Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 517.95

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. И. Кабанихин, К. Т. Искаков

Аннотация: Исследован метод наискорейшего спуска решения задачи определения коэффициента в гиперболическом уравнении в интегральной постановке. Изучены свойства решений прямой и обратной задач. Получены оценки целевого функционала и его градиента. Доказана сходимость в среднем метода наискорейшего спуска, минимизирующего функционал невязки. Библиогр. 15.

1. Введение

Идея использования методов теории оптимального управления для решения обратных задач принадлежит А. Н. Тихонову [1] и А. С. Алексееву [2]. Для решения одномерной обратной задачи сейсмики метод сопряженных градиентов использовали и исследовали А. Бамберже, Ж. Шавен и П. Лэли [3], а также Ф. Сантоза и В. Саймс [4]. Оптимизационный подход к обратным задачам частотного зондирования в слоистых средах развивался в работе В. И. Дмитриева и Е. А. Федоровой [5]. Этот метод использован в работе Ш. Нямбаа и В. А. Чеверды [6] для решения обратной задачи геоэлектрики на фиксированной частоте. Для численного решения обратных задач геоэлектрики в слоистых и вертикально-неоднородных средах метод сопряженных градиентов применен в работе К. Т. Искакова и С. И. Кабанихина [7].

С обзором и библиографией работ, посвященных оптимизационному методу решения обратных задач, можно ознакомиться в работах В. Г. Романова, С. И. Кабанихина [8] и С. И. Кабанихина [9].

Во всех упомянутых работах обратные задачи об определении коэффициентов соответствующих уравнений сводились к задаче минимизации целевого функционала. Поясним сказанное на примере работы А. Л. Карчевского [10], в которой рассматривалась обратная задача

$$\mathrm{v}_{tt}(x,t) = \mathrm{v}_{xx}(x,t) - q(x)\mathrm{v}(x,t) + r(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{v}(x,0) = \varphi_0(x),\ \mathrm{v}_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

$$\mathrm{v}(x_0,t) = \nu_0(t),\ \mathrm{v}_x(x_0,t) = \nu_1(t), \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS — РФФИ (код проекта 99–01–00563).

Существование и единственность решения обратной задачи (1.1)–(1.3) в области $\Delta(x_0,t_0)=\{(x,t);\ 0<t<t_0,\ x_0-t_0+t<x<x_0+t_0-t\}$ доказаны в [11] для достаточно малого $t_0>0$, единственность и условная устойчивость — для любого $t_0>0$.

В [10] решение обратной задачи (1.1)–(1.3) сведено к минимизации целевого функционала

$$J_{(1)}[q]=\int\limits_0^T\left[\mathrm{v}_{tt}(x_0,t)-\nu_0''(t)\right]^2dt+\int\limits_0^T\left[\mathrm{v}_{xt}(x_0,t)-\nu_1'(t)\right]^2dt.$$

В работе [10] получена оценка скорости сходимости итерационного метода спуска с использованием предположения, что

$$q^{(n+1)}(x)\in\mathscr{M}=\{q(x);q(x)\in C[-T,T],\|q\|_{L_2(-T,T)}\le M\},\tag{1.4}$$

где $\mathscr{M}$ — некоторое множество корректности.

В работе [12] рассматривается обратная задача

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)-q(x)u(x,t),\quad x\in\mathbb{R},\ t>0,\tag{1.5}$$

$$u(x,0)=q(x),\quad u_t(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R},\tag{1.6}$$

$$u(0,t)=f(t),\quad u_x(0,t)=0,\quad t\ge 0.\tag{1.7}$$

Постановка задачи (1.5)–(1.7) непосредственно вытекает из (1.1)–(1.3), если положить $u(x,t)=\mathrm{v}_{tt}(x,t)$, $f(t)=\nu_0''(t)$, $\nu_1=0$, $\varphi_1=0$, $\varphi_0=-1$, $r=0$ и считать все рассматриваемые функции четными по x. Обратная задача (1.5)–(1.7) исследована в [9] на основе минимизации функционала

$$J_{(2)}[q]=\int\limits_0^T[u(0,t;q)-f(t)]^2\,dt.\tag{1.8}$$

Здесь обозначение $u(0,t;q)$ указывает на то, что $u(x,t)$ является следом решения прямой задачи (1.5)–(1.7) при некотором фиксированном q. Отметим, что в силу теоремы единственности решения обратной задачи (1.5)–(1.7) в области $\Delta(0,T)$ имеем $J_{(2)}(q)=0$ при точном решении обратной задачи.

В работе [9] показано, что функционал (1.8) имеет единственную стационарную точку. Для исследования функционала использовано представление $u(x,t)$ через резольвенту, которое позволило получить выражение для градиента функционала:

$$\nabla J_{(2)}[q]=\eta(t)-\int\limits_t^T\eta(\xi)B(\xi,t;q)d\xi,\quad t\in[0,T],\tag{1.9}$$

где

$$B(t,\xi;\tau)=\int\limits_0^{t-\xi}u(\xi,\tau)\left[1+\int\limits_\tau^t\int\limits_{\gamma_1^0}^{\gamma_2^0}b(\xi,\tau,\xi',\tau')d\xi'\,d\tau'\right]d\tau,$$

$$\eta(t)=u(0,t;q)-f(t),\quad b(x,t,\xi,\tau)=\sum_{n=0}^\infty b_n(x,t,\xi,\tau),$$

$$b_1(x,t,\xi,\tau) = q(\xi), \quad b_{n+1}(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{4}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} q(\xi')b_n(\xi,\tau,\xi',\tau')d\xi'\,d\tau',$$

$$\gamma_1 = \max\{x-t+\tau',\xi+\tau-\tau'\}, \quad \gamma_2 = \min\{x+t-\tau',\xi-\tau+\tau'\},$$

$$\gamma_1^0 = \max\{-t+\tau',\xi+\tau-\tau'\}, \quad \gamma_2^0 = \min\{t-\tau',\xi-\tau+\tau'\}.$$

Пытаясь решить обратную задачу (1.1)–(1.3) (или в постановке (1.5)–(1.7)) на основе минимизации функционалов $J_{(1)}$, $(J_{(2)})$ мы наталкиваемся на следующие трудности.

Во первых, существование классического решения прямой задачи (1.1), (1.2) предполагает принадлежность искомой функции классу C^1, C^2, а градиент функционала $J_{(1)}$ (а также $J_{(2)}$) определен при условии, что $q(x) \in L_2(0,T)$.

Во вторых, если предположить, что $q(x) \in L_2(0,T)$, то не удается доказать существование следа $u(0,t)$ решения прямой задачи (1.1), (1.2) в пространстве $L_2(0,T)$.

В данной работе сформулируем интегральную (обобщенную) постановку обратной задачи (1.5)–(1.7). Рассмотрим оптимизационную задачу с функционалом $J_{(3)}$ (определенным ниже в (3.2)). Докажем существование градиента для функционала $J_{(3)}$ в L_2 и получим оценку скорости сходимости в среднем метода наискорейшего спуска, свободную от ограничения вида (1.4).

Используя четное продолжение по t и формулу Даламбера, запишем интегральное представление решения задачи Коши (1.5), (1.7) в области $\Delta_*(T,0)$:

$$u(x,t) = F(x,t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} q(\xi)u(\xi,\tau)\,d\tau d\xi, \tag{1.10}$$

где

$$\Delta_*(x_0,t_0) = \{(x,t);\ 0 \le x \le x_0,\ t_0 - x_0 + x \le t \le t_0 + x_0 - x\},$$

$$F(x,t) = \frac{1}{2}[f(t+x) + f(t-x)].$$

Положим в (1.10) $t=0$ и воспользуемся (1.6)

$$q(x) = f(x) + \int\limits_0^x \int\limits_0^{x-\xi} q(\xi)u(\xi,\tau)\,d\tau d\xi, \quad x \in (0,T). \tag{1.11}$$

Прямая задача. *Зная* $f(t) \in L_2(-T,T)$ *и* $q(x) \in L_2(0,T)$, *найти* $u(x,t) \in L_2(\Delta_*(T,0))$, *удовлетворяющее* (1.10).

