*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5*

*УДК 517.54 + 517.968.74*

# О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ХЕЛЕ — ШОУ

**О. С. Кузнецова**

**Аннотация:** Введен новый класс однолистных многочленов $H_n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=2}^{n} k|a_k(0)|^2 < \frac{2}{(n-1)(n+2)} a_1^2(0),$$

и установлено, что для любого многочлена из класса $H_n$ полиномиальное решение $w(z;t)$ задачи Хеле — Шоу существует при всех значениях $t > 0$. Показана также звездность многочленов из $H_n$. Библиогр. 11.

## 1. Введение

В работе рассматриваются свойства полиномиальных решений уравнения Хеле — Шоу. Дадим предварительно основные определения.

Через $U$ и $\overline{U}$ обозначим открытый и замкнутый единичные круги на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменной $z$. Будем говорить, что аналитическая функция $f(z)$ *однолистная и нормированная* в $\overline{U}$, в обозначениях $f(z) \in \mathscr{O}(\overline{U})$, если $f(z)$ определена и однолистна в некоторой окрестности $\overline{U}$, а также выполнены условия

$$f(0) = 0, \quad f'(0) > 0.$$

Семейство голоморфных по $z$ функций $w(z;t)$ будем называть *сильным решением* уравнения Хеле — Шоу с начальным условием $f(z) \in \mathscr{O}(\overline{U})$, если

(а) $w(z;t)$ непрерывно дифференцируема по $t$, $t \in [0;b)$, для некоторого $b > 0$;

(б) $w(z;t) \in \mathscr{O}(\overline{U})$ для каждого $t \in [0;b)$, $w(z;0) = f(z)$;

(в) имеет место интегродифференциальное соотношение

$$w_t'(z;t) = z\, w_z'(z;t) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|w_z'(e^{i\theta};t)|^2} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\theta. \tag{1}$$

Исследованию вопросов разрешимости уравнения Хеле — Шоу (1) с общими аналитическими начальными данными $w(z;0)$ посвящен ряд работ, в том числе [1, 2]. В работе [2] Б. Густафссон показал, что сильное решение $w(z;t)$ с полиномиальными начальными данными

$$w(z;0) = a_1 z + \dots + a_n z^n \in \mathscr{O}(\overline{U})$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки научных исследований молодых ученых-докторов (№ 00–15–99274) и гранта Конкурсного Центра Фонда современного естествознания (№ 97–0–1.3–114).

существует и функция $w(z;t)$ также будет полиномом степени $n$.

Определим для произвольной $f(z) \in \mathscr{O}(\overline{U})$ так называемые *комплексные моменты Ричардсона*

$$M_n(f) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_U f^n(z) f'(z) \overline{f'(z)}\, dxdy, \quad z = x + iy,$$

где $n \geq 0$ — целое число. Ясно, что имеет место эквивалентное равенство

$$M_n(f) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega_f} \zeta^n \, d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

где $\Omega_f = f(U)$.

С. Ричардсон в [3] доказал, что если $w(z;t)$, $t \in [0;b)$, — решение уравнения Хеле — Шоу, то

$$M_0(w(z;t)) = M_0(w(z;0)) + 2\pi t, \tag{2}$$

$$M_n(w(z;t)) = M_n(w(z;0)), \quad n \geq 1. \tag{3}$$

В отличие от общего случая для полиномиальных решений можно привести алгебраическую переформулировку задачи Хеле — Шоу. Именно, в этом случае если $w(z;t) = a_1(t)z + \dots + a_n(t)z^n$, то легко проверяется, что выражения для моментов принимают вид

$$M_k(w(z;t)) = \sum_{i_1,\dots,i_{k+1}} i_1 a_{i_1}(t) a_{i_2}(t) \dots a_{i_{k+1}}(t) \overline{a_{i_1+\dots+i_{k+1}}(t)}, \tag{4}$$

где суммирование производится по всевозможным допустимым комбинациям индексов $i_1, \dots, i_{n+1}$.

Таким образом, уравнения (2), (3) после использования (4) дают алгебраическую систему для нахождения коэффициентов $a_1(t), \dots, a_{n+1}(t)$ решения.

