Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 517.958

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В. Г. Романов

Аннотация: Рассмотрена задача об определении трех коэффициентов $c(x)$, $\sigma(x)$, $q(x)$ в гиперболическом уравнении. При этом коэффициент $c(x)$ стоит перед оператором Лапласа, $\sigma(x)$ — перед первой производной по времени, а $q(x)$ — перед младшим членом. К такой задаче приводится обратная задача электродинамики об определении электродинамических параметров изотропной среды в предположении, что свойства среды и внешний ток не зависят от одной из координат. Предполагается, что коэффициенты $c(x)-1$, $\sigma(x)$, $q(x)$ малы в некоторой норме и носитель их содержится внутри некоторого круга B. Это эквивалентно предположению, что электродинамические параметры среды близки к постоянным. Принимается, что источник, инициирующий колебания, имеет вид импульсной функции $\delta(t)\,\delta(x\cdot\nu)$, локализованной на множестве $t=0$, $x\cdot\nu=0$. Здесь ν — единичный вектор, играющий роль параметра задачи. Электромагнитное поле, вызванное этим источником, приложенным вне B, измеряется в точках границы области B на некотором временном интервале фиксированной длины T, отсчитываемом с момента прихода сигнала от источника для трех различных значений параметра ν. Доказано, что при достаточно большом T задаваемая информация однозначно определяет искомые коэффициенты. Получена оценка условной устойчивости решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: обратная задача, уравнения электродинамики, гиперболическое уравнение, устойчивость, единственность

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Пусть совокупность векторов H, E является решением задачи Коши для системы уравнений Максвелла с нулевыми начальными данными:

$$\nabla\times H=\varepsilon E_t+\sigma E+j,\quad \nabla\times E=-\mu H_t,\quad (E,H)_{t<0}\equiv 0. \tag{1.1}$$

Здесь $j=j(x,t)$ — заданная функция, характеризующая плотность внешнего тока. Если электродинамические параметры среды ε, μ, σ и сторонний ток $j(x,t)$ не зависят от одной из координат, скажем x_3, то соответствующая этой координате компонента напряженности электрического поля E_3 является решением задачи Коши для уравнения второго порядка:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\hat\sigma\frac{\partial}{\partial t}-c^2(\Delta-\nabla\ln\mu\cdot\nabla)\right)E_3+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial j_3}{\partial t}=0,\quad E_3|_{t<0}\equiv 0, \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00818).

в котором $\hat{\sigma} = \sigma/\varepsilon$, $c = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$ и j_3 — третья компонента вектора $j(x,t)$. Введем новую функцию равенством $E_3 = \mu^{1/2}u$. Тогда задача (1.2) для функции $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^2$, приводится к виду

$$u_{tt} + \hat{\sigma}u_t - c^2(\Delta u + qu) = F(x,t), \quad u|_{t<0} = 0, \tag{1.3}$$

в котором $q = -\mu^{1/2}\Delta\mu^{-1/2}$, $F = -\mu^{-1/2}\varepsilon^{-1}\partial j_3/\partial t$. В связи с этим двумерная обратная задача электродинамики может рассматриваться как задача об определении в уравнении (1.3) коэффициентов c, $\hat{\sigma}$ и q. Именно эта задача и рассматривается ниже при специальных предположениях о коэффициентах и функции $F(x,t)$.

Многомерные обратные задачи электродинамики рассматривались в ряде работ (см., например, [1–6] и библиографию в них), практически все эти работы связаны с сильно переопределенными постановками задач, когда размерность задаваемой информации превосходит размерность искомых коэффициентов. В работах [7–11] и монографии [12] предложен новый метод получения оценок условной устойчивости решения задач определения коэффициентов гиперболического уравнения, использующий минимальную по размерности информацию о решении некоторой прямой задачи для этого уравнения. В данной работе этот метод развивается для случая, когда определению подлежат несколько коэффициентов линейного гиперболического уравнения, стоящих перед производными разных порядков.