Обратная задача. *По известной* $f(t) \in L_2(-T,T)$ *найти* $q(x) \in L_2(0,T)$, *удовлетворяющую* (1.11) (в (1.11) $u = u(x,t;q)$ определяется через $q(x)$ из уравнения (1.10)).

2. Свойства решения прямой задачи в $L_2(\acute{}_*(T,0))$

Определим множество $\Omega(K) = \left\{g(x) : g(x) \in L_2(0,T),\ \|g\|^2_{L_2(0,T)} \le K^2\right\}$ и обозначим

$$\|u\|^2_{L_2(\Delta_*(x,0))} = \int\limits_0^x \int\limits_{-x+\xi}^{x-\xi} u^2(\xi,\tau)\,d\tau d\xi, \quad \|f\|^2_{L_2(0,x)} = \int\limits_0^x f^2(\xi)\,d\xi \le M^2,\ x \in (0,T), \tag{2.1}$$

$$\mathscr{A}_{t,x}[u] = \frac{1}{2}\int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} u(\xi,\tau)\,d\tau d\xi, \quad (x,t)\in\Delta_*(T,0), \tag{2.2}$$

$$\mathscr{B}_{\mu,\xi x}[u] = \frac{1}{2}\int_\xi^x \int_{\mu_1}^{\mu_2} u(\xi',\tau')\,d\tau' d\xi', \quad \mu=(t,\tau), \tag{2.3}$$

где $\mu_1 = \mu_1(t,x,\tau,\xi,\xi') = \max\{t-x+\xi', \tau-\xi+\xi'\}$, $\mu_2 = \mu_2(t,x,\tau,\xi,\xi') = \min\{t+x-\xi', \tau+\xi-\xi'\}$.

Лемма 2.1. *Пусть $v(x,t), u(x,t)\in L_2(\Delta_*(T,0))$, $q,\rho\in L_2(0,T)$. Тогда справедливы следующие соотношения ($(x,t)\in\Delta_*(T,0)$):*

(a) $\mathscr{A}_{t,x}[v(\xi,\tau)\mathscr{A}_{\tau,\xi}\{u(\xi',\tau')\}] = \mathscr{A}_{t,x}[u(\xi,\tau)\mathscr{B}_{\mu,\xi x}\{v(\xi',\tau')\}]$,

(b) $\int\limits_0^T q(x)\mathscr{A}_{0,x}[\rho(\xi)u]\,dx = \int\limits_0^T \rho(x)\int\limits_x^T q(\xi)\int\limits_0^{\xi-x} u(x,\tau)\,d\tau d\xi dx$,

(c) $\int\limits_{-x+\xi}^{x+\xi} \mathscr{A}_{\tau,\xi}[u^2]\,d\tau \le T\|u\|^2_{L_2(\Delta_*(\xi,0))}$, $\quad \xi\in(0,x)$,

(d) $\int\limits_{-x+\xi}^{x-\xi} [q^2(\tau+\xi)+q^2(\tau-\xi)]\,d\tau \le 8\|q\|^2_{L_2(0,x)}$,

(g) $\mathscr{A}_{\tau,\xi}[q^2] \le T\|q\|^2_{L_2(0,\xi)}$.

Доказательство. (a) Согласно обозначению оператора $\mathscr{A}_{t,x}$ имеем

$$I_0 = \mathscr{A}_{t,x}[v\mathscr{A}_{\tau,\xi}u] = \frac{1}{4}\int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} v(\xi,\tau)\int_0^\xi \int_{\tau-\xi+\xi'}^{\tau+\xi-\xi'} u(\xi',\tau')\,d\tau' d\xi' d\tau d\xi.$$

Так как пределы интегрирования во втором и третьем интегралах не зависят от ξ', τ, то, меняя их местами, получим

$$I_0 = \frac{1}{4}\int_0^x \int_0^\xi v(\xi,\tau)\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}\int_{\tau-\xi+\xi'}^{\tau+\xi-\xi'} u(\xi',\tau')\,d\tau' d\tau d\xi' d\xi.$$

Заменим пределы интегрирования по переменным τ',τ:

$$I_0 = \frac{1}{4}\int_0^x \int_0^\xi v(\xi,\tau)\int_{t-x+\xi'}^{t+x-\xi'}\int_{\mu_1'}^{\mu_2'} u(\xi',\tau')\,d\tau d\tau' d\xi' d\xi,$$

где $\mu_1' = \mu_1(t,x,\tau',\xi',\xi)$, $\mu_2' = \mu_2(t,x,\tau',\xi',\xi)$.

Меняя местами пределы интегрирования по переменным ξ',ξ, получим

$$I_0 = \frac{1}{4}\int_0^x \int_{\xi'}^x v(\xi,\tau)\int_{t-x+\xi'}^{t+x-\xi'}\int_{\mu_1'}^{\mu_2'} u(\xi',\tau')\,d\tau d\tau' d\xi d\xi'.$$

Заметим, что во втором и третьем интегралах пределы интегрирования не зависят от τ', ξ, поэтому

$$I_0 = \frac{1}{4}\int_0^x \int_{t-x+\xi'}^{t+x-\xi'} u(\xi',\tau')\int_{\xi'}^x \int_{\mu_1'}^{\mu_2'} v(\xi,\tau)\,d\tau d\xi d\tau' d\xi'.$$

Теперь, меняя ролями ξ' и ξ, а также τ' и τ, получим (a).

(b) Заменим пределы интегрирования по переменным ξ, x:

$$I_1 = \int_0^T q(x) \int_\xi^T \int_0^{x-\xi} \rho(\xi) u(\xi,\tau)\, d\tau dx d\xi = \int_0^T \rho(\xi) \int_\xi^T q(x) \int_0^{x-\xi} u(\xi,\tau)\, d\tau dx d\xi.$$

Меняя ролями переменные ξ, x, видим, что из последнего вытекает формула (b).

(c) Имеем

$$I_3 = \int_{-x+\xi}^{x-\xi} \mathscr{A}_{\tau,\xi}[u^2]\, d\tau = \frac{1}{2} \int_{-x+\xi}^{x-\xi} \int_0^\xi \int_{\tau-\xi+\xi'}^{\tau+\xi-\xi'} u^2(\xi',\tau')\, d\tau' d\xi'\, d\tau.$$

Заменим пределы интегрирования. Так как пределы интегрирования во внешнем и среднем интегралах не зависят от ξ', τ, их можно поменять местами. Область изменения по переменным τ', τ имеет вид $-x+\xi' < \tau' < x-\xi'$, а $\mu'_{1,0} < \tau < \mu'_{2,0}$ $\mu'_{1,0} = \mu_1(0,x,\tau',\xi',\xi)$, $\mu'_{2,0} = \mu_2(0,x,\tau',\xi',\xi)$. Таким образом, принимая во внимание обозначение (2.1), окончательно запишем

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_0^\xi \int_{-x+\xi'}^{x-\xi'} u^2(\xi',\tau') \int_{\mu'_{1,0}}^{\mu'_{2,0}} d\tau\, d\tau' d\xi' \le T\|u\|^2_{L_2(\Delta_*(\xi,0))}.$$

(d) Имеем

$$\int_{-x+\xi}^{x-\xi} [\rho^2(\tau+\xi) + \rho^2(\tau-\xi)]\, d\tau = \int_{-x+\xi}^0 \rho^2(\tau+\xi)\, d\tau + \int_0^{x-\xi} \rho^2(\tau+\xi)\, d\tau$$
$$+ \int_{-x+\xi}^0 \rho^2(\tau-\xi)\, d\tau + \int_0^{x-\xi} \rho^2(\tau-\xi)\, d\tau = \int_{-x+2\xi}^\xi \rho^2(\lambda)\, d\lambda + \int_\xi^x \rho^2(\lambda)\, d\lambda$$
$$+ \int_{-x}^{-\xi} \rho^2(\beta) d\beta + \int_{-\xi}^{x-2\xi} \rho^2(\beta) d\beta \le 4 \int_{-x}^x \rho^2(\lambda)\, d\lambda = 8\|q\|^2_{L_2(0,x)}.$$

