*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2003. Том 44, № 4*

*УДК 517.55*

# О ПОСТРОЕНИИ ТОЧНЫХ КОМПЛЕКСОВ, СВЯЗАННЫХ С КОМПЛЕКСОМ ДОЛЬБО

**А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец**

**Аннотация:** Рассмотрен точный подкомплекс комплекса Дольбо, построенный с помощью интегрального представления Коппельмана. Дано его внутреннее описание. С помощью данного подкомплекса построен двойной точный комплекс, одним из составляющих которого является комплекс Дольбо.

**Ключевые слова:** комплекс Дольбо, интегральное представление Коппельмана, оператор Коши — Римана

Оператор Коши — Римана для одного комплексного переменного является эллиптическим, однако он не допускает эллиптических граничных задач в классическом смысле.

Для многих комплексных переменных оператор Коши — Римана порождает большое число проблем. Одной из них является переопределенность, которая заставляет изучать комплекс совместности, так называемый комплекс Дольбо. На компактных замкнутых комплексных многообразиях комплекс Дольбо является эллиптическим и его изучение сводится к изучению отдельных эллиптических операторов, так называемых лапласианов. Попытки расширить теорию Ходжа на компактные комплексные многообразия с границами приводят к неэллиптическим граничным задачам для лапласианов, которые известны как $\bar\partial$-задачи Неймана. Даже на строго псевдовыпуклых многообразиях эти задачи субэллиптичны с потерей $1/2$ гладкости по сравнению с эллиптической задачей. Первый пример такого рода был построен Е. Стейном [1].

Это сильно отличает комплекс Дольбо от комплекса де Рама. Поэтому в настоящий момент не найдено эллиптических краевых задач для комплекса Дольбо.

А. Кальдерон [2] первым предложил более общий подход к граничным задачам. Программа изучения граничных задач без условий Шапиро — Лопатинского была затем инициирована статьей [3], в которой сигнатура риманова многообразия представлена в виде индекса оператора Дирака с нелокальными граничными условиями. Теория Фредгольма таких задач была разработана в контексте анализа на многообразиях с коническими сингулярностями в [4]. Логическое продолжение этой программы было недавно предложено Шульце [5], который ввел алгебру граничных задач для псевдодифференциальных операторов, не требующую условий Шапиро — Лопатинского. Эта алгебра содержит как весьма частный случай алгебру теплицевых операторов на границе (см.

Работа первого из авторов выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00167), второго — программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант НШ–1212.2003.1).

[6]). Решающую роль в построении этой алгебры играет специальный индекс элементов виртуального расслоения, индуцированный граничным символом. В общем это трудная проблема линейной алгебры.

В данной статье мы соединяем вместе две различные математические области для того, чтобы осуществить конструкцию Шульце. Первая из них — комплексный анализ с его точными интегральными формулами. Вторая — это гомологическая алгебра, которая позволяет получать универсальные конструкции коцепных отображений двух комплексов. Эта идея не нова (см. [7]), но наш подход здесь имеет совершенно другую природу.

Мы фактически доказываем, что любая формула гомотопии для комплекса Дольбо над ограниченной областью с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$ приводит к некоторой фредгольмовой задаче для этого комплекса. Здесь мы используем специальную сверточную формулу гомотопии, а именно формулу Коппельмана [8]. В действительности то же самое доказательство работает и для более общей формулы Лере.

Таким образом, с помощью интегрального представления Коппельмана построен точный подкомплекс комплекса Дольбо в любой ограниченной области $D$ в $\mathbb{C}^n$. Дано внутреннее описание этого подкомплекса. На его основе рассмотрен двойной точный комплекс, одной из составляющих которого является классический комплекс Дольбо.

## 1. Предварительные результаты

Введем необходимые нам обозначения и определения. Будем рассматривать пространство $\mathbb{C}^n$ комплексных переменных $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Пусть $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Ориентация $\mathbb{C}^n$ определяется порядком координат $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. Тогда форма объема $dv$ в $\mathbb{C}^n$ примет вид

$$dv = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = dx \wedge dy = (i/2)^n dz \wedge d\bar{z},$$

где $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$.

Везде в дальнейшем область $D$ — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с границей $\partial D$ класса $\mathscr{C}^\infty$ такая, что $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ связно. Область $D$ будем задавать в виде

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\},$$

где $\rho$ — вещественнозначная функция класса $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ и $d\rho \neq 0$ на $\partial D$. Функцию $\rho$ можно выбрать так, что $|d\rho| = 1$ на $\partial D$.

Напомним свойства оператора Ходжа $*$ относительно евклидовой метрики в $\mathbb{C}^n$ (см., например, [9, гл. 5, § 1]). Пусть дифференциальная форма $\gamma$ бистепени $(p, q)$ имеет вид

$$\gamma = \sum_I{}' \sum_J{}' \gamma_{I,J}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

где $I = (i_1, \dots, i_p)$ и $J = (j_1, \dots, j_q)$ — мультииндексы порядка $p$ и $q$ соответственно и $0 \leq p, q \leq n$. Штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по возрастающим мультииндексам: $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$. Дифференциальные формы $dz_I$ и $d\bar{z}_J$ имеют вид

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}, \quad d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Тогда

$$*\gamma = \sum_I{}' \sum_J{}' \gamma_{I,J}(z) * (dz_I \wedge d\bar{z}_J),$$

а
$$*(dz_I \wedge d\bar{z}_J) = 2^{p+q-n}(-1)^{pn} i^n \sigma(I)\sigma(J) dz[J] \wedge d\bar{z}[I],$$
где $dz[J]$ получается из $dz$ вычеркиванием дифференциалов $dz_{j_1}, \dots, dz_{j_q}$ и знак $\sigma(I)$ определяется равенством $dz_I \wedge dz[I] = \sigma(I)\, dz$.

Таким образом, форма $*\gamma$ есть форма бистепени $(n-q, n-p)$, причем

1) $**\gamma = (-1)^{p+q}\gamma$,

2) $dz_I \wedge d\bar{z}_J \wedge *(\overline{dz_I \wedge d\bar{z}_J}) = 2^{p+q} dv$.

Если $\gamma$ и $\alpha$ — формы типа $(p,q)$ с коэффициентами класса $\mathscr{L}^2(D)$, то скалярное произведение Ходжа $(\gamma, \alpha)$ определяется так:
$$(\gamma, \alpha) = \int\limits_D \gamma \wedge *\bar{\alpha},$$
а норма Ходжа тогда равна $\|\gamma\| = \sqrt{(\gamma, \gamma)}$.

Используя оператор Ходжа, легко записать операторы $\bar{\partial}^*$ и $\partial^*$, формально сопряженные операторам $\bar{\partial}$ и $\partial$, а именно $\bar{\partial}^* = - * \partial *$ и $\partial^* = - * \bar{\partial} *$.

Дадим определения касательной и нормальной частей формы. Если $f$ — дифференциальная форма типа $(p,q)$ с коэффициентами класса $\mathscr{C}(\overline{D})$, то говорят, что *касательная часть $f_\tau$ формы $f$ равна нулю на границе области $\partial D$*, если
$$\int\limits_{\partial D} f \wedge \varphi = 0$$
для всех форм $\varphi$ типа $(n-p, n-q-1)$ с коэффициентами класса $\mathscr{C}^\infty(\overline{D})$. Это означает, что $f \wedge \bar{\partial}\rho = 0$ на $\partial D$. Нормальная часть $f_\nu$ формы $f$ равна нулю на $\partial D$, если касательная часть формы $(*f)_\tau$ равна нулю на $\partial D$. Обозначим, как обычно, $\bar{\partial}_b f_\tau = (\bar{\partial} f)_\tau$ и $\partial_b f_\tau = (\partial f)_\tau$.

**Лемма 1.** *Пусть форма $f$ типа $(0,q)$ имеет коэффициенты класса $\mathscr{L}^2(D)$. Касательная часть $f_\tau$ равна $0$ на $\partial D$ тогда и только тогда, когда*
$$(\bar{\partial} f, g) = (f, \bar{\partial}^* g)$$
*для всех форм $g$ типа $(0,q+1)$ с коэффициентами класса $\mathscr{C}^\infty(\overline{D})$. Нормальная часть $f_\nu$ равна $0$ на $\partial D$ тогда и только тогда, когда*
$$(\bar{\partial}^* f, h) = (f, \bar{\partial} h) \tag{1}$$
*для всех дифференциальных форм $h$ типа $(0,q-1)$ с коэффициентами класса $\mathscr{C}^\infty(\overline{D})$.*

Доказательство прямо следует из формулы Стокса.

Обозначим через $\mathscr{H}^s(D)$ при $s = 0, 1, 2, \dots$ пространство Соболева, состоящее из функций $f$, у которых все производные до порядка $s$ включительно принадлежат классу $\mathscr{L}^2(D)$, со стандартным скалярным произведением.

Поскольку оператор $\bar{\partial}$ не меняет степени формы по $z$, мы в дальнейшем будем рассматривать формы бистепени $(0,q)$. Через $\mathscr{H}^s_q(D)$ обозначим пространство форм типа $(0,q)$ с коэффициентами из $\mathscr{H}^s(D)$. Тогда $\mathscr{H}^s_0(D) = \mathscr{H}^s(D)$.