Для упрощения обозначений будем использовать в дальнейшем σ вместо $\hat{\sigma}$. Рассмотрим решение задачи (1.3) для случая, когда функция $F(x,t)$ имеет вид

$$F(x,t) = 2\delta(t)\delta(x\cdot\nu). \tag{1.4}$$

Здесь $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор, $x\cdot\nu$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2)$ и ν. Решение задачи (1.3), (1.4) зависит от параметра ν, т. е. $u = u(x,t,\nu)$.

Предположим, что носитель коэффициентов $c(x)-1$, $\sigma(x)$, $q(x)$ содержится внутри круга $B := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x^0| < r\}$ радиуса r с центром в точке x^0 и область B содержится в полуплоскости $x\cdot\nu > 0$. Примем также, что $c(x)$, $\sigma(x)$, $q(x)$ являются гладкими функциями во всей плоскости $\mathbb{R}^2$ (см. ниже).

Введем функцию $\tau(x,\nu)$ как решение следующей задачи Коши для уравнения эйконала:

$$|\nabla\tau|^2 = c^{-2}(x), \quad \tau|_{x\cdot\nu=0} = 0. \tag{1.5}$$

Пусть $G(\nu)$ — цилиндрическая область: $G(\nu) := \{(x,t) \mid x \in B, \tau(x,\nu) < t < T + \tau(x,\nu)\}$, где T — некоторое положительное число. Боковую часть границы этой области обозначим через $S(\nu)$, нижнее и верхнее основания — через $\Sigma_0(\nu)$ и $\Sigma_T(\nu)$ соответственно, т. е.

$$S(\nu) := \{(x,t) \mid x \in \partial B,\ \tau(x,\nu) \le t \le T + \tau(x,\nu)\},$$

$$\Sigma_0(\nu) := \{(x,t) \mid x \in B,\ t = \tau(x,\nu)\},$$

$$\Sigma_T(\nu) := \{(x,t) \mid x \in B,\ t = T + \tau(x,\nu)\},$$

$$\partial B := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x^0| = r\}.$$

Рассмотрим задачу об определении коэффициентов $c(x)$, $\sigma(x)$, $q(x)$ по следующей информации: для трех различных значений параметра $\nu = \nu^{(k)}$, $k =$

$1, 2, 3$, задаются функции $\tau(x, \nu^{(k)}) = \tau^{(k)}(x)$ на ∂B и следы решения задачи (1.3), (1.4) и его нормальной производной на $S(\nu^{(k)}) := S_k$, т. е.

$$u(x, t, \nu^{(k)}) = f^{(k)}(x, t),\ \frac{\partial}{\partial n} u(x, t, \nu^{(k)}) = g^{(k)}(x, t), \quad (x, t) \in S_k,\ k = 1, 2, 3, \tag{1.6}$$

требуется по заданным функциям $\tau^{(k)}(x)$, $f^{(k)}$, $g^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, найти $c(x)$, $\sigma(x)$ и $q(x)$.

Пусть $\Lambda(q_0, d)$ — множество функций (c, σ, q), удовлетворяющих при некоторых фиксированных положительных числах q_0, d следующим двум условиям:

1) $\operatorname{supp}(c(x) - 1, \sigma(x), q(x)) := \Omega \subset B$, $\operatorname{dist}(\partial B, \Omega) \geq d$,

2) $\|\sigma\|_{\mathbf{C}^{17}(\mathbb{R}^2)} \leq q_0$, $\|c - 1\|_{\mathbf{C}^{19}(\mathbb{R}^2)} \leq q_0$, $\|q\|_{\mathbf{C}^{15}(\mathbb{R}^2)} \leq q_0$.

Заметим, что предположения о высокой гладкости коэффициентов важны только при доказательстве леммы 1.1 и могут быть существенно ослаблены при использовании иной техники оценок, требующей, однако, при своей реализации более детальных вычислений. С целью большей простоты изложения для описания структуры решения задачи (1.3), (1.4) в статье использован метод энергетических оценок, применение которого загрубляет требования гладкости.

Основным содержанием настоящей работы являются следующие теоремы устойчивости и единственности решения обратной задачи.