Для доказательства оценки (g) заметим, что

$$\mathscr{A}_{\tau,\xi}[q^2(\xi')] = \frac{1}{2} \int_0^\xi q^2(\xi') \int_{\tau-\xi+\xi'}^{\tau+\xi-\xi'} d\tau' d\xi' \le T \int_0^\xi q^2(\xi') d\xi' = T\|q\|^2_{L_2(0,\xi)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если $f(x) \in L_2(-T,T)$, то решение уравнения* (1.10) *существует, единственно в $L_2(\Delta_*(T,0))$ и верна оценка*

$$\|u\|^2_{L_2(\Delta_*(x,0))} \le c_0 \|f\|^2_{L_2(0,x)} \quad \forall x \in (0,T), \quad c_0 = 8T \exp(2T^3K^2). \tag{2.4}$$

Доказательство. Существование решения в $L_2(\Delta_*(T,0))$ следует из работы [13]. Запишем представление (1.10) в точке $(\xi,\tau) \in \Delta_*(x,t)$ и возведем обе части в квадрат. Используя неравенство Гёльдера, получим

$$u^2(\xi,\tau) \le f^2(\tau+\xi) + f^2(\tau-\xi) + 2\mathscr{A}_{\tau,\xi}[q^2(\xi')]\mathscr{A}_{\tau,\xi}[u^2(\xi',\tau')].$$

Учитывая оценку (a) из леммы 2.1, имеем $u^2(\xi,\tau) \le f^2(\tau+\xi) + f^2(\tau-\xi) + 2TK^2\mathscr{A}_{\tau,\xi}[u^2]$. Интегрируя обе части по переменной τ от $-x+\xi$ до $x-\xi$ и используя свойства (c), (d) из леммы 2.1, получим

$$\int\limits_{-x+\xi}^{x-\xi} u^2(\xi,\tau)\,d\tau \le 8\|f\|^2_{L_2(0,x)} + 2K^2T^2\|u\|_{L_2(\Delta_*(\xi,0)}.$$

Интегрируем обе части по ξ от 0 до λ, где $\lambda \in [0,x]$:

$$\|u\|^2_{L_2(\Delta_*(\lambda,0))} \le 8\lambda\|f\|^2_{L_2(0,x)} + 2T^2K^2\int\limits_0^\lambda \|u\|^2_{L_2(\Delta_*(\xi,0))}d\xi.$$

Применяя лемму Гроноулла, находим $\|u\|^2_{L_2(\Delta_*(\lambda,0))} \le 8\lambda\|f\|^2_{L_2(0,x)}\exp(2T^2K^2\lambda)$ для любого $\lambda \in [0,x]$, в частности, $\|u\|^2_{L_2(\Delta_*(x,0))} \le c_0\|f\|^2_{L_2(0,x)}$, $x \in (0,T)$. Лемма доказана.

Следствие 2.1. *В условиях леммы* 2.2 *справедлива оценка*

$$\|u(x,0)\|^2_{L_2(0,T)} \le c_1\|f\|^2_{L_2(0,T)}, \quad c_1 = 2 + c_0TK^2.$$

Теорема 2.1. *Решение уравнения* (1.10) *представимо в виде*

$$u(x,t) = F(x,t) + \mathscr{A}_{t,x}[H_{(q)}\cdot F], \quad (x,t)\in\Delta_*(T,0), \tag{2.5}$$

$$H_{(q)}(t,x,\tau,\xi) \in L_2(\Delta_*(T,0)\times\Delta_*(T,0)).$$

Здесь

$$H_{(q)}(t,x,\tau,\xi) = \sum_{n=1}^\infty H_{(q)n}(t,x,\tau,\xi), \tag{2.6}$$

$$H_{(q)1}(t,x,\tau,\xi) = q(\xi), \tag{2.7}$$

$$H_{(q)n+1}(t,x,\tau,\xi) = \mathscr{B}_{\mu,\xi x}[q(\xi')H_{(q)n}(\tau',\xi',\tau,\xi)], \quad n \ge 1. \tag{2.8}$$

Доказательство. Будем искать решение интегрального уравнения (1.10) в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^\infty u_n(x,t).$$

Положим $u_0(x,t) = F(x,t)$, $u_{n+1}(x,t) = \mathscr{A}_{t,x}[qu_n]$, $n = 1,2,\dots$. Докажем методом математической индукции, что

$$u_n(x,t) = \mathscr{A}_{t,x}[H_{(q)n}F]. \tag{2.9}$$

Для $n = 1$ имеем $u_1(x,t) = \mathscr{A}_{t,x}[qF] = \mathscr{A}_{t,x}[H_{(q)1}F]$. Предположим, что (2.9) выполнено для некоторого $k > 1$ и докажем, что тогда оно выполнено для $k+1$. В самом деле, $u_{k+1} = \mathscr{A}_{t,x}[qu_k] = \mathscr{A}_{t,x}[q\mathscr{A}_{\tau,\xi}(H_{(q)k}F)]$. Меняя порядок интегрирования в последнем выражении, получаем $u_{k+1} = \mathscr{A}_{t,x}[H_{(q)k+1}F]$.

Суммируя (2.9) по n от 1 до ∞ и учитывая, что $u_0(x,t) = F(x,t)$, приходим к равенству (2.5).

Докажем вторую часть теоремы. Просуммировав (2.8) по n от 1 до ∞, с учетом (2.7), (2.6) имеем

$$H_{(q)}(t,x,\tau,\xi) = q(x) + \mathscr{B}_{\mu,\xi x}[q(\xi')H_{(q)}(\tau',\xi',\tau,\xi)]. \tag{2.10}$$

Докажем сходимость ряда (2.6) в $L_2(\Delta_*(T,0)\times\Delta_*(T,0))$. Рассмотрим (2.8):

$$H_{(q)n+1}(t,x,\tau,\xi)=\mathscr{B}_{\mu,\xi x}[H_{(q)n}(\tau',\xi',\tau,\xi)].$$

Возведем обе части в квадрат и, используя неравенство Коши — Буняковского, находим

$$H^2_{(q)n+1}(t,x,\tau,\xi)\le\mathscr{B}_{\mu,\xi x}[q^2(\xi')]\mathscr{B}_{\mu,\xi x}\bigl[H^2_{(q)n}(\tau,\xi,\tau',\xi')\bigr].$$

Интегрируя обе части по τ и ξ в области $\Delta_*(x,t)$ и меняя порядок интегрирования, получим $\mathscr{A}_{t,x}\bigl[H^2_{(q)n+1}(t,x,\tau,\xi)\bigr]\le TK^2\mathscr{A}_{t,x}\bigl[\mathscr{A}_{\tau,\xi}(H^2_{(q)n})\bigr]$. Обозначим $P_{(n)}(t,x)=\mathscr{A}_{t,x}[H_{(q)n}(t,x,\tau,\xi)]$ и запишем последнее неравенство иначе:

$$P_{(n+1)}(t,x)\le TK^2\mathscr{A}_{t,x}\bigl[P^2_{(n)}(\tau,\xi)\bigr].$$

Интегрируя обе части по t от $-T$ до T, имеем

$$\int\limits_{-T}^{T}P^2_{(n+1)}(t,x)dx\le T^2K^2\int\limits_0^x\int\limits_{-T}^{T}P^2_{(n)}(\xi,\tau)\,d\tau d\xi.$$

Обозначим $W^2_{(n)}(x)=\int\limits_{-T}^{T}P^2_{(n)}(t,x)\,dt$. Тогда

$$W^2_{(n+1)}(x)\le T^2K^2\int\limits_0^x W^2_{(n)}(\xi)\,d\xi. \tag{2.11}$$

Методом математической индукции нетрудно доказать, что

$$W^2_{(n)}(x)\le 2T^2K^2\frac{(T^2K^2x)^n}{n!},\quad n=1,2,\dots. \tag{2.12}$$

Интегрируя (2.7) по ξ и τ в области $\Delta_*(x,t)$, затем по t от $-T$ до T, получаем $W^2_{(1)}(x)\le 2T^2K^2$. Предположим, что (2.12) выполнено для $n=k$ и докажем, что тогда

$$W^2_{(k+1)}(x)\le 2T^2K^2\frac{(T^2K^2x)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

В самом деле, согласно (2.11)

$$W^2_{(k+1)}(x)\le T^2K^2\int\limits_0^x W^2_{(k)}(\xi)d\xi\le T^2K^2\int\limits_0^x 2T^2K^2\frac{(T^2K^2\xi)^k}{k!}\,d\xi$$
$$=2T^2K^2\frac{(T^2K^2x)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Следовательно, (2.12) справедливо для всех n.