Основную роль в нашей статье будет играть формула Коппельмана для внешних дифференциальных форм (см. [8]). Обозначим через $g(\zeta, z)$ стандартное фундаментальное решение уравнения Лапласа:
$$g(\zeta, z) = \begin{cases} -\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}}, & \text{если } n > 1, \\ \frac{1}{2\pi i} \ln|\zeta - z|^2, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Введем ядра $U_{0,q}(\zeta, z)$ при $0 \le q \le n-1$ следующим образом:

$$U_{0,q}(\zeta, z) = \sum_I{}' \sum_{k\notin I} \sigma(I,k) \frac{\partial g}{\partial \zeta_k} \, d\bar{\zeta}[I\cup k] \wedge d\zeta \, d\bar{z}_I,$$

где $I \cup k$ обозначает возрастающий мультииндекс $I = (i_1, \dots, i_q)$, к которому добавлен индекс $k$. Знак $\sigma(I, k)$ определяется равенством

$$d\zeta_k \wedge d\zeta_I \wedge d\zeta[I\cup k] = \sigma(I,k)\, d\zeta.$$

Форма $U_{0,q}$ понимается как двойная дифференциальная форма бистепени $(0, q)$ по $z$ и бистепени $(n, n-q-1)$ по $\zeta$. По определению $U_{0,-1} = U_{0,n} = 0$. Ядро $U_{0,q}$ можно записать в виде (см. [10, § 1])

$$U_{0,q}(\zeta, z) = \partial_\zeta g(\zeta, z) \wedge W_{0,q}(\zeta, z), \tag{2}$$

где

$$W_{0,q} = (-1)^{n+q+1} \sum_I{}' \sum_{k\notin I} (-1)^{k-1} \sigma(I,k)\, d\bar{\zeta}[I\cup k] \wedge d\zeta[k]\, d\bar{z}_I.$$

Нам понадобится еще один вид ядра $U_{0,q}$. Введем форму $V_{0,q+1}(\zeta, z)$, полагая

$$V_{0,q+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{q+1} \sum_I{}' \sum_{k\notin I} \sigma(I\cup k) g(\zeta, z)\, d\bar{\zeta}[I\cup k] \wedge d\zeta\, d\bar{z}_{I\cup k}.$$

Эта форма типа $(0, q+1)$ по $z$ и типа $(n, n-q-1)$ по $\zeta$.

**Лемма 2.** *Имеет место равенство*

$$\bar{\partial}_z^* V_{0,q+1}(\zeta, z) = U_{0,q}(\zeta, z).$$

Доказательство. Вычислим $\bar{\partial}_z^* g(\zeta, z)\, d\bar{z}_J$, где $J$ — возрастающий мультииндекс порядка $q+1$. Имеем

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_z^* g(\zeta, z)\, d\bar{z}_J &= - * \partial_z * (g(\zeta, z)\, d\bar{z}_J) \\ &= -2^{q+1-n} i^n \sigma(J) * (\partial_z g(\zeta, z)\, dz[J] \wedge d\bar{z}) \\ &= 2^{q+1-n} i^n \sigma(J) * \left( \sum_{k\in J} \frac{\partial g}{\partial \zeta_k}\, dz_k \wedge dz[J] \wedge d\bar{z} \right).\end{aligned}$$

Обозначим через $\sigma_k[J]$ знак, определяемый равенством

$$dz_k \wedge dz[J] = \sigma_k[J]\, dz[J\setminus k],$$

где $J \setminus k$ — мультииндекс, полученный из $J$ вычеркиванием индекса $k$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_z^* g(\zeta, z)\, d\bar{z}_J &= 2^{q+1-n} i^n \sigma(J) * \sum_{k\in J} \sigma_k[J] \frac{\partial g}{\partial \zeta_k}\, dz[J\setminus k] \wedge d\bar{z} \\ &= 2(-1)^{nq} \sigma(J) \sum_{k\in J} \sigma_k[J] \sigma([J\setminus k]) \frac{\partial g}{\partial \zeta_k}\, d\bar{z}_{J\setminus k}.\end{aligned}$$

Обозначим $I = J \setminus k$, тогда $J = I \cup k$ и $k \notin I$. Отсюда

$$\bar{\partial}_z^* g(\zeta, z)\, d\bar{z}_J = 2(-1)^{nq+n+1} \sum_{k\notin I} \sigma(I\cup k) \sigma_k[I\cup k] \sigma([I]) \frac{\partial g}{\partial \zeta_k}\, d\bar{z}_I.$$

Имеем $\sigma([I]) = (-1)^{q(n-q)}\sigma(I)$, поскольку $dz_I \wedge dz[I] = (-1)^{q(n-q)}dz[I] \wedge dz_I$. Далее,

$$\begin{aligned}\sigma(I,k)\,dz = dz_k \wedge dz_I \wedge dz[I \cup k] = (-1)^{q(n-q-1)}dz_k \wedge dz[I \cup k] \wedge dz_I \\ = (-1)^{q(n-q-1)}\sigma_k[I \cup k]\,dz[I] \wedge dz_I = (-1)^q \sigma_k[I \cup k]\sigma(I)\,dz,\end{aligned}$$

таким образом,

$$\sigma(I,k) = (-1)^q \sigma_k[I \cup k]\sigma(I).$$

Для каждого мультииндекса $I$ длины $q$ и $k \notin I$ мы можем представить $q+1$ различными способами мультииндекс $J = k \cup I$ в форме $J = j \cup (J \setminus j)$, где $k \in J$. Поэтому

$$\bar{\partial}^*_z g(\zeta,z)\,d\bar{z}_J = 2(q+1)\sum_{k \notin I} \sigma(I \cup k)\sigma(I,k)\frac{\partial g}{\partial \zeta_k}\,d\bar{z}_I.$$

Принимая во внимание определения форм $U_{0,q}$ и $V_{0,q+1}$, получаем требуемое равенство. $\square$

Эта $\bar{\partial}^*$-точность ядра $U_{0,q}$ отмечалась в [11, § 10, п. 3], правда, явный вид $V_{0,q+1}$ не выписывался.

Приведем важное свойство ядер $U_{0,q}(\zeta,z)$ (см. [10, § 1]):

$$\bar{\partial}_\zeta U_{0,q}(\zeta,z) = (-1)^q \bar{\partial}_z U_{0,q-1}(\zeta,z),$$

в частности, $\bar{\partial}_\zeta U_{0,0}(\zeta,z) = 0$ и $\bar{\partial}_z U_{0,n-1}(\zeta,z) = 0$.

Рассмотрим ограниченный оператор

$$M : \mathscr{H}^s_q(D) \longrightarrow \mathscr{H}^s_q(D),$$

определенный следующим образом:

$$(Mf)(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) \wedge U_{0,q}(\zeta,z),$$

и ограниченный оператор

$$P : \mathscr{H}^s_q(D) \longrightarrow \mathscr{H}^{s+1}_{q-1}(D)$$

такой, что

$$(Pf)(z) = -\int_D f(\zeta) \wedge U_{0,q-1}(\zeta,z).$$

Операторы $M$ и $P$ ограничены (см., например, [12]), поскольку первый из них является производной потенциала простого слоя, а второй — производной объемного потенциала. Эти операторы являются ограниченными и в дополнении $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Если мы хотим подчеркнуть, что операторы $M$ и $P$ рассматриваются в области $D$, то будем писать $M^+$ и $P^+$, а вне области — $M^-$ и $P^-$.

Форма $Mf$ имеет гармонические коэффициенты вне границы области $\partial D$ и убывает на бесконечности как $\frac{1}{|z|^{2n-1}}$. Форма $Pf$ имеет гармонические коэффициенты вне замыкания области $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ и убывает на бесконечности как $\frac{1}{|z|^{2n-1}}$.

Введем формулу Коппельмана (см. [8], а также [10, 13]).

**Теорема 1.** *Если $f \in \mathscr{H}_q^s(D)$, $s \geq 1$, то в области $D$*

$$f = Mf + \bar{\partial}Pf + P\bar{\partial}f, \tag{3}$$

*а в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$*

$$Mf + \bar{\partial}Pf + P\bar{\partial}f = 0.$$

Доказательство. Если форма $f$ имеет гладкие в замыкании области $D$ коэффициенты, то формула (3) есть обычная формула Коппельмана. Для формы $f \in \mathscr{H}_q^s(D)$ выберем последовательность форм $f_m$ с гладкими в замыкании области коэффициентами, аппроксимирующую форму $f$ в соболевской метрике. Записывая для каждой формы $f_m$ формулу (3) и переходя к пределу при $m \to \infty$, получим формулу (3) для формы $f$ по непрерывности. $\square$

## 2. Построение точных комплексов

Определим пространство $\mathscr{V}_q^s(D)$ следующим образом:

$$\mathscr{V}_q^s(D) = \{f \in \mathscr{H}_q^s(D) : Mf = 0,\ MPf = 0,\ MP^2f = 0, \dots,\ MP^qf = 0 \text{ в } D\}.$$

Тогда $\mathscr{V}_q^s(D)$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{H}_q^s(D)$. Описание этого пространства форм мы дадим позднее. Заметим, что $P^jf = 0$, если $j > q$.

**Теорема 2.** *Последовательность вида*

$$0 \longrightarrow \mathscr{V}_0^s(D) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{V}_1^{s-1}(D) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{V}_{n-1}^{s-n+1}(D) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{V}_n^{s-n}(D) \longrightarrow 0 \tag{4}$$

*является точным комплексом при $s > n$.*

Доказательство. Проверим, что оператор $\bar{\partial}$ действует в нужных пространствах, т. е.

$$\bar{\partial} : \mathscr{V}_q^s(D) \longrightarrow \mathscr{V}_{q+1}^{s-1}(D).$$

Пусть $f \in \mathscr{V}_q^s(D)$. Тогда $Mf = 0$, $MPf = 0, \dots, MP^qf = 0$ и в области $D$. Рассмотрим форму $\bar{\partial}f$. Операторы $\bar{\partial}$ и $M$ перестановочны. Действительно, как мы отмечали ранее, $\bar{\partial}_\zeta U_{0,q+1} = (-1)^{q+1}\bar{\partial}_z U_{0,q}$. Поэтому

$$\bar{\partial}_z Mf = \bar{\partial}_z \int_{\partial D} f(\zeta) \wedge U_{0,q}(\zeta, z) = \int_{\partial D} f(\zeta) \wedge \bar{\partial}_z U_{0,q}(\zeta, z)$$
$$= (-1)^{q+1} \int_{\partial D} f(\zeta) \wedge \bar{\partial}_\zeta U_{0,q+1}(\zeta, z) = \int_{\partial D} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge U_{0,q+1}(\zeta, z) = M\bar{\partial}_\zeta f.$$

Следовательно, $M\bar{\partial}f = \bar{\partial}Mf = 0$ в $D$.