В случае, когда все найденные коэффициенты $a_i(t)$ непрерывны по $t \in [0;b)$ и удовлетворяют (2), (3) и многочлены

$$w(z;t) = a_1(t)z + \dots + a_n(t)z^n \tag{5}$$

локально однолистны в $\overline{U}$ (т. е. $w'_z(z;t) \neq 0$, $z \in \overline{U}$), говорят, что $w(z;t)$ является *слабым решением* уравнения Хеле — Шоу с начальными полиномиальными данными $\{a_i(0)\}$.

В [2] показано, что если начальный многочлен $w(z;0)$ локально однолистный в $\overline{U}$, то слабое решение существует для достаточно малых $t \in [0;b)$. Более того, если $w(z;0) \in \mathscr{O}(\overline{U})$, то многочлены (5) принадлежат классу $\mathscr{O}(\overline{U})$ для всех $t \in [0;b)$.

Таким образом, имеется очень тесная связь между полиномиальной задачей Хеле — Шоу и известной проблемой отыскания области однолистности коэффициентов для многочленов. Далее в статье приведено условие на $w(z;0)$, гарантирующее существование сильных полиномиальных решений с начальными данными $w(z;0)$, при которых $b = +\infty$. Полученный на этом пути класс полиномов $H_n$ дает также новый достаточный признак однолистности в терминах коэффициентов полинома. Доказано также, что все полиномы из $H_n$ суть однолистные функции, которые являются звездообразными в единичном круге. Насколько известно автору, это единственное известное достаточное условие, гарантирующее звездообразность полиномов в терминах его коэффициентов.

Свойства полиномиальных решений и их примеры рассматривались также в [4]. О комплексных моментах и их связи с уравнением Хеле — Шоу и с обратной задачей теории потенциала см. [5–7].

Одна из основных целей настоящей работы — указать достаточные условия на набор $a_1, \dots, a_{n+1}$ комплексных чисел, для которого сильное полиномиальное решение (5) с $a_i(0) = a_i$ существует при всех $t \geq 0$. Мы также исследуем качественные свойства таких решений.

## 2. Вспомогательные утверждения

В этом пункте мы предполагаем, что $w(z;t)$ — сильное (не обязательно полиномиальное) решение уравнения Хеле — Шоу. Положим

$$w(z;t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) z^n.$$

**Теорема 1.** *Функция $a_1^2(t) - 2t$ является неубывающей для любого сильного решения $w(z;t)$. При этом*

$$a_1^2(t) - 2t \leq \frac{1}{\pi} |\Omega(0)|, \tag{6}$$

*где $\Omega(t) = w(U;t)$.*

Доказательство. Заметим, что функция $v(z;t) = \ln |w'_z(z;t)|$ гармоническая и непрерывная в $\overline{U}$, так как в силу однолистности $w(z;t)$ имеем $|w'_z(z;t)| \neq 0$ при всех $z \in \overline{U}$, $t \in [0;b)$. По теореме о среднем для гармонических функций

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} v \, d\theta = v(0;t) = \ln a_1(t). \tag{7}$$

С другой стороны, для любой непрерывной на $[0;2\pi]$ функции $\lambda(\theta)$ справедливо неравенство Иенсена [8, с. 183]

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{\lambda(\theta)} \, d\theta \geq \exp\left( \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \lambda(\theta) \, d\theta \right). \tag{8}$$

Используя (7) и (8), получим из (1) при $z = 0$, что

$$\frac{a_1'(t)}{a_1(t)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-2v} \, d\theta \geq \exp\left[ -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} 2v \, d\theta \right] = \exp(-2 \ln a_1(t)) = \frac{1}{a_1^2(t)},$$

откуда $2a_1' a_1 = (a_1^2)' \geq 2$, а следовательно, функция $a_1^2(t) - 2t$ неубывающая. Чтобы доказать неравенство (6), заметим, что в силу однолистности $w(z;t)$ и (2)

$$\pi a_1^2(t) \leq \iint\limits_{\overline{U}} |w'_z(z;t)|^2 \, dxdy = |\Omega(t)| = |\Omega(0)| + 2\pi t.$$

Теорема доказана.

Полезным следствием теоремы 1 является следующая равномерная оценка коэффициентов разложения Тейлора решения задачи Хеле — Шоу.