Рассмотрим частичные суммы ряда (2.6):

$$S_n(t,x,\tau,\xi)=H_{(q)1}(t,x,\tau,\xi)+H_{(q)2}(t,x,\tau,\xi)+\dots+H_{(q)n}(t,x,\tau,\xi).$$

Поскольку

$$\|S_n\|_{L_2(\Delta_*(T,0)\times\Delta_*(T,0))}=\Bigl\|\sum_{j=1}^n H_{(q)j}\Bigr\|_{L_2(\Delta_*(T,0)\times\Delta_*(T,0))}$$
$$\le\sum_{j=1}^n\|H_{(q)j}\|_{L_2(\Delta_*(T,0)\times\Delta_*(T,0))},$$

в силу (2.12) ряд (2.6) сходится в $L_2(\Delta_*(T,0)\times\Delta_*(T,0))$.

Очевидно, что

$$S_{n+1}(t,x,\tau,\xi)=q(x)+\mathscr{B}_{\mu,\xi x}[q(\xi')S_n(\tau',\xi',\tau,\xi)]. \tag{2.13}$$

Переходя в (2.13) к пределу при $n\to\infty$, получим, что сумма ряда (2.6) является решением уравнения (2.10). Теорема доказана.

3. Целевой функционал. Свойства решения обратной задачи

Пусть $p(x)$ — приближенное решение обратной задачи (1.11). Определим невязку

$$\eta(x)=p(x)-\int_0^x\int_0^{x-\xi}p(\xi)u(\xi,\tau;p)\,d\tau d\xi-f(x),\quad x\in(0,T). \tag{3.1}$$

Здесь $u(x,t;p)$ — решение уравнения

$$u(x,t;p)=F(x,t)+\mathscr{A}_{t,x}[pu(\xi,\tau;p)].$$

Для решения обратной задачи (1.11) будем минимизировать следующий функционал:

$$J_{(3)}[p]=\int_0^T\left[p(x)-\int_0^x\int_0^{x-\xi}p(\xi)u(\xi,\tau;p)\,d\tau d\xi-f(x)\right]^2dx. \tag{3.2}$$

В дальнейшем для удобства нижний индекс в обозначении функционала опустим. Зададим приращение δp и запишем

$$\Delta J[p]=J[p+\delta p]-J[p]=\int_0^T\{\eta(x)+\delta p(x)-\mathscr{A}_{0,x}[u\delta p+(p+\delta p)\delta u]\}^2\,dx-\int_0^T\eta^2(x)\,dx. \tag{3.3}$$

После несложных преобразований получим

$$\Delta J[p]=2\int_0^T\{\delta p(x)-\mathscr{A}_{0,x}[u\delta p+p\delta u]\}\eta(x)\,dx+J_0, \tag{3.4}$$

где

$$J_0=\int_0^T\{\delta p(x)-\mathscr{A}_{0,x}[u\delta p+(p+\delta p)\delta u]\}^2dx-2\int_0^T\mathscr{A}_{0,x}[\delta p\delta u]\eta(x)\,dx. \tag{3.5}$$

Нетрудно заметить из (1.10), что

$$\delta u(x,t;p)=\mathscr{A}_{t,x}[u\delta p+(p+\delta p)\delta u],\quad (x,t)\in\Delta_*(T,0). \tag{3.6}$$

Обозначим

$$\Phi(x,t)=\mathscr{A}_{t,x}[u\delta p],\quad (x,t)\in\Delta_*(T,0),\quad \Phi_*(x,y)=\Phi(x,t)+\mathscr{A}_{t,x}[\delta p\delta u]$$

и перепишем (3.6) в виде

$$\delta u(x,t;p) = \Phi_*(x,t) + \mathscr{A}_{t,x}[p\delta u], \quad (x,t) \in \Delta_*(T,0). \tag{3.7}$$

Используя представление (2.5) (см. теорему 2.1), имеем

$$\delta u(x,t;p) = \Phi_*(x,t) + \mathscr{A}_{t,x}[H_{(p)}\Phi_*], \quad (x,t) \in \Delta_*(T,0), \tag{3.8}$$

где

$$H_{(p)}(t,x,\tau,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{(p)n}(t,x,\tau,\xi), \quad H_{(p)1}(t,x,\tau,\xi) = p(x),$$

$$H_{(p)n+1}(t,x,\tau,\xi) = \mathscr{B}_{\mu,\xi x}[p(\xi')H_{(p)n}(\tau',\xi',\tau,\xi)], \quad n = 1,2,\dots.$$

Запишем представление (3.8) иначе:

$$\delta u(x,t;p) = \Phi(x,t) + \mathscr{A}_{t,x}[H_{(p)}\Phi] + \mathscr{A}_{t,x}[\delta p\delta u] + \mathscr{A}_{t,x}[H_{(p)}\mathscr{A}_{\tau,\xi}(\delta p\delta u)]. \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) в (3.4), получим

$$\Delta J[p] = 2\int_0^T \{\delta p(x) - \mathscr{A}_{0,x}[u\delta p] - \mathscr{A}_{0,x}[p(\Phi(\xi,\tau) + \mathscr{A}_{\tau,\xi}[H_{(p)}\Phi])]\}\eta(x)\,dx$$

$$+ J_0 + J_5 = \sum_{j=0}^{5} J_j, \tag{3.10}$$

где

$$J_1 = 2\int_0^T \delta p(x)\eta(x)\,dx, \quad J_2 = -2\int_0^T \mathscr{A}_{0,x}[u\delta p]\eta(x)\,dx,$$

$$J_3 = -2\int_0^T \mathscr{A}_{0,x}[p\Phi]\eta(x)\,dx, \quad J_4 = -2\int_0^T \mathscr{A}_{0,x}[p\mathscr{A}_{\tau,\xi}(H_{(p)}\Phi)]\eta(x)\,dx,$$

$$J_5 = -2\int_0^T \mathscr{A}_{0,x}[p\mathscr{A}_{\tau,\xi}(\delta p\delta u)]\eta(x)\,dx - 2\int_0^T \mathscr{A}_{0,x}[p\mathscr{A}_{\tau,\xi}\{H_{(p)}\mathscr{A}_{\tau',\xi'}(\delta p\delta u)\}]\eta(x)\,dx.$$

Поменяем порядок интегрирования в интегралах J_2, J_3, J_4. Используя формулу (b) из леммы 2.1, для J_2 имеем

$$J_2 = -2\int_0^T \delta p(x)\left\{\int_x^T \eta(\xi)\int_0^{\xi-x} u(x,\tau)\,d\tau d\xi\right\}dx.$$

Преобразуем J_3. Последовательно применяя формулы (a) и (b), получим

$$J_3 = -2\int_0^T \eta(x)\mathscr{A}_{0,x}[\delta p(\xi)u(\xi,\tau)\mathscr{B}_{\mu_0,\xi x}\{p(\xi')\}]\,dx$$

$$= -2\int_0^T \delta p(x)\left\{\int_x^T \eta(\xi)\int_0^{\xi-x} u(x,\tau)\mathscr{B}_{\mu_*,x\xi}\{p(\xi')\}\,d\tau d\xi\right\}dx,$$