Рассмотрим $MP\bar{\partial}f$. По формуле (3) имеем $f = \bar{\partial}Pf + P\bar{\partial}f$ в $D$. Отсюда $0 = Mf = M\bar{\partial}Pf + MP\bar{\partial}f$. Поэтому $0 = \bar{\partial}MPf = M\bar{\partial}Pf = -MP\bar{\partial}f$. Тогда $MP\bar{\partial}f = 0$.

Докажем, что

$$MP^k\bar{\partial}P^jf = -MP^{k-1}\bar{\partial}P^{j+1}f. \tag{5}$$

Для этого достаточно показать, что

$$MP^k\bar{\partial}f = -MP^{k-1}\bar{\partial}Pf. \tag{6}$$

Действительно, применяя к формуле (3) оператор $P^{k-1}$, получим

$$P^{k-1}f = P^{k-1}\bar{\partial}Pf + P^k\bar{\partial}f.$$

Действуя оператором $M$ на последнюю формулу, имеем

$$0 = MP^{k-1}f = MP^{k-1}\bar{\partial}Pf + MP^k\bar{\partial}f$$

и (6) установлено. Заменяя в (6) $f$ на $P^jf$, получаем (5). Тогда

$$MP^k\bar{\partial}f = -MP^{k-1}\bar{\partial}f = \cdots = (-1)^kM\bar{\partial}P^kf = (-1)^k\bar{\partial}MP^kf = 0$$

при $k = 1, \ldots, q$. Поскольку $P^{q+1}f \equiv 0$, то

$$MP^{q+1}\bar{\partial}f = (-1)^{q+1}M\bar{\partial}P^{q+1}f = 0.$$

Итак, $\bar{\partial}f \in \mathscr{V}_{q+1}^{s-1}(D)$. Поэтому комплекс (4) корректно определен.

Проверим его точность. Пусть $f \in \mathscr{V}_q^s(D)$ при $0 < q < n$ и $\bar{\partial}f = 0$. По формуле (3)

$$f = Mf + \bar{\partial}Pf + P\bar{\partial}f = \bar{\partial}Pf.$$

В силу свойств оператора $P$ форма $Pf$ принадлежит $\mathscr{H}_{q-1}^{s+1}(D)$. Покажем, что $Pf \in \mathscr{V}_{q-1}^{s+1}(d)$. Так как $Mf = 0$, $MPf = 0$, ... , $MP^qf = 0$, то $M(Pf) = 0$, $MP(Pf) = 0$, ... , $MP^{q-1}(Pf) = 0$.

Пусть $q = 0$, тогда $f$ — функция и $\bar{\partial}f = 0$. Тем самым функция $f$ голоморфна в $D$. Поскольку $Mf = 0$ и $Pf = 0$, по формуле (3)

$$f = Mf + \bar{\partial}Pf + P\bar{\partial}f = 0$$

и комплекс (4) точен в первом члене.

Пусть $q = n$, тогда $\bar{\partial}f = 0$, $Mf = 0$ для всех $f \in \mathscr{H}_n^{s-n}(D)$. Поэтому по формуле (3) имеем $f = \bar{\partial}Pf$ и, следовательно, $Pf \in \mathscr{V}_{n-1}^{s-n+1}(D)$. $\square$

Определим оператор

$$\pi : \mathscr{H}_q^s(D) \longrightarrow \mathscr{V}_q^s(D)$$

проекции относительно скалярного произведения в $\mathscr{H}_q^s(D)$. Тогда

$$\mathscr{H}_q^s(D) \cong \mathscr{V}_q^s(D) \oplus \mathscr{H}_q^s(D)/\mathscr{V}_q^s(D).$$

Пусть $T = I - \pi$, где $I$ — тождественный оператор и $\bar{\partial}_\pi = (I-\pi)\bar{\partial} = T\bar{\partial}$. Так как комплекс (4) по теореме 2 точный, то $\pi \circ \bar{\partial} = \bar{\partial} \circ \pi$. Значит, $T\bar{\partial} = \bar{\partial}T$. Оператор $\bar{\partial}_\pi$ действует следующим образом:

$$\bar{\partial}_\pi : \mathscr{H}_q^s(D)/\mathscr{V}_q^s(D) \longrightarrow \mathscr{H}_{q+1}^{s-1}(D)/\mathscr{V}_{q+1}^{s-1}(D).$$

Обозначив $\mathscr{Q}_q^s(D) = \mathscr{H}_q^s(D)/\mathscr{V}_q^s(D)$, получим, что

$$\bar{\partial}_\pi : \mathscr{Q}_q^s(D) \longrightarrow \mathscr{Q}_{q+1}^{s-1}(D).$$

Ясно, что $\bar{\partial}_\pi \circ \bar{\partial}_\pi = 0$.

Алгебраическая конструкция оператора $\bar{\partial}_\pi$ в действительности та же самая, что и касательного оператора $\bar{\partial}_b$ (см. [14]).

Определим матричный оператор

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} -\bar{\partial} & 0 \\ T & \bar{\partial}_\pi \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим последовательность

$$0 \to \begin{matrix} \mathscr{H}_0^s(D) \\ \oplus \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow{\mathscr{A}} \begin{matrix} \mathscr{H}_1^{s-1}(D) \\ \oplus \\ \mathscr{Q}_0^s(D) \end{matrix} \xrightarrow{\mathscr{A}} \ldots \xrightarrow{\mathscr{A}} \begin{matrix} \mathscr{H}_n^{s-n}(D) \\ \oplus \\ \mathscr{Q}_{n-1}^{s-n+1}(D) \end{matrix} \xrightarrow{\mathscr{A}} \begin{matrix} 0 \\ \oplus \\ \mathscr{Q}_n^{s-n}(D) \end{matrix} \to 0. \tag{7}$$

**Теорема 3.** *При $n > 1$ и $s > n$ последовательность* (7) *является точным комплексом.*

Доказательство. Последовательность (7) является комплексом, поскольку

$$\mathscr{A}\circ\mathscr{A} = \begin{pmatrix} -\bar\partial & 0 \\ T & \bar\partial_\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\bar\partial & 0 \\ T & \bar\partial_\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar\partial^2 & 0 \\ -T\bar\partial + \bar\partial_\pi T & \bar\partial_\pi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\bar\partial_\pi T = T\bar\partial T = \bar\partial T^2 = \bar\partial T$, так как $T$ — оператор проекции и $T^2 = T$.

Покажем точность этого комплекса. Сначала проверим ее в средних членах. Пусть

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \begin{matrix} \mathscr{H}_q^s(D) \\ \oplus \\ \mathscr{Q}_{q-1}^{s+1}(D), \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \begin{matrix} \mathscr{H}_{q+1}^{s-1}(D) \\ \oplus \\ \mathscr{Q}_q^s(D). \end{matrix}$$

Рассмотрим уравнение

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{при условии} \quad \mathscr{A}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Перепишем его в виде

$$\begin{cases} -\bar\partial u_1 = f_1, \\ Tu_1 + \bar\partial_\pi u_2 = f_2, \end{cases} \tag{8}$$

а условие согласования примет вид

$$\begin{cases} \bar\partial f_1 = 0, \\ Tf_1 + \bar\partial_\pi f_2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Для краткости записи обозначая через $u_2$ и $f_2$ представителей фактор-пространств, получим условия (9) в виде

$$\begin{cases} \bar\partial f_1 = 0, \\ (I-\pi)f_1 + (I-\pi)\bar\partial f_2 \in \mathscr{V}_q^s(D) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \bar\partial f_1 = 0, \\ f_1 + \bar\partial f_2 \in \mathscr{V}_q^s(D), \end{cases}$$

поскольку $\pi f_1 + \pi\bar\partial f_2 \in \mathscr{V}_q^s(D)$. Тогда форма $f_1 + \bar\partial f_2$ замкнута и по теореме 2 будет $f_1 + \bar\partial f_2 = \bar\partial v$, где $v \in \mathscr{V}_{q-1}^{s+1}(D)$. Следовательно, $f_1 = \bar\partial(v - f_2)$ и $v - f_2 \in \mathscr{H}_{q-1}^{s+1}(D)$.

Переписывая систему (8) для представителей фактор-пространств, получим

$$\begin{cases} -\bar\partial u_1 = f_1, \\ (I-\pi)u_1 + (I-\pi)\bar\partial u_2 - f_2 \in \mathscr{V}_{q-1}^{s+1}(D) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -\bar\partial u_1 = f_1, \\ u_1 + \bar\partial u_2 - f_2 \in \mathscr{V}_{q-1}^{s+1}(D). \end{cases}$$

Положим $u_2 = 0$, $u_1 = f_2 - v$. Тогда $-\bar\partial u_1 = \bar\partial(v - f_2) = f_1$, а $f_2 - v - f_2 = -v \in \mathscr{V}_{q-1}^{s+1}(D)$. Поэтому точность в средних членах показана.