**Теорема 2.** *Пусть $w(z;t)$ — сильное решение задачи Хеле — Шоу на $[0;b)$ с разложением* (5). *Тогда для любого $t \in [0;b)$ функция*

$$g(t) \equiv \sum_{k=2}^{\infty} k\left|a_k^2(t)\right|$$

*невозрастающая, при этом $g(t) \le \frac{1}{\pi}|\Omega(0)| - a_1^2(0)$.*

Доказательство. В силу однолистности отображения по теореме площадей

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k(t)|^2 = \iint\limits_{\overline{U}} |w'_z(z;t)|^2\, dxdy = |\Omega(t)| = |\Omega(0)| + 2\pi t,$$

откуда

$$\sum_{k=2}^{\infty} k|a_k(t)|^2 = \frac{1}{\pi}|\Omega(0)| + 2t - a_1^2(t) \equiv g(t).$$

По теореме 1 функция $g(t)$ невозрастающая при $t \in [0;b)$, причем

$$g(0) = \frac{1}{\pi}|\Omega(0)| - a_1^2(0),$$

что и приводит к нужному неравенству.

## 3. Основные результаты

В силу сформулированной выше теоремы Ричардсона о моментах и сделанных ранее замечаний задача отыскания решения с полиномиальными начальными данными сводится к системе $n$ алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, описываемой формулами (4) и (2), (3). Нетривиальной особенностью данной задачи является установление того факта, что полученное в результате слабое решение будет и решением задачи Хеле — Шоу (т. е. все $w(z;t)$ однолистны в $\overline{U}$). Отметим, что даже при однолистных полиномиальных начальных данных решение $w(z;t)$ может допускать многолистные функции $w(z;t_1)$ при некоторых $t_1 > 0$. Тем самым представляет интерес следующий вопрос, поставленный в работе [2]: при каких ограничениях на коэффициенты $a_1(0), \dots, a_n(0)$ слабое решение $w(z;t)$ с начальными данными $w(z;0) = a_1(0)z + \dots + a_n(0)z^n$ будет сильным для любого $t > 0$?

В случае $n = 2, 3$ связь данной задачи с проблемой комплексных моментов Ричардсона рассматривалась в работе [9]).

**Теорема 3.** *Пусть $w(z;0) = a_1(0)z + a_2(0)z^2 + \dots + a_n(0)z^n$, $a_1(0) > 0$ и*

$$\sum_{k=2}^{n} k|a_k(0)|^2 < \frac{2}{(n-1)(n+2)} a_1^2(0). \tag{9}$$

*Тогда существует полиномиальное решение задачи Хеле — Шоу с начальными данными $w(z;0)$, определенное и однолистное при всех $t \ge 0$.*

Доказательство. В [2] доказано, что при однолистных полиномиальных начальных данных задача Хеле — Шоу имеет слабое полиномиальное решение (такое, что $w'_z(z;t) \ne 0$ в $\overline{U}$, однако, вообще говоря, $w(z;t)$ не обязана быть однолистной в $U$ при $t > 0$), т. е. в условиях нашей теоремы найдется полиномиальное решение $w(z;t) = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + \dots + a_n(t)z^n$, которое является слабым решением задачи Хеле — Шоу (в случае, если $w(z;0)$ однолистна в $\overline{U}$).

Поэтому для доказательства справедливости теоремы достаточно убедиться в том, что решение $w(z;t)$ будет однолистно при всех $t \geq 0$.

С этой целью рассмотрим следующее выражение:

$$h(z_1;z_2;t) \equiv \frac{w(z_1;t) - w(z_2;t)}{z_1 - z_2}$$
$$= a_1(t) + a_2(t)(z_1 + z_2) + \cdots + a_n(t)\left(z_1^{n-1} + z_1^{n-2}z_2 + \cdots + z_2^{n-1}\right).$$

Необходимым и достаточным условием однолистности $w(z;t)$ в единичном круге $\overline{U}$ является условие $h(z_1;z_2;t) \neq 0$ при любых различных $z_1$ и $z_2$ из $\overline{U}$.

Заметим сначала, что для любых $z_1$, $z_2 \in \overline{U}$ в силу неравенства Коши — Буняковского

$$\left|a_2(t)(z_1 + z_2) + \cdots + a_n(t)\left(z_1^{n-1} + z_1^{n-2}z_2 + \cdots + z_2^{n-1}\right)\right|$$
$$\leq 2|a_2(t)| + 3|a_3(t)| \cdots + n|a_n(t)|$$
$$\leq \sqrt{2 + 3 + \cdots + n}\sqrt{2|a_2(t)|^2 + \cdots + n|a_n(t)|^2} = \sqrt{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}\sqrt{g(t)},$$

где $g(t) = 2|a_2|^2 + \cdots + n|a_n|^2$. Следовательно,

$$|h(z_1;z_2;t)| \geq |a_1(t)| - \sqrt{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}\sqrt{g(t)}.$$

Согласно (9) для начального отображения имеем $h(z_1;z_2;0) > 0$, т. е. $w(z;0)$ однолистна в $\overline{U}$.