где $\mu_0 = (0, \tau)$, $\mu_* = (0, \tau)$,

$$\mu_{1,0} = \mu_1(0, x, \tau, \xi, \xi') = \max\{-x + \xi', \tau - \xi + \xi'\},$$

$$\mu_{2,0} = \mu_2(0, x, \tau, \xi, \xi') = \min\{x - \xi', \tau + \xi - \xi'\},$$

$$\mu_{1,0}^* = \mu_1(0, \xi, \tau, x, \xi') = \max\{-\xi + \xi', \tau - x + \xi'\},$$

$$\mu_{2,0}^* = \mu_2(0, \xi, \tau, x, \xi') = \min\{\xi - \xi', \tau + x - \xi'\}.$$

Выражение для J_4 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} J_4 = -2 \int_0^T \mathscr{A}_{0,x}[p\mathscr{A}_{\tau,\xi}\{H_{(p)}\mathscr{A}_{\tau',\xi'}[u\delta p]\}]\eta(x)\,dx \\ = -2 \int_0^T \eta(x)\mathscr{A}_{0,x}[p\mathscr{A}_{\tau,\xi}\{\delta p(\xi')u(\xi', \tau')\mathscr{B}_{\mu',\xi'\xi}[H_{(p)}]\}]\,dx \\ = -2 \int_0^T \eta(x)\mathscr{A}_{0,x}[\delta p(\xi)u(\xi, \tau)\mathscr{B}_{\mu_0,\xi x}\{p(\xi')\mathscr{B}_{\mu',\xi'\xi}[H_{(p)}]\}]\,dx \\ = -2 \int_0^T \delta p(x) \left\{ \int_x^T \eta(\xi) \int_0^{\xi - x} u(x, \tau)\mathscr{B}_{\mu_*,x\xi}[p(\xi')\mathscr{B}_{\mu',\xi' x}\{H_{(p)}\}]\,d\tau d\xi \right\} dx, \end{aligned}$$

где $\mu' = (\tau, \tau')$, $\mu_1' = \mu_1(\tau, \xi, \tau', \xi', \xi'')$, $\mu_2' = \mu_2(\tau, \xi, \tau', \xi', \xi'')$. Подставляя полученные выражения для J_2, J_3, J_4 в (3.10) и вводя обозначение

$$G(\xi, x; p) = \int_0^{\xi - x} u(x, \tau)\{1 + \mathscr{B}_{\mu_*,x\xi}[p(\xi')] + \mathscr{B}_{\mu_*,x\xi}[p(\xi')\mathscr{B}_{\mu',\xi' x}\{H_{(p)}\}]\}\,d\tau, \quad (3.11)$$

запишем приращение функционала в следующем виде:

$$\Delta J[p] = 2 \int_0^T \delta p(x) \left[\eta(x) - \int_x^T \eta(\xi) G(\xi, x; p) d\xi \right] dx + J_0 + J_5. \quad (3.12)$$

Следовательно,

$$\Delta J[p] = (\delta p, \nabla J[p]) + o(\|\delta p\|_{L_2(0,T)}).$$

Тем самым доказана

Лемма 3.1. *Пусть $p(x) \in \Omega(K)$. Тогда функционал (3.2) дифференцируем, его градиент $\nabla J[p]$ принадлежит $L_2(\Delta_*(T, 0))$ и представим в виде*

$$\nabla J[p] = 2 \left\{ \eta(x) - \int_x^T \eta(\xi) G(\xi, x; p) d\xi \right\}. \quad (3.13)$$

Лемма 3.2. *Пусть $p(x)$, $\delta p(x) \in \Omega(K)$. Тогда для решения уравнения* (3.6) *верна оценка*

$$\|\delta u\|^2_{L_2(\Delta_*(x,0))} \le c_2^2 \|\delta p\|^2_{L_2(0,x)}, \tag{3.14}$$

где $c_2^2 = 2T^2 c_0 M^2 \exp(2T^3K^2)$, $x \in (0,T)$.

Доказательство. Пренебрегая членами второго порядка малости, запишем (3.6) в точке (ξ,τ), т. е. $\delta u(\xi,\tau;p) = \mathscr{A}_{\tau,\xi}[u\delta p + p\delta u]$. Проводя рассуждения, как при доказательстве леммы 2.2, перейдем к неравенству

$$\delta^2 u(\xi,\tau;p) \le 2\mathscr{A}_{\tau,\xi}[u^2]\mathscr{A}_{\tau,\xi}[\delta^2 p] + 2\mathscr{A}_{\tau,\xi}[p^2]\mathscr{A}_{\tau,\xi}[\delta^2 u]$$

и получим следующую оценку:

$$\|\delta u\|^2_{L_2(\Delta_*(\lambda,0))} \le 2T^2 c_0 M^2 \|\delta p\|^2_{L_2(0,\lambda)} \exp(2T^2K^2\lambda),$$

которая справедлива для любого $\lambda \in [0,x]$. В частности, при $\lambda = x$ вытекает требуемая оценка (3.14). Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть $p(x), \delta p(x) \in \Omega(K)$. Тогда*

$$|\Delta J[p] - (\delta p, \nabla J[p])| \le C_1 \|\delta p\|^2_{L_2(0,T)}, \tag{3.15}$$

где

$$C_1 = 2 + 2Tc_0M^2 + 8Tc_2^2K^2 \\ + \sqrt{2}T^2 c_2 K(4K^2 + 4M^2 + TK^2c_0M^2)[1 + KT^2\sqrt{\exp(T^3K^2)}].$$

Доказательство. Из (3.12) вытекает, что

$$|\Delta J[p] - (\delta p, \nabla J[p])| < |J_0| + |J_5|.$$

Оценим вначале J_0. Из (3.5) следует, что

$$|J_0| \le \left| \int_0^T \{\delta p(x) - \mathscr{A}_{0,x}[u\delta p + (p+\delta p)\delta u]\}^2\,dx \right| \\ + 2\left| \int_0^T \mathscr{A}_{0,x}[\delta p \delta u]\eta(x)\,dx \right| = J_{0,1} + J_{0,2}.$$

Очевидно, что

$$J_{0,1} \le 2\int_0^T \delta^2 p(x)\,dx + 4\int_0^T (\mathscr{A}_{0,x}[u\delta p])^2\,dx + 4\int_0^T (\mathscr{A}_{0,x}[(p+\delta p)\delta u])^2\,dx \\ \le 2\|\delta p\|^2_{L_2(0,T)} + 2T\int_0^T \|u\|^2_{L_2(\Delta_*(x,0))}\|\delta p\|^2_{L_2(0,x)}\,dx \\ + 4T\int_0^T \|\delta u\|^2_{L_2(\Delta_*(x,0))}(\|p\|^2_{L_2(0,x)} + \|\delta p\|^2_{L_2(0,x)})\,dx.$$

Используя оценки (2.4) и (3.14), из лемм 2.2, 3.2 получим

$$J_{0,1} \le \|\delta p\|^2_{L_2(0,T)}(2 + 2Tc_0M^2 + 8Tc_2^2K^2).$$

Очевидно, что

$$J_{0,2} \le 2\left[\int_0^T \mathscr{A}_{0,x}[\delta^2 p]\mathscr{A}_{0,x}[\delta^2 u]\,dx \int_0^T \eta^2(x)\,dx\right]^{1/2}.$$

Рассмотрим каждый интеграл в отдельности:

$$2\int_0^T \mathscr{A}_{0,x}[\delta^2 p]\mathscr{A}_{0,x}[\delta^2 u]\,dx \le \int_0^T T\|\delta p\|^2_{L_2(0,x)}\|\delta u\|^2_{L_2(0,x)}\,dx \le T^2 c_2^2\|\delta p\|^4_{L_2(0,T)},$$

$$\int_0^T \eta^2(x)\,dx \le 4\int_0^T p^2(x)\,dx + 4\int_0^T f^2(x)\,dx + 2\int_0^T (\mathscr{A}_{0,x}[pu])^2\,dx$$
$$\le 4(K^2+M^2) + TK^2c_0M^2 = c_3^2.$$

Следовательно,

$$J_{0,2} \le Tc_2c_3\|\delta p\|^2_{L_2(0,T)}, \quad J_0 \le c_4\|\delta p\|^2_{L_2(0,T)},$$

где $c_4 = 2 + 2Tc_0M^2 + 8Tc_2^2K^2 + Tc_2c_3$.

