., Mochizuki H. Y.* $\mathrm{Aut}(F) \to \mathrm{Aut}(F/F'')$ is surjective for F free of rank ≥ 4 // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 292. P. 81–101.
4. *Романьков В. А.* Группы автоморфизмов свободных метабелевых групп // Вопросы взаимосвязи абстрактной и прикладной алгебры. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. С. 53–80.
5. *Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И.* Примитивные системы элементов в многообразии $\mathbf{A}_m\mathbf{A}_n$: критерии и индуцирование // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 5. С. 513–530.
6. *Gupta C. K., Gupta N. D., Roman'kov V. A.* Primitivity in the free groups and free metabelian groups // Canad. J. Math. 1992. V. 44, N 3. P. 516–523.
7. *Gupta C. K., Shpilrain V.* Lifting automorphisms: a survey // Groups' 93, Galway St Andrews. London, 1993. P. 247–263. (Math. Soc. Lec. Note, ser. 211; V. 1).
8. *Turner E. C., Voce D. A.* Tame automorphisms of finitely generated abelian groups // Proc. Edin. Math. Soc. 1998. V. 41. P. 277–287.
9. *Gupta C. K., Roman'kov V. A.* Finite separability of tameness and primitivity in certain relatively free groups // Comm. Algebra. 1995. V. 23. P. 4101–4108.
10. *Носков Г. А.* О группах автоморфизмов метабелевых групп // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 1. С. 9–22.
11. *Gupta C. K., Timoshenko E. I.* Primitivity in the free groups of variety $\mathbf{A}_m\mathbf{A}_n$ // Comm. Algebra. 1996. V. 24, N 9. P. 2859–2876.
12. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
13. *Носков Г. А.* Проблема сопряженности для метабелевых групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 4. С. 495–507.

Статья поступила 19 января 1999 г.

г. Новосибирск