В силу однолистности начального решения $w(z;0)$ в замкнутом круге $\overline{U}$ и непрерывности $w(z;t)$ по $t$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $w(z;t)$ будет однолистным в $\overline{U}$ при $t \in [0;\varepsilon)$. Предположим, однако, что существует $t_0 \geq \varepsilon$ такое, что $w(z;t_0)$ будет неоднолистным решением в $\overline{U}$, и, не ограничивая общности, будем считать, что $t_0$ — наименьшее возможное число с таким свойством.

Заметим, что на интервале $[0;t_0)$ функция $w(z;t)$ является однолистным многочленом и сильным решением, а значит, к ней применима теорема 2, из которой вытекает, что при $t \in [0;t_0)$ ввиду (9)

$$g(t) \leq g(0) = \sum_{k=2}^{n} k|a_k(0)|^2 < \frac{2}{(n-1)(n+2)}a_1^2(0).$$

С другой стороны, в силу теоремы 1 $a_1^2(t) - 2t$ строго возрастает на $[0;t_0)$, откуда $a_1^2(t) \geq a_1^2(0) + 2t$, поэтому

$$|h(z_1;z_2;t)| \geq |a_1(t)| - a_1(0) \geq \sqrt{a_1^2(0) + 2t} - a_1(0).$$

В частности, переходя к пределу при $t \to t_0 - 0$, имеем

$$|h(z_1;z_2;t_0)| \geq \sqrt{a_1^2(0) + 2t_0} - a_1(0) > 0$$

для любых $z_1$, $z_2 \in \overline{U}$, что противоречит неоднолистности $w(z;t_0)$ в $\overline{U}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. В некотором смысле условие (9) оптимально. Именно, при $n = 2$ оно эквивалентно неравенству $2|a_2(0)| < a_1(0)$, что, как нетрудно проверить (см. также [10]), является необходимым и достаточным условием однолистности $w(z;0)$ при $n = 2$.

Обозначим через $H_n$ класс многочленов $f(z) = a_1 z + \dots + a_n z^n$, удовлетворяющих условию (9), и через $\overline{H}_n$ — его замыкание, т. е.

$$\overline{H}_n = \left\{ f(z) : \sum_{k=2}^{n} |a_k|^2 k \le \frac{2}{(n+2)(n-1)} |a_1|^2 \right\}. \tag{10}$$

Через $H_n^0$ ($\overline{H}_n^0$) обозначим соответствующие подклассы многочленов с $a_1 = 1$. Очевидно следующее полезное следствие (9) и (10): если $f(z) \in H_n$ ($\overline{H}_n$, $H_n^0$, $\overline{H}_n^0$ соответственно), то для любого $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$, многочлен $f(z\varepsilon)$ принадлежит $H_n$ ($\overline{H}_n$, $H_n^0$, $\overline{H}_n^0$ соответственно).

В силу определения многочлены класса $H_n$ (тем более $H_n^0$) однолистны, в то время как в $\overline{H}_n$ уже содержатся многочлены, однолистные в единичном круге $U$, которые не продолжаются однолистно в $\overline{U}$. Точнее, имеет место

**Теорема 4.** *Единственные многочлены $f(z) \in \overline{H}_n$, которые не являются однолистными в $\overline{U}$, имеют вид*

$$f(z) = a\, P_n(z\varepsilon), \quad |\varepsilon| = 1, \quad a \in \mathbb{C},$$

*где*

$$P_n(z) = \frac{(n+2)(n-1)}{2} z - \sum_{k=2}^{n} z^k.$$

Доказательство. Заметим, что ввиду выбора класса $\overline{H}_n$ для любой $f \in \overline{H}_n$ имеем

$$|h(z_1; z_2)| = \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| > 0,$$

если $z_1$, $z_2 \in \overline{U}$ и хотя бы одна точка $z_1$ принадлежит $U$. Следовательно, любой многочлен $f \in \overline{H}_n$ будет однолистным внутри единичного круга $U$, более того, $|f'_z| \ne 0$ внутри $U$.