Рассмотрим крайние члены. Пусть $u_1 \in \mathscr{H}_0^s(D)$ и

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $u_1 = 0$. Имеем

$$\begin{cases} -\bar{\partial} u_1 = 0, \\ \quad u_1 \in \mathscr{V}_0^s(D). \end{cases}$$

Отсюда функция $u_1$ голоморфна в $D$ и $Mu_1 = 0$. По формуле (3) тогда $u_1 = Mu_1 = 0$.

Пусть

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \begin{array}{c} \mathscr{H}_n^{s-n}(D) \\ \oplus \\ \mathscr{Q}_{n-1}^{s-n+1}(D), \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \begin{array}{c} 0 \\ \oplus \\ \mathscr{Q}_n^{s-n}(D). \end{array}$$

Рассмотрим уравнение

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

условия согласования отсутствуют. Переходя к представителям фактор-пространств, получим систему

$$\begin{cases} -\bar{\partial} u_1 = 0, \\ u_1 + \bar{\partial} u_2 - f_2 \in \mathscr{V}_n^{s-n}(D). \end{cases}$$

Положим $u_1 = 0$. Тогда $\bar{\partial} u_2 - f_2 \in \mathscr{V}_n^{s-n}(D)$ или $\bar{\partial} u_2 = f_2 + w_2$, где $w_2 \in \mathscr{V}_n^{s-n}(D)$. Поскольку $f_2$ — $(0,n)$-форма, по формуле (3) имеем $f_2 = \bar{\partial} P f_2$. Форма $w_2$ также $\bar{\partial}$-замкнутая, поэтому аналогично предыдущему $w_2 = \bar{\partial} w_2$. Из доказательства теоремы 2 вытекает, что если $w_2 \in \mathscr{V}_n^{s-n}(D)$, то $Pw_2 \in \mathscr{V}_{n-1}^{s-n+1}(D)$. Тогда положим $u_2 = P(f_2 + w_2)$. Теорема 3 доказана. □

Замечание 1. Рассмотрим комплекс (7) на комплексной плоскости

$$0 \to \begin{array}{c} \mathscr{H}_0^s(D) \\ \oplus \\ 0 \end{array} \xrightarrow{\mathscr{A}} \begin{array}{c} \mathscr{H}_1^{s-1}(D) \\ \oplus \\ \mathscr{Q}_0^s(D) \end{array} \xrightarrow{\mathscr{A}} \begin{array}{c} 0 \\ \oplus \\ \mathscr{Q}_1^{s-1}(D) \end{array} \to 0.$$

Опишем пространства этого комплекса. Функция $u \in \mathscr{H}_0^s(D)$ по формуле (3) принимает вид $u = Mu + P\bar{\partial} u$, так как $Pu = 0$. Тогда

$$\mathscr{V}_0^s(D) = \{u \in \mathscr{H}_0^s(D) : Mu = 0\} = \{u \in \mathscr{H}_0^s(D) : u = P\bar{\partial} u\}.$$

Отсюда

$$\mathscr{Q}_0^s(D) = \mathscr{H}_0^s(D)/\mathscr{V}_0^s(D) \cong \{u \in \mathscr{H}_0^s(D) : u = Mu\} = \mathscr{O}_0^s(D).$$

Поскольку функция $u$ голоморфна в $D$, это пространство Харди.

Рассмотрим пространство

$$\mathscr{V}_1^{s-1}(D) = \{u \in \mathscr{H}_1^{s-1}(D) : Mu = 0,\ MPu = 0\}.$$

На комплексной плоскости $M$ и $P$ — интегральные операторы с ядром Коши. Поэтому $Pu$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, следовательно, $MPu = 0$ для всех $u \in \mathscr{H}_1^{s-1}(D)$. Функция $Mu = 0$ для всех $u \in \mathscr{H}_1^{s-1}(D)$, ибо на границе области $\partial D$ все формы типа $(0,2)$ равны нулю. В результате $\mathscr{V}_1^{s-1}(D) \cong \mathscr{H}_1^{s-1}(D)$ и $\mathscr{Q}_1^{s-1}(D) \cong 0$. Мы получили комплекс

$$0 \to \begin{array}{c} \mathscr{H}_0^s(D) \\ \oplus \\ 0 \end{array} \xrightarrow{\mathscr{A}} \begin{array}{c} \mathscr{H}_1^{s-1}(D) \\ \oplus \\ \mathscr{Q}_0^s(D) \end{array} \to 0,$$

очевидно, точный.

### 3. Описание пространств $\mathscr{V}_q^s(D)$, $q = 0, n$

Перейдем к описанию пространств $\mathscr{V}_q^s(D)$.

**Теорема 4.** *Пусть $n > 1$ и $f \in \mathscr{V}_0^s(D)$. Тогда $f\big|_{\partial D} = 0$ и $\mathscr{Q}_0^s(D) \cong \mathscr{H}_0^{s-1/2}(\partial D)$.*

Доказательство. Поскольку $f \in \mathscr{V}_0^s(D)$, то $Mf = 0$ в $D$. По следствию 15.6 из [15] имеем $Mf \in \mathscr{H}^s(D)$ и $Mf = f = 0$ на $\partial D$. Пространство $\mathscr{H}_0^s(D)$ является прямой суммой подпространств, состоящих из гармонических функций и из функций, равных нулю на границе (см. [12]). Первое подпространство изоморфно $\mathscr{H}_0^{s-1/2}(\partial D)$ (см. [12]). Поэтому $\mathscr{Q}_0^s(D) \cong \mathscr{H}_0^{s-1/2}(\partial D)$. $\square$

В дальнейшем нам понадобится теорема о скачке для интеграла $Mf$.

**Теорема 5** [15, 11]. *Пусть форма $f$ типа $(p, q)$ с коэффициентами класса $\mathscr{H}^s(D)$, $s \geq 1$. Тогда $(M^+f)_\tau - (M^-f)_\tau = f_\tau$ и $(M^+f)_\nu - (M^-f)_\nu = 0$ на $\partial D$.*

Рассмотрим форму $f \in \mathscr{H}_n^s(D)$. Она имеет вид $f = a(z)d\bar{z}$. Обозначим через $G_f$ объемный потенциал

$$G_f(z) = \int\limits_D g(\zeta, z)\, d\zeta \wedge f(\zeta) = \int\limits_D g(\zeta, z) a(\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

**Теорема 6.** *Следующие условия эквивалентны:*

1) $f \in \mathscr{V}_n^s(D)$,

2) $MPf = 0$ *в* $D$,

3) $P^2 f = 0$ *в* $\mathbb{C}^n$,

4) $G_f$ *антиголоморфно продолжается с* $\partial D$ *в* $D$,

5) $a = \Delta\varphi$, *где* $\varphi \in \mathscr{H}^2(\mathbb{C}^n) \cap \mathscr{H}^{s+2}(D)$, $\varphi$ *гармонична в* $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ *и* $\partial_b \varphi = 0$ *на* $\partial D$, *т. е.* $\varphi$ *антиголоморфно продолжается с* $\partial D$ *в* $D$.

Доказательство разобьем на ряд лемм.

**Лемма 3.** *Форма $MPf$ равна 0 в $D$ тогда и только тогда, когда $G_f$ антиголоморфно продолжается с $\partial D$ в $D$.*

Доказательство. Пусть

$$VPf(z) = \int\limits_{\partial D} g(\zeta, z)(Pf)(\zeta) \wedge d\zeta.$$

Сначала покажем, что $MPf = 0$ в $D$ тогда и только тогда, когда $VPf$ антиголоморфна в $D$. Действительно,

$$MPf(z) = \int\limits_{\partial D} (Pf)(\zeta) \wedge U_{0,n-1}(\zeta, z) = \sum_{k=1}^n \int\limits_{\partial D} (Pf)(\zeta)(-1)^{k-1} \frac{\partial g}{\partial \zeta_k}(\zeta, z) \wedge d\zeta\, d\bar{z}[k]$$
$$= \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\partial}{\partial z_k} \left( \int\limits_{\partial D} (Pf)(\zeta) g(\zeta, z) \wedge d\zeta \right) d\bar{z}[k] = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\partial}{\partial z_k} (VPf)\, d\bar{z}[k].$$

Если $MPf = 0$, то, очевидно, $\frac{\partial}{\partial z_k}(VPf) = 0$ в $D$ и $VPf$ антиголоморфна в $D$, и обратно.

Рассмотрим форму $VPf$. Вычислим сначала

$$(Pf)(\zeta)\wedge d\zeta=\int_D f(w)\wedge U_{0,n-1}(w,\zeta)\wedge d\zeta$$
$$=\int_D a(w)\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\frac{\partial g}{\partial w_k}(w,\zeta)\,d\bar w\wedge dw\,d\bar\zeta[k]\wedge d\zeta$$
$$=\int_D a(w)\,d\bar w\wedge dw\sum_{k=1}^n(-1)^k\frac{\partial g}{\partial \zeta_k}(w,\zeta)\,d\bar\zeta[k]\wedge d\zeta=\partial_\zeta G_f\wedge\sum_{k=1}^n d\bar\zeta[k]\wedge d\zeta[k]$$
$$=\sum_{k=1}^n(-1)^{n+k}\frac{\partial G_f}{\partial\zeta_k}(\zeta)\,d\bar\zeta[k]\wedge d\zeta=\mu_{G_f}.$$

Функция $G_f$ принадлежит классу $\mathscr{H}^2(\mathbb{C}^n)$ и гармоническая в $\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}$, поэтому форма $\mu_{G_f}$ замкнута в $\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}$, ибо

$$d\mu_{G_f}=(-1)^{n+1}\Delta G_f d\bar\zeta\wedge d\zeta=0\quad\text{в } \mathbb{C}^n\setminus\overline{D}.$$

Значит, для точек $z\in D$ выполняются соотношения

$$VPf(z)=\int_{\partial D} g(\zeta,z)Pf(\zeta)\wedge d\zeta=\int_{\partial D} g(\zeta,z)\mu_{G_f}(\zeta)$$
$$=\int_{\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}}(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^n\frac{\partial g}{\partial\bar\zeta_k}(\zeta,z)\frac{\partial G_f}{\partial\zeta_k}(\zeta)\,d\bar\zeta\wedge d\zeta$$
$$=\int_{\partial D} G_f(\zeta)\sum_{k=1}^n(-1)^k\frac{\partial g}{\partial\bar\zeta_k}(\zeta,z)\,d\zeta[k]\wedge d\bar\zeta=\int_{\partial D} G_f(\zeta)\overline{U_{0,0}(\zeta,z)}.$$

Отсюда функция $VPf$ антиголоморфна в $D$ тогда и только тогда, когда

$$(VPf)\big|_{\partial D}=G_f\big|_{\partial D}$$

(см. [15, следствие 15.6]). Таким образом, $MPf=0$ в $D$ тогда и только тогда, когда $G_f$ антиголоморфно продолжается в $D$. $\square$

Лемма 3 дает эквивалентность утверждений 2 и 4 теоремы.