Для завершения доказательства теоремы остается оценить

$$|J_5| \le 2\left|\int_0^T \mathscr{A}_{0,x}[p\mathscr{A}_{\tau,\xi}(\delta p\delta u)]\eta(x)\,dx\right|$$
$$+ 2\left|\int_0^T \mathscr{A}_{0,x}[p\mathscr{A}_{\tau,\xi}\{H_{(p)}\mathscr{A}_{\tau',\xi'}[\delta p\delta u]\}]\eta(x)\,dx\right| = J_{5,1} + J_{5,2}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$J_{5,1} \le 2\left[\int_0^T (\mathscr{A}_{0,x}[p\mathscr{A}_{\tau,\xi}(\delta p\delta u)])^2\,dx \int_0^T \eta^2(x)\,dx\right]^{1/2}$$
$$\le 2c_3\left[\int_0^T \mathscr{A}_{0,x}[p^2]\mathscr{A}_{0,x}[\mathscr{A}_{\tau,\xi}(\delta^2 p)\mathscr{A}_{\tau,\xi}(\delta^2 u)]\,dx\right]^{1/2}$$
$$\le 2c_3\left[\int_0^T x\|p\|^2_{L_2(0,x)}\mathscr{A}_{0,x}\left[\xi\|\delta p\|^2_{L_2(0,\xi)}\mathscr{A}_{\tau,\xi}(\delta^2 u)\right]dx\right]^{1/2}$$
$$\le 2c_3TK\|\delta p\|_{L_2(0,T)}\left[\int_0^T \mathscr{A}_{0,x}[\mathscr{A}_{\tau,\xi}(\delta^2 u)]\,dx\right]^{1/2} \le \sqrt{2}c_3c_2KT^2\|\delta p\|^2_{L_2(0,T)},$$

$$J_{5,2} = 2\left[\int\limits_0^T \{\mathscr{A}_{0,x}[p\mathscr{A}_{\tau,\xi}(H_{(p)}\mathscr{A}_{\tau',\xi'}(\delta p\delta u))]\}^2\,dx C_{2,0}^2\right]^{1/2}$$

$$\leq 2c_3\left[\int\limits_0^T \mathscr{A}_{0,x}[p^2]\mathscr{A}_{0,x}[\{\mathscr{A}_{\tau,\xi}(H_{(p)}\mathscr{A}_{\tau',\xi'}[\delta p\delta u])\}^2]\,dx\right]^{1/2}$$

$$\leq 2c_3\left[\int\limits_0^T T\|p\|^2_{L_2(0,T)}\mathscr{A}_{0,x}\big[\mathscr{A}_{\tau,\xi}\{\mathscr{A}_{\tau',\xi'}(\delta p\delta u)\}^2\mathscr{A}_{\tau,\xi}\big\{H^2_{(p)}\big\}\big]\,dx\right]^{1/2}$$

$$\leq 2c_3K\left[\int\limits_0^T T\mathscr{A}_{0,x}\big[\mathscr{A}_{\tau,\xi}\{\mathscr{A}_{\tau',\xi'}(\delta^2 p)\mathscr{A}_{\tau',\xi'}(\delta^2 u)\}\mathscr{A}_{\tau,\xi}\big\{H^2_{(p)}\big\}\big]\,dx\right]^{1/2}$$

$$\leq 2c_3TK\|\delta p\|_{L_2(0,T)}\left[\int\limits_0^T \mathscr{A}_{0,x}\big[\mathscr{A}_{\tau,\xi}\{\mathscr{A}_{\tau',\xi'}(\delta^2 u)\}\mathscr{A}_{\tau,\xi}\big\{H^2_{(p)}\big\}\big]\,dx\right]^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{2}c_3c_2KT^2\|\delta p\|^2_{L_2(0,T)}\left[\int\limits_0^T \mathscr{A}_{0,x}\big[\mathscr{A}_{\tau,\xi}\big\{H^2_{(p)}\big\}\big]\,dx\right]^{1/2}.$$

Используя (2.12), получим

$$J_{5,2} \leq \sqrt{2}T^4c_3c_2K^2[\exp(T^3K^2)]^{1/2}\|\delta p\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Окончательно имеем

$$|J_0| + |J_5| \leq \|\delta p\|^2_{L_2(0,T)}\{c_4 + \sqrt{2}c_3c_2KT^2 + \sqrt{2}T^4c_3c_2K^2\sqrt{\exp(T^3K^2)}\} = C_1\|\delta p\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $p(x)\in\Omega(K)$. Тогда верна оценка*

$$J[p] \leq C_2\|\nabla J[p]\|^2_{L_2(0,T)}, \tag{3.16}$$

где

$$C_2 = \frac{1}{2}\exp\{4T^3(2 + c_0TK^2)M^2[1 + 2T^3K^2 + T^6K^4]\}.$$

Доказательство. Запишем формулу (3.13) вычисления градиента функционала (3.2):

$$\frac{1}{2}\nabla J[p(x)] = \eta(x) - \int\limits_x^T \eta(\xi)G(\xi,x;p)\,d\xi, \quad 0<x<T,$$

Очевидно, что

$$|\eta(x)| < \frac{1}{2}|\nabla J[p(x)]| + \int\limits_x^T |\eta(\xi)G(\xi,x;p)|\,d\xi, \quad x\in(0,T). \tag{3.17}$$

Для применения леммы Гронуолла проведем ряд преобразований. С этой целью положим $x = T - t,\ x \in (0, T)$. Тогда (3.17) примет вид

$$|\eta(T-t)| \le \frac{1}{2}|\nabla J[p(T-t)]| + \int\limits_{T-t}^{T} |\eta(\xi) G(\xi, T-t; p)| d\xi.$$

Вводя переменную $\xi = T - \lambda$, получим

$$|\eta(T-t)| \le \frac{1}{2}|\nabla J[p(T-t)]| + \int\limits_{0}^{t} |\eta(T-\lambda) G(T-\lambda, T-t; p)|\, d\lambda.$$

Введем обозначения $\bar{\eta}(t) = \eta(T-t)$, $\nabla \bar{J}[p(t)] = J[p(T-t)]$. Тогда

$$|\bar{\eta}(t)| \le \frac{1}{2}|\nabla \bar{J}[p(t)]| + \int\limits_{0}^{t} |\bar{\eta}(\lambda) G(T-\lambda, T-t; p)|\, d\lambda.$$

Используем неравенство $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$:

$$\bar{\eta^2}(t) \le \frac{1}{2}(\nabla \bar{J}[p(t)])^2 + 2\int\limits_{0}^{t} \bar{\eta^2}(\lambda)\, d\lambda \int\limits_{0}^{t} G^2(T-\lambda, T-t; p)\, d\lambda.$$

Обозначим

$$G_0^2(t) = \int\limits_{0}^{t} G^2(T-\lambda, T-t; p)\, d\lambda, \tag{3.18}$$

где $t \in (0, T)$. Интегрируя обе части (3.18) по переменной t от 0 до y, получим

$$\|\bar{\eta}\|^2_{L_2(0,y)} \le \frac{1}{2}\|\nabla J[p(t)]\|^2_{L_2(0,y)} + 2G_0^2(T) \int\limits_{0}^{y} \|\bar{\eta}\|_{L_2(0,t)}(t)\, dt, \quad y \in (0, T).$$