Ясно, что в силу непрерывности и сделанного замечания некоторый многочлен $f(z) \in \overline{H}_n$ будет неоднолистным в $\overline{U}$, если найдется $\varepsilon \in \partial U$ такое, что $f'_z(\varepsilon) = 0$. Очевидно, что для $\varphi(z) = f(z\varepsilon)$ также $\varphi \in \overline{H}_n$ и $\varphi'_z = 0$. Рассмотрим $P(z) = \varphi(z)/\varphi'(0) \in \overline{H}_n^0$. Имеем $0 = P'_z(1) = 1 + 2a_2 + \dots + na_n$, откуда

$$-1 = 2a_2 + \dots + na_n. \tag{11}$$

Но согласно (10)

$$|-1| \le \left( \sum_{k=2}^{n} k|a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=2}^{n} k \right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\frac{2}{(n+2)(n-1)} \cdot \frac{(n+2)(n-1)}{2}} = 1,$$

и, значит, в последнем неравенстве Коши — Буняковского имеет место равенство. Поэтому все числа $a_k$ равны между собой, откуда $a_2 = \dots = a_n = \alpha$ и из (11) получаем $\alpha(2 + \dots + n) = -1$, т. е.

$$P(z) = z - \frac{2}{(n+2)(n-1)} \sum_{k=2}^{n} z^k = \frac{2}{(n+2)(n-1)} P_n(z).$$

Следовательно, $f(z) = aP_n(z\varepsilon)$ для некоторого $a \in \mathbb{C}$, что и требовалось доказать.

## 4. Структурные свойства класса $\overline{H}_n$

Напомним, что однолистная аналитическая функция $f(z) \in \mathscr{O}(\overline{U})$ называется *звездообразной* в $\overline{U}$, если $f(\overline{U})$ — звездная относительно начала координат область. Хорошо известно (см., например, [11]), что критерием звездообразности служит выполнение неравенства

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \geq 0, \quad z \in \partial U.$$

Исследуем вопрос о геометрическом строении многочленов класса $\overline{H}_n$. Имеет место следующая

**Теорема 5.** *Любой многочлен $f(z) \in \overline{H}_n$ является звездообразной в единичном круге $U$ функцией. Более того, равенство*

$$\min_{|z|\leq 1} \operatorname{Re} f^*(z) = 0,$$

*где $f^*(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$, возможно лишь для многочленов $f(z) = aP_n(z\varepsilon)$, $a \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$.*

Доказательство. Случай $n = 2$ легко исследуется непосредственно. Далее полагаем $n \geq 3$.

Сначала покажем, что для любого многочлена $f(z) \in \overline{H}_n^0$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} f^\star(z) \equiv \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \geq 0, \quad z \in \partial U. \tag{12}$$

Так как $f(z)$ однолистна, то $f(z)/z$ регулярна и отлична от 0 в $\overline{U}$. Следовательно, в силу необращения в нуль выражения $f(z)/z$ неравенство (12) эквивалентно неравенству

$$\operatorname{Re}\left(f'(z)\left(\overline{\frac{f(z)}{z}}\right)\right) \geq 0 \quad \forall z \in \partial U. \tag{13}$$

Для доказательства (13) найдем минимум выражения в левой части по всем $f(z) \in \overline{H}_n^0$ и $z \in \partial U$. Вследствие замкнутости, ограниченности и конечномерности $\overline{H}_n^0$, а также компактности $\partial U$ минимум существует и достигается на некотором $P(z) \in \overline{H}_n^0$. Более того, если $\varphi(z) = P(z\varepsilon)$, то

$$\varphi'(z)\left(\overline{\frac{\varphi(z)}{z}}\right) = P'(z\varepsilon)\varepsilon\left(\overline{\frac{P(z\varepsilon)}{z}}\right) = P'(z\varepsilon)\left(\overline{\frac{P(z\varepsilon)}{z\varepsilon}}\right)$$

для любого $\varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$. Но класс $\overline{H}_n^0$ инвариантен относительно поворотов: $P(z) \to P(z\varepsilon)$. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что минимум достигается в точке $z = 1$.