**Лемма 4.** *Форма* $MPf$ *равна* 0 *в* $D$ *тогда и только тогда, когда* $P^2f=0$ *в* $\mathbb{C}^n$.

Доказательство. Рассмотрим ядро $U_{0,n-2}(\zeta,z)$, обозначим $d\bar z_I=d\bar z[k,m]$ при $k<m$. Тогда

$$U_{0,n-2}=\sum_{k<m}\left(\sigma(I,k)\frac{\partial g}{\partial\zeta_k}d\bar\zeta_m+\sigma(I,m)\frac{\partial g}{\partial\zeta_m}d\bar\zeta_k\right)\wedge d\zeta\,d\bar z[k,m]$$
$$=\sum_{k<m}\left((-1)^{k+m+n-1}\frac{\partial g}{\partial\zeta_k}d\bar\zeta_m+(-1)^{k+m+n}\frac{\partial g}{\partial\zeta_m}d\bar\zeta_k\right)\wedge d\zeta\,d\bar z[k,m].$$

Найдем знаки: $\sigma(I,k)=(-1)^{k+m+n-1}$ и $\sigma(I,m)=(-1)^{k+m+n}$, поскольку

$$\sigma(I,k)\,d\zeta=d\zeta_k\wedge d\zeta_I\wedge d\zeta[I,k]=d\zeta_k\wedge d\zeta[k,m]\wedge d\zeta_m=(-1)^{k-1+n+m}d\zeta.$$

Тогда (см. доказательство леммы 2)

$$
\begin{aligned}
&Pf(\zeta)\wedge U_{0,n-2}(\zeta,z)\\
&=\sum_{s=1}^{n}(-1)^s\frac{\partial G_f}{\partial\zeta_s}d\bar\zeta[s]\wedge\sum_{k<m}\left((-1)^{k+m-1}\frac{\partial g}{\partial\zeta_k}d\bar\zeta_m+(-1)^{k+m}\frac{\partial g}{\partial\zeta_m}d\bar\zeta_k\right)\wedge d\zeta\,d\bar z[k,m]\\
&\quad=(-1)^{n-1}\sum_{k<m}\left((-1)^{k+m}\frac{\partial g}{\partial\zeta_k}\frac{\partial G_f}{\partial\zeta_m}+(-1)^{k+m-1}\frac{\partial g}{\partial\zeta_m}\frac{\partial G_f}{\partial\zeta_k}\right)d\bar\zeta\wedge d\zeta\,d\bar z[k,m]\\
&\qquad=(-1)^{n-1}\sum_{k<m}(-1)^{k+m}\left(\frac{\partial g}{\partial\zeta_k}\frac{\partial G_f}{\partial\zeta_m}-\frac{\partial g}{\partial\zeta_m}\frac{\partial G_f}{\partial\zeta_k}\right)d\bar\zeta\wedge d\zeta\,d\bar z[k,m]\\
&\qquad\qquad=(-1)^{n-1}\sum_{k<m}dg\wedge dG_f\wedge d\bar\zeta\wedge d\zeta[k,m]\,d\bar z[k,m],
\end{aligned}
$$

поскольку

$$
\begin{aligned}
&dg\wedge dG_f\wedge d\bar\zeta\wedge d\zeta[k,m]\\
&\quad=\left(\frac{\partial g}{\partial\zeta_k}d\zeta_k+\frac{\partial g}{\partial\zeta_m}d\zeta_m\right)\wedge\left(\frac{\partial G_f}{\partial\zeta_k}d\zeta_k+\frac{\partial G_f}{\partial\zeta_m}d\zeta_m\right)\wedge d\bar\zeta\wedge d\zeta[k,m]\\
&\qquad=\left((-1)^{k+m}\frac{\partial g}{\partial\zeta_k}\frac{\partial G_f}{\partial\zeta_m}+(-1)^{k+m-1}\frac{\partial g}{\partial\zeta_m}\frac{\partial G_f}{\partial\zeta_k}\right)d\bar\zeta\wedge d\zeta.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
P^2f(z)=(-1)^{n-1}\sum_{k<m}\int\limits_D dg\wedge dG_f\wedge d\bar\zeta\wedge d\zeta[k,m]\,d\bar z[k,m].
$$

Поэтому по формуле Стокса для $z\notin\overline{D}$ получим

$$
P^2f(z)=\sum_{k<m}\int\limits_{\partial D}G_f dg\wedge d\bar\zeta\wedge d\zeta[k,m]\,d\bar z[k,m].
$$

Если $MPf=0$ в $D$, то по лемме 3 функция $G_f$ антиголоморфно продолжается в $D$ с границы $\partial D$ и тогда $P^2f(z)=0$ в $\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}$, поскольку $G_f$ ортогональна формам $dg\wedge d\bar\zeta\wedge d\zeta[k,m]$ по формуле Стокса.

Пусть $z\in D$, тогда

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_D dg\wedge dG_f\wedge d\bar\zeta\wedge d\zeta[k,m]=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{D\setminus\{\zeta:\,|\zeta-z|<\varepsilon\}}dg\wedge dG_f\wedge d\bar\zeta\wedge d\zeta[k,m]\\
&\quad=-\int\limits_{\partial D}G_f dg\wedge d\bar\zeta\wedge d\zeta[k,m]+\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\{\zeta:\,|\zeta-z|=\varepsilon\}}G_f dg\wedge d\bar\zeta\wedge d\zeta[k,m]\\
&\qquad=-\int\limits_{\partial D}G_f dg\wedge d\bar\zeta\wedge d\zeta[k,m].
\end{aligned}
$$

Поскольку $dg\wedge d\bar\zeta\wedge d\zeta[k,m]|_{\{\zeta:\,|\zeta-z|=\varepsilon\}}=0$, так как $g|_{\{\zeta:\,|\zeta-z|=\varepsilon\}}=\mathrm{const}$, по лемме 3 $P^2f=0$ в $D$. Отсюда $P^2f=0$ в $\mathbb{C}^n$.

Докажем обратное, если $P^2f=0$, то $G_f$ антиголоморфно продолжается в $D$. Из предыдущего получаем, что функция $G_f$ ортогональна формам

$$
dg\wedge d\bar\zeta\wedge d\zeta[k,m]\quad\text{для}\quad z\notin\partial D. \tag{10}
$$

Поскольку $g(\zeta, z)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, формы вида (10) плотны в $\partial$-точных формах типа $(n-2, n)$ и, следовательно, по теореме Гартогса для антиголоморфных функций $G_f$ антиголоморфно продолжается в $D$. Тем самым мы показали эквивалентность утверждений 2 и 3. $\square$

Эквивалентность условий 1–4 следует из лемм 3 и 4 и из определения пространства $\mathscr{V}_n^s(D)$. Таким образом, условия 1–4 эквивалентны.

**Лемма 5.** *Условия* 4 *и* 5 *теоремы* 6 *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $G_f$ антиголоморфно продолжается с $\partial D$ и $D$. Потенциал $G_f$ обладает следующими свойствами: $G_f \in \mathscr{H}^{s+2}(D) \cap \mathscr{H}^2(\mathbb{C}^n)$, $G_f$ — гармоническая функция в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ и $\Delta G_f = \left(-\frac{i}{2}\right)^n a$. Поэтому в качестве функции $\varphi$ можно взять $(2i)^n G_f$.

Обратно, пусть для формы $f$ выполнено условие 5. Применим к функции $\varphi$ формулу Грина в комплексной форме (см. [15, теорема 1.1]):

$$\varphi(z) = \int\limits_{\partial D} \varphi(\zeta)\overline{U_{0,0}(\zeta, z)} - \int\limits_{\partial D} g(\zeta, z)\mu_\varphi(\zeta) + \int\limits_{D} g(\zeta, z)\Delta\varphi(\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

для $z \in D$. Поскольку $\varphi$ принадлежит $\mathscr{H}^1(\mathbb{C}^n)$ и гармонична в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, из доказательства леммы 3 имеем

$$\int\limits_{\partial D} \varphi(\zeta)\overline{U_{0,0}(\zeta, z)} = \int\limits_{\partial D} g(\zeta, z)\mu_\varphi(\zeta).$$

Следовательно,

$$\varphi(z) = \int\limits_{D} g(\zeta, z)\Delta\varphi(\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = G_f.$$

Поэтому $G_f$ антиголоморфно продолжается в $D$. $\square$

## 4. Регулярные области

В отличие от крайних случаев, в которых область $D$ произвольна, описание пространств $\mathscr{V}_q^s(D)$, $1 \le q \le n-1$, получено для более узкого класса так называемых «регулярных» областей $D$. Под регулярной областью $D$ будем подразумевать область, для которой $H^q(\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}, \mathscr{O}) \cong 0$, $1 \le q \le n-2$, и, более того, для всякой $\bar{\partial}$-замкнутой формы $f \in \mathscr{H}_q^s(\mathbb{C}^n \setminus \overline{D})$ существует решение $u \in \mathscr{H}_{q-1}^s(\mathbb{C}^n \setminus \overline{D})$ дифференциального уравнения $\bar{\partial} u = f$ с оценкой

$$\|u\|_{\mathscr{H}_{q-1}^s(\mathbb{C}^n \setminus \overline{D})} \le C(D)\|f\|_{\mathscr{H}_q^s(\mathbb{C}^n \setminus \overline{D})},$$

где константа $C(D)$ не зависит от $f$.