Применяя лемму Гронуолла, приходим к оценке

$$\|\bar{\eta}\|^2_{L_2(0,y)} \le \frac{1}{2}\|\nabla \bar{J}[p(t)]\|^2_{L_2(0,y)} \exp(2G_0^2(T) y),$$

справедливой для любого $y \in (0, T)$, в частности,

$$\|\eta\|^2_{L_2(0,T)} \le \frac{1}{2}\exp(2G_0^2(T)T)\|\nabla J[p(t)]\|^2_{L_2(0,T)}. \tag{3.19}$$

Теперь остается оценить $G_0^2(T)$. Для этого рассмотрим выражение (3.11):

$$G(\xi, x; p) = \int\limits_{0}^{\xi - x} u(x, \tau)\{1 + \mathscr{B}_{\mu_*, x\xi}[p(\xi')] + \mathscr{B}_{\mu_*, x\xi}[p(\xi')\mathscr{B}_{\mu', \xi' x}\{H_{(p)}\}]\}\, d\tau.$$

В частном случае при $t = T$ $(x = 0)$ имеем

$$G(T-\lambda, 0; p) = \int\limits_{0}^{T-\lambda} u(0, \tau)\{1 + \mathscr{B}_{\mu_{**}, (T-\lambda)\xi}[p(\xi')(1 + \mathscr{B}_{\mu', \xi'(T-\lambda)}\{H_{(p)}\})]\}\, d\tau, \tag{3.20}$$

где

$$\mu_{**} = (0,\tau),\ \mu_{1,0}^{**} = \mu_1(0,T-\lambda,\tau,0,\xi') = \max\{-T+\lambda+\xi',\tau+\xi'\},$$

$$\mu_{2,0}^{**} = \mu_2(0,T-\lambda,\tau,0,\xi') = \min\{T-\lambda-\xi',\tau-\xi'\}.$$

Возводя обе части (3.20) в квадрат и используя неравенство Гёльдера, получим

$$G^2(T-\lambda,0;p)= \int\limits_0^{T-\lambda} u^2(0,\tau)\,d\tau \int\limits_0^{T-\lambda}\{1+\mathscr{B}_{\mu_{**},(T-\lambda)\xi}[p(\xi')(1+\mathscr{B}_{\mu',\xi'(T-\lambda)}\{H_{(p)}\})]\}^2\,d\tau$$

$$\le \|u(0,\tau)\|^2_{L_2(0,T-\lambda)} \int\limits_0^{T-\lambda} \{2+4T^2\mathscr{B}_{\mu_{**},(T-\lambda)\xi}[p^2]$$

$$+\,4T^2\mathscr{B}_{\mu_{**},(T-\lambda)\xi}[p^2]\mathscr{B}_{\mu_{**},(T-\lambda)\xi}[(\mathscr{B}_{\mu',\xi'(T-\lambda)}\{H_{(p)}\})]\}\,d\tau.$$

Принимая во внимание оценку из следствия 2.1, интегрируя обе части по переменной λ от 0 до T и меняя порядок интегрирования по переменным λ и τ по формуле (a), имеем

$$\int\limits_0^T G^2(T-\lambda,0;p)\,d\lambda$$

$$\le c_1M^2\mathscr{A}_{0,T}\bigl[2+4T^3K^2+4T^3K^2\mathscr{B}_{\mu_{**},(T-\lambda)\xi}\bigl(\mathscr{B}_{\mu',\xi'(T-\lambda)}\bigl\{H^2_{(p)}\bigr\}\bigr)\bigr]$$

$$\le c_1M^2\bigl\{2T^2+4T^5K^2+4T^3K^2\mathscr{A}_{0,T}\bigl[\mathscr{A}_{0,t}\bigl(\mathscr{A}_{\tau,\xi}\bigl[H^2_{(p)}\bigr]\bigr)\bigr]\bigr\}.$$

Используя оценку (2.12) (см. доказательство теоремы 2.1), находим

$$G_0^2(T) \le c_1M^2\{2T^2+4T^5K^2+2T^8K^4\}.$$

Очевидно, что из (3.17) следует требуемая оценка. Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Если решение $q(x)$ обратной задачи (1.11) существует в $\Omega(K)$, то для любой $p(x)\in\Omega(K)$ верна оценка*

$$\|p-q\|^2_{L_2(0,T)} \le C_3J[p], \tag{3.21}$$

где $C_3 = 2T\exp[2T^2c_0M^2(1+2T^2K^2\exp(2T^2K^2))]$.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$p(x)-q(x) = p(x)-f(x)-\mathscr{A}_{0,x}[qu(\xi,\tau;q)].$$

Прибавим и вычтем выражение $\mathscr{A}_{0,x}[pu(\xi,\tau;p)]$. С учетом (3.1)

$$p(x)-q(x) = \eta(x)+\mathscr{A}_{0,x}[pu(\xi,\tau;p)-qu(\xi,\tau;q)].$$

Обозначая $\tilde q(x) = p(x)-q(x)$, $\tilde u(x,t) = u(x,t;p)-u(x,t;q)$, запишем последнее равенство в следующем виде:

$$\tilde q(x) = \eta(x)+\mathscr{A}_{0,x}[p\tilde u(\xi,\tau)+\tilde q u(\xi,\tau;q)],\quad x\in[0,T].$$

Возводя обе части в квадрат и используя неравенство Гёльдера, получим

$$\tilde q^2(x) \le 2\eta^2(x)+4\mathscr{A}_{0,x}[\tilde q^2]\mathscr{A}_{0,x}[u^2]+4\mathscr{A}_{0,x}[p^2]\mathscr{A}_{0,x}[\tilde u^2].$$

Учитывая свойство (g), имеем

$$\tilde{q}^2(x) \le 2\eta^2(x) + 2T\|\tilde{q}\|^2_{L_2(0,x)}\|u\|^2_{L_2(\Delta_*(x,0))} + 2K^2T\|\tilde{u}\|^2_{L_2(\Delta_*(x,0))}.$$

Используем оценку (2.4) из леммы 2.2:

$$\tilde{q}^2(x) \le 2\eta^2(x) + 2Tc_0M^2\|\tilde{q}\|^2_{L_2(0,x)} + 2K^2T\|\tilde{u}\|^2_{L_2(D(x,0))}. \tag{3.22}$$

Из (1.12) следует, что $\tilde{u}(x,t) = \mathscr{A}_{t,x}[\tilde{q}u + p\tilde{u}]$. Запишем $\tilde{u}(x,t)$ в точке $(\xi,\tau) \in \Delta_*(x,t)$, возведем полученное равенство почленно в квадрат и используем неравенство Гёльдера:

$$\tilde{u}^2(\xi,\tau) \le 2\mathscr{A}_{\tau,\xi}[\tilde{q}^2]\mathscr{A}_{\tau,\xi}[u^2] + 2\mathscr{A}_{\tau,\xi}[p^2]\mathscr{A}_{\tau,\xi}[\tilde{u}^2].$$

Проинтегрируем обе части по переменной τ от $-x+\xi$ до $x-\xi$ и по ξ от 0 до λ, $\lambda \in [0,x]$:

$$\|\tilde{u}\|^2_{L_2(\Delta_*(\lambda,0))} \le 2T^2\|\tilde{q}\|^2_{L_2(0,\xi)}\|u\|^2_{L_2(\Delta_*(\xi,0))} + 2T^2K^2\int\limits_0^\lambda \|\tilde{u}\|^2_{L_2(\Delta_*(\xi,0))}d\xi.$$

В силу леммы Гронуолла

$$\|\tilde{u}\|^2_{L_2(\Delta_*(x,0))} \le \|\tilde{q}\|^2_{L_2(0,x)}2T^2c_0M^2\exp(2T^2K^2).$$

Используя эту оценку, из (3.19) получим

$$\tilde{q}^2(x) \le 2\eta^2(x) + 2Tc_0M^2[1 + 2K^2T^2\exp(2T^2K^2)]\|\tilde{q}\|^2_{L_2(0,x)}.$$

Интегрируя обе части по x от 0 до λ, $\lambda \in [0,T]$ и применяя лемму Гронуолла, выводим требуемую оценку. Теорема доказана.