Пусть $P(z) = z + A_2z^2 + \cdots + A_nz^n$ — экстремальный многочлен (с минимумом в точке $z = 1$). Введем следующий минимум по всем $f(z) \in \overline{H}_n^0$ и $z \in \partial U$:

$$\gamma \equiv \min \operatorname{Re}\left(f'(z)\left(\overline{\frac{f(z)}{z}}\right)\right) = \operatorname{Re}(P'(1)\overline{P(1)}),$$

или, что то же самое,

$$\gamma = \mathrm{Re}\left(1 + \sum_{k=2}^{n} A_k k\right)\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \overline{A}_k\right).$$

Полагая $A_k = \alpha_k + i\beta_k$, получим

$$\gamma = 1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k(k+1) + \sum_{k,m=2}^{n} \alpha_k\alpha_m k + \sum_{k,m=2}^{n} \beta_k\beta_m k \tag{14}$$

и

$$\sum_{k=2}^{n} |A_k|^2 k = \sum_{k=2}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)k \le \frac{1}{C_1}, \tag{15}$$

где $C_1 = \sum\limits_{k=2}^{n} k = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$.

Чтобы доказать, что $\gamma \ge 0$, исследуем функцию $F(\alpha,\beta)$, стоящую в правой части (14), на экстремум при дополнительном условии (15).

Заметим сначала, что второй дифференциал

$$d^2F \equiv \sum_{k,m=2}^{n} kd\alpha_k d\alpha_m + \sum_{k,m=2}^{n} kd\beta_k d\beta_m$$

не является знакоопределенным, а следовательно, $F(\alpha,\beta)$ не может иметь локальных экстремумов. Поэтому минимальное значение $F(\alpha,\beta)$ достигается при

$$\sum_{k=2}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)k = \frac{1}{C_1}$$

и достаточно проверить его неотрицательность.

Пусть $(a_2,\dots,a_n,b_2,\dots,b_n)$ — точка искомого локального минимума. Введем для удобства следующие обозначения:

$$C_\nu = \sum_{k=2}^{n} k^\nu,\ \nu \in \mathbb{Z}, \quad A = \sum_{k=2}^{n} a_k, \quad A' = \sum_{k=2}^{n} ka_k, \quad B = \sum_{k=2}^{n} b_k, \quad B' = \sum_{k=2}^{n} kb_k.$$

Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, найдем число $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что для любых индексов $k,m = 2,\dots,n$ выполнено

$$k + 1 + A' + kA = \lambda k a_k, \quad mB + B' = \lambda m b_m. \tag{16}$$

Умножим второе уравнение на $1/m$ и просуммируем: $BC_0 + B'C_{-1} = \lambda B$, или

$$B(\lambda - C_0) = C_{-1}B'. \tag{17}$$

Аналогично, просуммировав второе уравнение (16) по всем $m = 2,\dots,n$, получаем $BC_1 + B'C_0 = \lambda B'$, или $B'(\lambda - C_0) = C_1 B$. Таким образом, находим, что $B = \frac{\lambda - C_0}{C_1}B'$, откуда ввиду (16)

$$B'((\lambda - C_0)^2 - C_{-1}C_1) = 0. \tag{18}$$

Аналогичные преобразования с первым уравнением системы (16) дают следующую систему:

$$A'(C_0 - \lambda) + C_1 A = -(C_0 + C_1), \quad A'C_{-1} + (C_0 - \lambda)A = -(C_0 + C_{-1}). \tag{19}$$

**Случай 1.** Пусть $(\lambda - C_0)^2 = C_1 C_{-1}$. Тогда ранг системы (19) равен 1, причем правые ее части, строго отрицательные числа. Положим $\lambda = C_0 + \theta\sqrt{C_1 C_{-1}}$, где $\theta^2 = 1$.

Тогда

$$\sqrt{C_1}(\theta A'\sqrt{C_{-1}} + \sqrt{C_1}A) = -(C_1 + C_0),$$
$$\sqrt{C_{-1}}(A'\sqrt{C_{-1}} + \theta\sqrt{C_1}A) = -(C_0 + C_{-1}).$$

Так как $\theta^2 = 1$, из последней системы получаем

$$\theta\sqrt{\frac{C_1}{C_{-1}}} = \frac{C_1 + C_0}{C_0 + C_{-1}} > 0,$$

откуда $\theta = 1$ и

$$\frac{C_1}{C_{-1}} = \left(\frac{C_1 + C_0}{C_0 + C_{-1}}\right)^2.$$

После упрощения имеем $\bigl(C_0^2 - C_1 C_{-1}\bigr)(C_1 - C_{-1}) = 0$. Но, очевидно, $C_1 > C_{-1}$, поэтому остается $C_0^2 = C_1 C_{-1}$.