В этот класс входят строго псевдовыпуклые области $D$ (см. теорему 8.7 из [16]).

**Теорема 7.** *Пусть область $D$ регулярная. Тогда условие $Mf = 0$ в $D$ эквивалентно условию $f_\tau = 0$ на $\partial D$ для форм $f \in \mathscr{H}_q^s(D)$, $0 \le q \le n-2$.*

Доказательство. Сначала получим условие $\bar{\partial}$-замкнутости формы $Mf$.

**Лемма 6.** *Форма $M^+f$ является $\bar\partial$-замкнутой в $D$ тогда и только тогда, когда форма $M^-f$ $\bar\partial$-замкнута в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$.*

Доказательство. Пусть $\bar\partial M^- f = 0$. Тогда по теореме 5 имеем

$$(\bar\partial M^+ f)_\nu = 0,$$

так как

$$(\bar\partial M^+ f)_\nu = (M^+ \bar\partial f)_\nu = (M^- \bar\partial f)_\nu = (\bar\partial M^- f)_\nu = 0.$$

Поскольку $\Delta = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$ и $M^+f$ гармонична и $\bar\partial^*$-замкнута в $D$ по лемме 2, используя равенство (1), получим

$$\|\bar\partial M^+ f\|^2 = (\bar\partial M^+ f, \bar\partial M^+ f) = (\bar\partial^*\bar\partial M^+ f, M^+ f) = -(\bar\partial\bar\partial^* M^+ f, M^+ f) = 0.$$

Поэтому $\bar\partial M^+ f = 0$ в $D$.

В обратную сторону доказательство аналогично. $\square$

**Лемма 7.** *Форма $M^+f$ равна 0 в $D$ тогда и только тогда, когда $f_\tau = -(M^-f)_\tau$ и $\bar\partial M^- f = 0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$.*

Доказательство. Пусть $M^+f = 0$ в $D$. Тогда по теореме 5 $f_\tau = -(M^-f)_\tau$, так как $(M^+f)_\tau = 0$. Поскольку $\bar\partial M^+ f = 0$, то, очевидно, по лемме 5 $\bar\partial M^- f = 0$.

Обратно, пусть $f_\tau = -(M^-f)_\tau$ и $\bar\partial M^- f = 0$. Тогда по лемме 5 $\bar\partial M^+ f = 0$, а по теореме 5 $(M^+f)_\tau = 0$. По лемме 2 имеем $M^+f = \bar\partial^* h$, где

$$h = \int\limits_{\partial D} f(\zeta) \wedge V_{0,q+1}(\zeta, z).$$

Поэтому по формуле (1)

$$\|M^+ f\|^2 = (M^+ f, M^+ f) = (M^+ f, \bar\partial^* h) = (\bar\partial M^+ f, h) = 0.$$

Следовательно, $M^+f = 0$ в $D$. $\square$

**Лемма 8.** *Пусть $F \in \mathscr{H}^s_q(\mathbb{C}^n \setminus \overline{D})$ и $F_\nu = 0$, $\bar\partial F = 0$, $\bar\partial^* F = 0$. Тогда $F = 0$.*

Доказательство. Поскольку область $D$ регулярная, существует такая $u \in \mathscr{H}^s_{q-1}(\mathbb{C}^n \setminus \overline{D})$, что $\bar\partial u = F$. Рассматривая скалярное произведение и норму Ходжа в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, получим

$$\|F\|^2 = (F, F) = (F, \bar\partial u) = (\bar\partial^* F, u) = 0.$$

Следовательно, $F = 0$. $\square$

Закончим доказательство теоремы 7. Поскольку $M^+f = 0$, по лемме 6 будет $f_\tau = -(M^-f)_\tau$ и $\bar\partial M^- f = 0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Кроме того, по теореме 5 $(M^-f)_\nu = (M^+f)_\nu = 0$. По лемме 2 имеем $M^-f = \bar\partial^* h$, а значит, $\bar\partial^* M^- f = 0$. Применяя лемму 7 к форме $F = M^-f$, получим, что $M^-f = 0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Тогда $f_\tau = -(M^-f)_\tau = 0$.

Обратно, поскольку $f_\tau = 0$, то $M^+f \equiv 0$ в $D$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2. Как показывают доказательства, леммы 5 и 6 справедливы для любых областей $D$ и форм любой размерности.

**Теорема 8.** *Пусть область $D$ регулярная, форма $f$ принадлежит $\mathscr{H}^s_q(D)$ для $1 \le q \le n-1$, $s \ge 1$ и $Mf = 0$, $MPf = 0$ в $D$. Тогда $f \in \mathscr{V}^s_q(D)$.*

Доказательство этой теоремы будет следовать из двух лемм.

**Лемма 9.** *В условиях теоремы* 8 *выполняется* $Pf = 0$ *в* $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$.

Доказательство. Пусть $MPf = 0$ в $D$. Поскольку размерность формы $MPf$ равна $q-1 < n-1$, по теореме 7 имеем $(Pf)_\tau = 0$ на $\partial D$. По лемме 2

$$Pf(z) = \int_D f(\zeta) \wedge U_{0,q-1}(\zeta, z) = \int_D f(\zeta) \wedge \bar\partial_z^* V_{o,q}(\zeta, z)$$

$$= \bar\partial^* \int_D f(\zeta) \wedge V_{0,q}(\zeta, z) = \bar\partial^* R_q f.$$

Форма $R_q f$ имеет гармонические коэффициенты в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, поскольку ядро $V_{0,q}$ гармонично по внешнему переменному. Покажем, что $\bar\partial Pf = 0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$.

Форма $\bar\partial Pf$ удовлетворяет условиям:

1) $(\bar\partial Pf)_\tau = 0$, поскольку $(\bar\partial Pf)_\tau = \bar\partial_b (Pf)_\tau = 0$,

2) $\bar\partial(\bar\partial Pf) = 0$,

3) форма $\bar\partial Pf$ является $\bar\partial^*$-точной в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, так как $\bar\partial Pf = \bar\partial\bar\partial^* R_q f = -\bar\partial^* \bar\partial R_q f$, поскольку форма $R_q f$ гармонична в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$.

Рассмотрим скалярное произведение и норму Ходжа в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$:

$$\|\bar\partial Pf\|^2 = (\bar\partial Pf, \bar\partial Pf) = (\bar\partial Pf, -\bar\partial^* \bar\partial R_q f) = (\bar\partial^2 Pf, -\bar\partial R_q f) = 0.$$

Отсюда $\bar\partial Pf = 0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$.

Форма $Pf$ обладает такими же свойствами:

1) $(Pf)_\tau = 0$,

2) $\bar\partial Pf = 0$,

3) $Pf = \bar\partial^* R_q f$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$.

Аналогично

$$\|Pf\|^2 = (Pf, Pf) = (Pf, \bar\partial^* R_q f) = (\bar\partial Pf, R_q f) = 0,$$

поэтому $Pf = 0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. $\square$

**Лемма 10.** *В условиях теоремы* 8 *имеет место равенство* $P^2 f = 0$ *в* $\mathbb{C}^n$.

Доказательство. Поскольку по лемме 9 выполняется

$$Pf = \bar\partial^* R_q f = - * \partial * R_q f,$$

то для $z \in \mathbb{C}^n$ из формулы (2) следует, что

$$P^2 f(z) = \int_D Pf(\zeta) \wedge U_{0,q-2}(\zeta, z) = -\int_D *\partial * R_q f(\zeta) \wedge \partial g(\zeta, z) \wedge W_{0,q-2}(\zeta)$$

$$= -\int_D *d * R_q f(\zeta) \wedge dg(\zeta, z) \wedge W_{0,q-2}(\zeta) = \int_{\partial D} g(\zeta, z)(*d * R_q f(\zeta)) \wedge W_{0,q-2}(\zeta)$$

$$= \int_{\partial D} g(\zeta, z)(*\partial * R_q f(\zeta)) \wedge W_{0,q-2}(\zeta) = -\int_{\partial D} g(\zeta, z) Pf(\zeta) \wedge W_{0,q-2}(\zeta) = 0.$$

В этих интегралах мы заменили $\partial$ на $d$, поскольку подынтегральная форма имеет полный набор дифференциалов по $\bar\zeta$. При применении формулы Стокса мы воспользовались $\partial$-замкнутостью формы $*\partial * R_q f \wedge W_{0,q-2}$, поскольку

$$*\partial * R_q f \wedge W_{0,q-2} = \partial * R_q f \wedge *W_{0,q-2}$$

и форма $W_{0,q-2}$ — это форма с постоянными коэффициентами. Теорема доказана. $\square$

Перейдем к описанию пространств $\mathscr{V}_q^s(D)$ для $1 \leq q < n-1$.