4. Сходимость итерационного метода

Оптимизационную задачу будем решать методом наискорейшего спуска [14].

Зададим начальное приближение $p^{(0)}(x) \in \Omega(K)$. Определим последовательность

$$p^{(n+1)}(x) = p^{(n)}(x) - \alpha_n \nabla J[p^{(n)}], \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{4.1}$$

Коэффициент спуска α_n определим из условий

$$J(p^{(n)} - \alpha_n\nabla J[p^{(n)}]) = \inf_{\alpha\ge0} J(p^{(n)} - \alpha\nabla J[p^{(n)}]), \tag{4.2}$$

где $\alpha_n > 0$, $\nabla J[p](x)$ — градиент функционала (3.2), определяемый формулой (3.13).

При использовании алгоритма (4.1), (4.2) необходимо учесть свойства решения обратной задачи. Корректность задачи (1.10), (1.11) в окрестности точного решения доказана в работе [13].

Теорема 4.1. *Пусть $q(x) \in \Omega(K)$ — решение обратной задачи* (1.11). *Тогда найдется постоянная $\varepsilon_* \in R_+$ такая, что $\|f_* - f\|^2_{L_2(0,T)} \le \varepsilon_*$ для любого $f_*(x)$, и существует $p_*(x) \in \Omega(K)$ такое, что $p_*(x) = f_*(x) + \mathscr{A}_{0,x}[p_*u_*(\xi,\tau;p_*)]$, $x \in (0,T)$. Здесь u_* — решение уравнения*

$$u_*(x,t) = \frac{1}{2}[f_*(t+x) + f_*(t-x)] + \mathscr{A}_{t,x}[p_*u_*].$$

Теорема 4.2. *Предположим, что точное решение $q(x)$ обратной задачи (1.11) существует и принадлежит $\Omega(K)$. Пусть $p^{(0)} \in \Omega(K)$ таково, что*

$$f^{(0)}(x) = p^{(0)}(x) - \mathscr{A}_{0,x}[p^{(0)}u^{(0)}(\xi,\tau;p^{(0)})]$$

удовлетворяет оценке $\|f^{(0)} - f\|^2_{L_2(0,T)} \leq \varepsilon_*$. Тогда при любом целом $n \geq 1$ приближение $p^{(n+1)}$, построенное методом наискорейшего спуска, принадлежит $\Omega(K)$ и удовлетворяет оценке

$$\|p^{(n+1)} - q\|^2_{L_2(0,T)} \leq C_3 J[p^{(0)}] \exp\left\{-\frac{n}{4C_1C_2}\right\}.$$

Доказательство. Пусть $p^{(0)}(x)$ таково, что

$$f^{(0)}(x) = p^{(0)}(x) - A_{0,x}[p^{(0)}u^{(0)}(\xi,\tau;p^{(0)})]$$

удовлетворяет условию $\|f^{(0)}(x) - f(x)\|^2_{L_2(0,T)} \leq \varepsilon_*$. По определению метода наискорейшего спуска (4.1), (4.2) имеем

$$J[p^{(n+1)}] \leq J[p^{(n)}] \leq \dots \leq J[p^{(0)}] \leq \varepsilon_*.$$

Тогда в силу теоремы 4.1 $p^{(n+1)} \in \Omega(K)$.

Докажем вторую часть теоремы. Положим в теореме 3.1

$$\Delta J[p] = J[p^{(n)} - \alpha \nabla J[p^{(n)}]] - J[p^{(n)}].$$

Тогда из оценки (3.15) следует неравенство

$$J[p^{(n)}] - J[p^{(n)} - \alpha \nabla J[p^{(n)}]] \geq \alpha(1 - C_1\alpha)\|\nabla J\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Из (4.2), очевидно, вытекает, что

$$\begin{aligned} J[p^{(n)}] - J[p^{(n)} - \alpha_n \nabla J[p^{(n)}]] &\geq J[p^{(n)}] - J[p^{(n)} - \alpha \nabla J[p^{(n)}]] \\ &\geq \alpha(1 - C_1\alpha)\|\nabla J\|^2_{L_2(0,T)}. \end{aligned}$$

Левая часть последнего неравенства не зависит от α, следовательно, в правой части можно перейти к максимуму:

$$J[p^{(n)}] - J[p^{(n)} - \alpha_n \nabla J[p^{(n)}]] \geq \frac{1}{4C_1}\|\nabla J\|^2_{L_2(0,T)}.$$

По теореме 3.2 имеем

$$J[p^{(n)}] - J[p^{(n+1)}] \geq \frac{1}{4C_1C_2} J[p^{(n)}]. \tag{4.3}$$

Воспользуемся известным фактом [15]: если числовая последовательность такова, что $\nu_n - \nu_{n+1} \geq \mu_n \nu_n$, $\nu_n > 0$, $\mu_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то

$$\nu_n \leq \nu_0 \exp\left\{-\sum_{m=0}^{n-1} \mu_m\right\}, \quad n \geq 1. \tag{4.4}$$

Тогда с учетом (4.4) оценка (4.3) примет вид

$$J[p^{(n)}] \leq J[p^{(0)}] \exp\left\{-\frac{n-1}{4C_1C_2}\right\} \tag{4.5}$$

для любого $n \geq 1$.

Наконец, принимая во внимание (3.18) и (4.5), для любого $n \geq 1$ получим

$$\|p^{(n+1)} - q\|^2_{L_2(0,T)} \leq C_3 J[p^{(n+1)}] \leq C_3 J[p^{(0)}] \exp\left\{-\frac{n}{4C_1C_2}\right\}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
2. *Алексеев А. С.* Обратные динамические задачи сейсмики // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации данных. М.: Наука, 1967. С. 9–84.
3. *Bamberger A., Chavent G., Lailly P.* About the stability of the inverse problem in 1-D wave equations. Application to the interpretation of seismic profiles // Appl. Math. Optim. 1979. V. 5. P. 1–47.
4. *Santosa F., Symes W.* An analysis of least-squares velocity inversion. Tulsa (USA): Soc. Exploration Geophys., 1989. V. 4.
5. *Дмитриев В. И., Федорова Е. А.* О решении обратной задачи в методе частного зондирования слоистой среды // Библ. прогр. по геофизике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. С. 11–18.
6. *Нямбаа Ш., Чеверда В. А.* Оптимизационный метод решения обратной задачи электроразведки на постоянном токе для вертикально-неоднородных сред. Новосибирск, 1988. 28 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние ВЦ: № 794).
7. *Iskakov K. T., Kabanikhin S. I.* The solution of one-dimensional inverse problem of geoelectrics by the method of conjugate gradients // Russian J. Theoret. Appl. Mech. 1992. V. 2, N 3. P. 197–222.
8. *Romanov V. G., Kabanikhin S. I.* Inverse problems for Maxwell's equations. Utrecht (The Netherlands): VSP, 1994.
9. *Kabanikhin S. I.* Numerical analysis of inverse problems // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1995. V. 3, N 4. P. 278–304.
10. *Karchevsky A. L.* Properties of the misfit functional for a nonlinear one-dimensional coefficient hyperbolic inverse problem // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1997. V. 5, N 2. P. 139–165.
11. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
12. *Kabanikhin S. I., Bakanov G. V.* The optimizational method for solving the discrete inverse problem for hyperbolic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1996. V. 6, N 4. P. 513–530.
13. *Azamatov J. S., Kabanikhin S. I.* Nonlinear operator equations. L_2-theory // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1999. V. 7, N 6. P. 497–529.
14. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
15. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 15 февраля 1999 г.

Кабанихин Сергей Игоревич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
kabanikh@math.nsc.ru

Искаков Казизат Такуадинович
Карагандинский гос. университет им. Е. А. Букетова
Университетская 28, Караганда 470074, Казахстан
kazizat@mail.ru