Однако в силу неравенства Коши — Буняковского

$$C_0^2 = \left(\sum_{k=2}^{n} 1\right)^2 \le \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right)\left(\sum_{k=2}^{n} k\right) = C_{-1} C_1,$$

причем равенство возможно лишь при $n = 2$. Следовательно, пришли к противоречию, а значит, $(\lambda - C_0)^2 \ne C_1 C_{-1}$.

**Случай 2.** Пусть $(\lambda - C_0)^2 \ne C_1 C_{-1}$. Тогда из (19) получаем $B' = 0$, а из (18) следует, что $B = 0$. Таким образом, из второго уравнения системы (17) имеем $b_k = 0$, $k = 2, \dots, n$.

Осталось показать, что правая часть (15) неотрицательна в предположении, что выполнено $\beta_k = b_k = 0$, $k = 2, \dots, n$, и имеет место (16). С этой целью заметим, что

$$F(a; 0) = 1 + \sum_{k=2}^{n} a_k(k+1) + \sum_{k=2}^{n} k a_k a_m = \left(1 + \sum_{k=2}^{n} a_k\right)\left(1 + \sum_{k=2}^{n} k a_k\right),$$

а также

$$\left|\sum_{k=2}^{n} k a_k\right|^2 \le \sum_{k=2}^{n} k a_k^2 \sum_{k=2}^{n} k = \frac{1}{C_1} C_1 = 1.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{k=2}^{n} k a_k\right| \le \sum_{k=2}^{n} |a_k| \le \sum_{k=2}^{n} k|a_k| \le 1.$$

Значит, $\gamma \equiv F(a; 0) \ge 0$, что и требовалось проверить.

Теперь отметим, что $\gamma = 0$ возможно лишь в том случае, когда всюду в последних неравенствах Коши — Буняковского выполняется точное равенство. Следовательно, все $a_k$ равны между собой.

Пусть $a_2 = \cdots = a_n = a$. Из первого уравнения системы (17) находим

$$(k+1) + aC_1 + k(n-1)a = \lambda k a,$$

или

$$k(1 + (n-1)a - \lambda a) = -(aC_1 + 1),$$

для любого $k = 2, \dots, n$. Так как $k$ принимает не менее двух различных значений, получим $aC_1 = -1$, т. е. $a = -1/C_1$.

Последнее означает, что экстремальный многочлен $P(z)$ с точностью до постоянного множителя и поворота совпадает с $P_n(z)$. Теорема доказана полностью.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Виноградов Ю. П., Куфарев П. П.* Об одной задаче фильтрации // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12. С. 181–198.

**2.** *Gustafsson B.* On a differential equation arising in a Hele — Shaw flow moving boundary problem // Ark. Mat. 1984. Bd 22, N 2. S. 251–268.

**3.** *Richardson S.* Hele — Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel // J. Fluid Mech. 1972. V. 56, N 4. P. 609–618.

**4.** *Howison S. D.* Cusp development in Hele — Shaw flows with free surface // SIAM J. Appl. Math. 1986. V. 46, N 1. P. 20–26.

**5.** *Cherednichenko V. G.* Inverse logarithmic potential problem. Utrecht (The Netherlands): VSP, 1996.

**6.** *Sakai M.* Domains having null complex moments // Complex Variables. 1987. V. 7. P. 313–319.

**7.** *Gustafsson B., He Chiyu, Milanfar P., Putinar M.* Reconstructing planar domains from their moments // Inverse Problems. 2000. V. 16. P. 1053–1070.

**8.** *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Пойа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. Т. 1.

**9.** *Ullemar C.* Uniqueness theorem for domains satisfying quadrature identity for analytic functions. Stockholm, 1980. V. 1. (Preprint / Royal Inst. of Technology: TRITA-Mat; N 37).

**10.** *Ховисон С. Д., Хохлов Ю. Е.* О классификации решений в задаче о течениях Хеле — Шоу с неизвестной границей // Докл. АН СССР. 1992. Т. 325. С. 1161–1166.

**11.** *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. Т. 1.


*Статья поступила 20 сентября 2000 г.*

*Кузнецова Ольга Святославовна*
*Волгоградский гос. университет, математический факультет,*
*ул. 2-я Продольная, 30, Волгоград 400062*
astra1987@mail.ru