**Теорема 9.** *Пусть область $D$ регулярная и $1 \le q < n-1$, $s \ge 1$. Для того чтобы $f \in \mathscr{V}_q^s(D)$, необходимо и достаточно, чтобы $f_\tau = 0$, $f = \Delta\varphi$ для $\varphi \in \mathscr{H}_q^{s+2}(D) \cap \mathscr{H}_q^2(\mathbb{C}^n)$ и $\bar\partial^*\varphi = 0$, $\bar\partial^*\bar\partial\varphi = 0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ (в частности, $\varphi$ гармонична в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$).*

Доказательство. Пусть $f(\zeta) = \sum_J' a_J d\bar\zeta_J$, где $J$ — возрастающий мультииндекс порядка $q$. Преобразуем интеграл $Pf$ для $z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. По лемме 2 получим

$$Pf(z) = \int_D f(\zeta) \wedge U_{0,q-1}(\zeta, z) = \bar\partial_z^* \int_D f(\zeta) \wedge V_{0,q}(\zeta, z).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} Gf(z) &= \int_D f(\zeta) \wedge V_{0,q}(\zeta, z) \\ &= \frac{1}{2}(-1)^{n+1} \int_D {\sum_J}' a_J(\zeta)\, d\bar\zeta_J \wedge {\sum_I}' \sum_{k \notin I} \sigma(I \cup k) g(\zeta, z)\, d\bar\zeta[I \cup k] \wedge d\zeta\, d\bar z_{I \cup k} \\ &= \frac{1}{2}(-1)^{n+1} {\sum_I}' \sum_{k \notin I} d\bar z_{I\cup k} \int_D a_{I \cup k}(\zeta) g(\zeta, z)\, d\bar\zeta \wedge d\zeta. \end{aligned}$$

Поэтому $Pf = \bar\partial^* Gf$. Тогда по свойству объемного потенциала имеем $Gf \in \mathscr{H}_q^{s+2}(D) \cap \mathscr{H}_q^2(\mathbb{C}^n)$, $Gf$ гармонична в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ и $\Delta Gf = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(2i)^n f$ в $D$.

Если $Mf = 0$, $MPf = 0$ и $q < n-1$, то по теореме 7 и лемме 8 $f_\tau = 0$ и $Pf = 0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Поэтому для $z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ выполняется равенство $\bar\partial^* Gf = 0$.

Таким образом, если возьмем форму

$$\varphi = \frac{Gf}{(-1)^{n+1} 2^{n-1} i^n},$$

то для нее будет выполнено заключение теоремы 9. Действительно,

$$0 = \Delta\varphi = \bar\partial^*\bar\partial\varphi + \bar\partial\bar\partial^*\varphi = \bar\partial^*\bar\partial\varphi \quad \text{в } \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}.$$

Обратно, если $f_\tau = 0$ и $f = \Delta\varphi$, где форма $\varphi$ удовлетворяет условиям теоремы, то $Mf = 0$, а $Gf = (-1)^{n+1} 2^{n-1} i^n \varphi$. Последнее равенство установим с использованием формулы Грина в комплексной форме, примененной к коэффициентам формы $\varphi$.

Пусть $\varphi = \sum_J' \varphi_J(\zeta)\, d\bar\zeta_J$, где $J$ — возрастающий мультииндекс порядка $q$. Тогда (см. [15])

$$\int_{\partial D} \varphi_J(\zeta) U_{0,0}(\zeta, z) + \int_D g(\zeta, z) \Delta\varphi_J(\zeta)\, d\bar\zeta \wedge d\zeta - \int_{\partial D} g(\zeta, z) \mu_{\varphi_J}(\zeta) = \varphi_J(z)$$

для $z \in D$. В данной формуле

$$\mu_{\varphi_J} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-1} \frac{\partial\varphi_J}{\partial\bar\zeta_k}\, d\zeta[k] \wedge d\bar\zeta.$$

Поскольку $\varphi_J \in \mathscr{H}^1(\mathbb{C}^n)$ гармоничны в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, по формуле Стокса имеем

$$\int_{\partial D} \varphi_J(\zeta) U_{0,0}(\zeta, z) = \int_{\partial D} g(\zeta, z) \mu_{\varphi_J}(\zeta), \quad z \in D.$$

Таким образом,

$$\varphi_J(z) = \int\limits_D g(\zeta,z)\Delta\varphi_J(\zeta)\,d\bar\zeta\wedge d\zeta = \int\limits_D g(\zeta,z)a_J(\zeta)\,d\bar\zeta\wedge d\zeta,$$

последний интеграл есть коэффициент формы $Gf$, деленный на константу $(-1)^{n+1}2^{n-1}i^n$. В силу свойств формы $\varphi$ будет

$$\bar\partial^* Gf = (-1)^{n+1}2^{n-1}i^n\bar\partial^*\varphi = 0 \quad \text{в } \mathbb{C}^n\setminus\overline{D}.$$

Следовательно, $Pf = \bar\partial^* Gf = 0$ в $\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}$. Теорема доказана. $\square$

Приведем описание пространства $\mathscr{V}^s_{n-1}(D)$ для регулярных областей.

**Теорема 10.** *Пусть область $D$ регулярная и $f\in\mathscr{H}^s_{n-1}(D)$, $s\geq 1$. Для того чтобы $f\in\mathscr{V}^s_{n-1}(D)$, необходимо и достаточно, чтобы $\bar\partial f = \Delta\varphi\,d\bar z$, где $\varphi\in\mathscr{H}^{s+1}(D)\cap\mathscr{H}^2(\mathbb{C}^n)$, $\varphi$ гармоническая в $\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}$ и $\bar\partial_b\varphi = 0$, т. е. $\varphi$ антиголоморфно продолжается с $\partial D$ в $D$; $f = \Delta\psi$, где $\psi\in\mathscr{H}^{s+2}_{n-1}(D)\cap\mathscr{H}^1_{n-1}(\mathbb{C}^n)$ и $\bar\partial\psi = \bar\partial^*\psi = 0$ в $\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}$.*

Доказательство. Пусть $f\in\mathscr{V}^s_{n-1}$ и $f = \sum\limits_{k=1}^n a_k(\zeta)d\bar\zeta[k]$. Это эквивалентно тому, что $Mf = 0$ и $MPf = 0$ в $D$. По теореме 7 касательная часть $(Pf)_\tau$ равна 0 на $\partial D$. Тогда по лемме 8 $Pf = 0$ в $\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}$. Поэтому для $z\in\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}$ выполняется

$$\begin{aligned}
Pf(z) &= \int\limits_D f(\zeta)\wedge U_{0,n-2}(\zeta,z)\\
&= \int\limits_D \sum_{k=1}^n a_k(\zeta)\,d\bar\zeta[k]\wedge\sum_{j<m}\biggl((-1)^{j+m+n-1}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\zeta_j}\,d\bar\zeta_m\wedge d\zeta\\
&\qquad + (-1)^{j+m+n}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\zeta_m}\,d\bar\zeta_j\wedge d\zeta\biggr)\,d\bar z[j,m]\\
&= \sum_{j<m} d\bar z[j,m]\int\limits_D\biggl((-1)^{j-1}a_m(\zeta)\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\zeta_j} + (-1)^m a_j(\zeta)\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\zeta_m}\biggr)\,d\bar\zeta\wedge d\zeta\\
&= \sum_{j<m} d\bar z[j,m]\biggl((-1)^j\frac{\partial}{\partial z_j}\int\limits_D a_m(\zeta)g(\zeta,z)\,d\bar\zeta\wedge d\zeta\\
&\qquad + (-1)^{m-1}\frac{\partial}{\partial z_m}\int\limits_D a_j(\zeta)g(\zeta,z)\,d\bar\zeta\wedge d\zeta\biggr)\\
&= \sum_{j<m} d\bar z[j,m]\biggl((-1)^j\frac{\partial}{\partial z_j}F_m(z) + (-1)^{m-1}\frac{\partial}{\partial z_m}F_j(z)\biggr) = 0,
\end{aligned}\tag{11}$$

где

$$F_k(z) = \int\limits_D a_k(\zeta)g(\zeta,z)\,d\bar\zeta\wedge d\zeta.$$

Вводя форму

$$F(z) = \sum_{k=1}^n F_k(z)\,d\bar z[k]\wedge dz,$$

получим, что условие (11) эквивалентно равенству $\bar\partial^* F = 0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Действительно,

$$\bar\partial^* F(z) = - * \partial * F(z) = - * \partial * \sum_{k=1}^n F_k(z)\, d\bar z[k] \wedge dz$$

$$= (-1)^n * \partial 2^{n-1} i^n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} F_k(z)\, dz_k = - * \frac{1}{2} i^n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \partial F_k(z) \wedge dz_k$$

$$= (-1)^n * 2^{n-1} i^n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{m=1}^n \frac{\partial F_k(z)}{\partial z_m}\, dz_m \wedge dz_k$$

$$= (-1)^n * 2^{n-1} i^n \left[ \sum_{k<m} (-1)^{k-1} \frac{\partial F_k(z)}{\partial z_m}\, dz_m \wedge dz_k + \sum_{k>m} (-1)^{k-1} \frac{\partial F_k(z)}{\partial z_m}\, dz_m \wedge dz_k \right]$$

$$= (-1)^n * 2^{n-1} i^n \left[ \sum_{k<m} (-1)^{k} \frac{\partial F_k(z)}{\partial z_m}\, dz_k \wedge dz_m + \sum_{k<m} (-1)^{m-1} \frac{\partial F_m(z)}{\partial z_k}\, dz_k \wedge dz_m \right]$$

$$= (-1)^n * 2^{n-1} i^n \sum_{k<m} \left( (-1)^k \frac{\partial F_k(z)}{\partial z_m} + (-1)^{m-1} \frac{\partial F_m(z)}{\partial z_k} \right) dz_k \wedge dz_m$$

$$= \sum_{k<m} (-1)^{k+m-1} \left( (-1)^k \frac{\partial F_k(z)}{\partial z_m} + (-1)^{m-1} \frac{\partial F_m(z)}{\partial z_k} \right) d\bar z[k,m] \wedge dz = 0.$$

Покажем, что $\bar\partial F = 0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. В самом деле, равенство $\bar\partial^* F = 0$ означает, что $\partial * F = 0$. Таким образом, форма $*F$ имеет тип $(1,0)$ и $\partial$-замкнута. Поскольку область $D$ регулярная, эта форма $\partial$-точна при $n > 2$. Поэтому существует функция $E \in \mathscr{H}^1(\mathbb{C}^n \setminus \overline{D})$, для которой $\partial E = *F$. Покажем, что $E$ — гармоническая функция в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Расписывая последнее равенство покоэффициентно и применяя оператор Лапласа, получим $\frac{\partial}{\partial z_k}\Delta E = 0$ для любого $k = 1,\dots,n$. Тогда функция $\Delta E$ антиголоморфна в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ и антиголоморфно продолжается в $\mathbb{C}^n$ до интегрируемой функции. По теореме Лиувилля для интегрируемых функций, которая доказывается аналогично теореме Лиувилля для ограниченных функций, имеем $\Delta E = 0$ или $\Delta * E = 0$. Поскольку $*\partial E = F$, то $\bar\partial F = \bar\partial * \partial E = -\partial\bar\partial^* * E = -\Delta * E = 0$.

При $n = 2$ из (11) получаем равенство

$$\frac{\partial F_1}{\partial z_2} + \frac{\partial F_2}{\partial z_1} = 0$$

и функции $F_1$ и $F_2$ гармоничны в $\mathbb{C}^2 \setminus \overline{D}$. Тогда

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial \bar z_1 \partial z_2} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial \bar z_1 \partial z_1} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \bar z_2 \partial z_2},$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\left( \frac{\partial F_1}{\partial \bar z_1} - \frac{\partial F_2}{\partial \bar z_2} \right) = 0$$

в $\mathbb{C}^2 \setminus \overline{D}$. Фиксируем комплексную прямую $z_1 = z_1^0$, не пересекающую $\overline{D}$. На этой прямой функция

$$\frac{\partial F_1}{\partial \bar z_1} - \frac{\partial F_2}{\partial \bar z_2}$$

антиголоморфна и стремится к нулю на бесконечности. По теореме Лиувилля она равна нулю на этой прямой, а в силу вещественной аналитичности равна нулю в $\mathbb{C}^2 \setminus \overline{D}$. Это означает, что $F$ $\bar\partial$-замкнута, т. е. $\bar\partial F = 0$.

Из свойств объемного потенциала получаем, что $\Delta F = f$ в $D$. Таким образом, если $MPf = 0$ в $D$, то $f = \Delta\psi$, где $\psi = F$ и $\bar\partial\psi = \bar\partial^*\psi = 0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$.

Обратно, если $f = \Delta\psi$ и $\psi$ удовлетворяет условиям теоремы 10, то формула Грина показывает, что $\psi = F$. Применим формулу Грина в комплексной форме к коэффициентам формы

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(\zeta)\, d\bar\zeta[k],$$

получим

$$\int_{\partial D} \psi_k(\zeta) U_{0,0}(\zeta, z) + \int_D g(\zeta, z)\Delta\psi_k(\zeta)\, d\bar\zeta \wedge d\zeta - \int_{\partial D} g(\zeta, z)\mu_{\psi_k}(\zeta) = \psi_k(z)$$

для $z \in D$, $k = 1, \ldots, n$. Напомним, что

$$\mu_{\psi_k} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j-1} \frac{\partial\psi_k}{\partial\bar\zeta_j}\, d\zeta[j] \wedge d\bar\zeta.$$

Поскольку $\psi_k \in \mathscr{H}^2(\mathbb{C}^n)$ гармонична в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, по формуле Стокса имеем

$$\int_{\partial D} \psi_k(\zeta) U_{0,0}(\zeta, z) = \int_{\partial D} g(\zeta, z)\mu_{\psi_k}(\zeta).$$

Таким образом, $\psi_k = F_k$ при $k = 1, \ldots, n$.

В этой части мы доказали, что условие $MPf = 0$ в $D$ эквивалентно существованию формы $\psi$ с нужными свойствами.

Рассмотрим условие $Mf = 0$ в $D$, а именно

$$\begin{aligned} Mf(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) \wedge U_{0,n-1}(\zeta, z) = \int_{\partial D} \sum_{k=1}^{n} a_k(\zeta)\, d\bar\zeta[k] \wedge \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial\zeta_j}\, d\zeta\, d\bar z[j] \\ = \sum_{j=1}^{n} d\bar z[j] \int_{\partial D} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j-1} a_k(\zeta) \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial\zeta_j}\, d\bar\zeta[k] \wedge d\zeta \\ = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j d\bar z[j] \frac{\partial}{\partial z_j} \int_{\partial D} \sum_{k=1}^{n} a_k(\zeta) g(\zeta, z)\, d\bar\zeta[k] \wedge d\zeta = 0. \end{aligned}$$

Поэтому условие $Mf = 0$ в $D$ эквивалентно антиголоморфности функции

$$\int_{\partial D} \sum_{k=1}^{n} a_k(\zeta) g(\zeta, z)\, d\bar\zeta[k] \wedge d\zeta$$

в области $D$. Применяя к этому интегралу формулу Стокса, получим

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \sum_{k=1}^{n} a_k(\zeta) g(\zeta, z)\, d\bar\zeta[k] \wedge d\zeta = \int_D \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial\bar\zeta_k} \big(a_k(\zeta) g(\zeta, z)\big)\, d\bar\zeta \wedge d\zeta \\ = \sum_{k=1}^{n} \Bigg[\int_D (-1)^{k-1} \frac{\partial a_k(\zeta)}{\partial\bar\zeta_k} g(\zeta, z)\, d\bar\zeta \wedge d\zeta + \int_D (-1)^{k-1} a_k(\zeta) \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial\bar\zeta_k}\, d\bar\zeta \wedge d\zeta\Bigg] \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{D} (-1)^{k-1} \frac{\partial a_k(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_k} g(\zeta, z)\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta$$

для $z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{D} (-1)^{k-1} a_k(\zeta) \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial \bar{\zeta}_k}\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\partial F_k(z)}{\partial \bar{z}_k} = 0$$

в силу $\bar{\partial}$-замкнутости формы $F$. Следовательно, условие $Mf = 0$ в $D$ эквивалентно тому, что потенциал

$$S(z) = \sum_{k=1}^{n} \int_{D} (-1)^{k-1} \frac{\partial a_k(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_k} g(\zeta, z)\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta$$

антиголоморфно продолжается с $\partial D$ в $D$. Поэтому в качестве функции $\varphi(z)$ можно взять потенциал $S(z)$, т. е. $\varphi(z) = S(z)$ и

$$\Delta\varphi(z)\, d\bar{z} = \Delta S(z)\, d\bar{z} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial a_k(z)}{\partial \bar{z}_k}\, d\bar{z} = \bar{\partial} f(z).$$

Обратно, пусть $\bar{\partial} f = \Delta\varphi\, d\bar{z}$, где функция $\varphi$ удовлетворяет условиям теоремы 10. Тогда формула Грина, примененная к $\varphi$, показывает, что $\varphi(z) = S(z)$. Следовательно, $S(z)$ антиголоморфно продолжается с $\partial D$ в $D$, поэтому $Mf = 0$ в области $D$. Теорема доказана. □

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Stein E. M.* Singular integrals and estimates for Cauchy–Riemann equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. V. 79, N 2. P. 440–445.
2. *Calderon A. P.* Boundary value problem for elliptic equations // Outlines of the Joint Soviet-American Sympos. on PDE's, Novosibirsk, 1963. P. 303–304.
3. *Atiyah M. F., Patodi V. K., Singer I. M.* Spectral asymmetry and Riemann geometry. I // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1975. V. 77. P. 43–69.
4. *Кондратьев В. А.* Граничные задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
5. *Schulze B.-W.* An algebra of boundary value problems not requiring Shapiro-Lopatinskj conditions // J. Funct. Anal. 2001. V. 179. P. 374–408.
6. *Venugopalkrishna V.* Fredholm operators associated with strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$ // J. Funct. Anal. 1972. V. 9. P. 349–373.
7. *Дынин А. С.* Граничные эллиптические задачи для псевдодифференциальных комплексов // Функцион. анализ и его прил. 1972. Т. 6, № 1. С. 75–76.
8. *Koppelman W.* The Cauchy integral for differential forms // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, N 4. P. 554–556.
9. *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976.
10. *Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А.* Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства. Новосибирск: Наука, 1975.
11. *Тарханов Н. Н.* Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов. Новосибирск: Наука, 1989.
12. *Егоров Ю. В., Шубин М. А.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Основы классической теории // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 30. С. 1–262. (Итоги науки и техники).
13. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
14. *Kohn J. J., Rossi H.* On extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold // Ann. Math. 1965. V. 81, N 3. P. 451–472.

**15.** *Кытманов А. М.* Интеграл Бохнера — Мартинелли и его применения. Новосибирск: Наука, 1992.

**16.** *Хенкин Г. М.* Метод интегральных представлений в комплексном анализе // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 7. С. 23–124. (Итоги науки и техники).

*Статья поступила 29 июля 2002 г.*

*Кытманов Александр Мечиславович*
*Красноярский гос. университет, факультет математики и информатики,*
*пр. Свободный, 79, Красноярск 660041*
`kytmanov@lan.krasu.ru`

*Мысливец Симона Глебовна*
*Красноярский гос. университет, пр. Свободный, 79, Красноярск 660041*
`simona@lan.krasu.ru`