Теорема 1.1. *Пусть* (c_j, σ_j, q_j), $j = 1, 2$, *— функции из* $\Lambda(q_0, d)$, *и пусть данные* $\{\tau_j^{(k)}, f_j^{(k)}, g_j^{(k)}\}$ *соответствуют решению задачи* (1.3), (1.4) *при* $\sigma = \sigma_j(x)$, $c = c_j(x)$, $q = q_j(x)$ *и* $\nu = \nu^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$. *Пусть, кроме того, выполнено условие* $4r/T < 1$. *Тогда найдутся положительные числа* q^* *и* C, *зависящие только от* T, r, d *и* $\nu^{(k)}$, *такие, что для* $q_0 \leq q^*$ *имеет место неравенство*

$$\begin{aligned}\|c_1 - c_2\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} &+ \|\sigma_1 - \sigma_2\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|q_1 - q_2\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \\ &\leq C \sum_{k=1}^{3} \Big(\big\|\hat{f}_1^{(k)} - \hat{f}_2^{(k)}\big\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B \times \{0\})} + \big\|\big(\hat{f}_1^{(k)} - \hat{f}_2^{(k)}\big)_t\big\|^2_{\mathbf{H}^2(S')} \\ &\qquad + \big\|\big(\hat{g}_1^{(k)} - \hat{g}_2^{(k)}\big)_t\big\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \big\|\tau_1^{(k)} - \tau_2^{(k)}\big\|^2_{\mathbf{H}^5(\partial B)}\Big),\end{aligned} \tag{1.7}$$

в котором

$$\hat{f}_j^{(k)}(x, t) = f_j^{(k)}\big(x, t - \tau_j^{(k)}(x)\big), \quad \hat{g}_j^{(k)}(x, t) = g_j^{(k)}\big(x, t - \tau_j^{(k)}(x)\big), \quad S' = \partial B \times [0, T].$$

Теорема 1.2. *Пусть* (c_j, σ_j, q_j) *и* $\{\tau_j^{(k)}, f_j^{(k)}, g_j^{(k)}\}$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* 1.1, *и условие* $4r/T < 1$ *выполнено. Тогда найдется число* $q^* > 0$ *такое, что для любых* $(c_1, \sigma_1, q_1) \in \Lambda(q^*, d)$ *и* $(c_2, \sigma_2, q_2) \in \Lambda(q^*, d)$ *если имеют место равенства*

$$\tau_1^{(k)}(x) = \tau_2^{(k)}(x),\ x \in \partial B; \quad f_1^{(k)}(x, t) = f_2^{(k)}(x, t),\ (x, t) \in S_k,\ k = 1, 2, 3, \tag{1.8}$$

то $c_1(x) = c_2(x)$, $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$, $q_1(x) = q_2(x)$.

Теоремы 1.1 и 1.2 доказаны в § 2 и 4 соответственно. В § 3 доказана следующая лемма, которая устанавливает некоторые свойства решения задачи (1.3), (1.4), используемые при доказательстве этих теорем.

Лемма 1.1. *Для каждого* $T_0 > 0$ *существует положительное число* $q_0^* = q_0^*(T_0)$ *такое, что для* $(c, \sigma, q) \in \Lambda(q_0^*, d)$ *решение задачи* (1.3), (1.4) *в области* $K(T_0, \nu) := \{(x,t) \mid t \le T_0 - \tau(x,\nu)\}$ *может быть представлено в виде*

$$u(x,t,\nu) = \sum_{k=0}^{5} \alpha_k(x,\nu)\theta_k(t - \tau(x,\nu)) + u_5(x,t,\nu), \tag{1.9}$$

в котором $\theta_0(t)$ — *функция Хевисайда:* $\theta_0(t) = 1$ *для* $t \ge 0$ *и* $\theta_0(t) = 0$ *для* $t < 0$, $\theta_k(t) = t^k\theta_0(t)/(k!)$, *коэффициенты* $\alpha_k(x,\nu)$ *имеют вид*

$$\alpha_0(x,\nu) = \exp(\varphi(x,\nu)), \quad \varphi(x,\nu) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma(x,\nu)} (\sigma(\xi) + c^2(\xi)\Delta\tau(\xi,\nu))\,ds,$$

$$\alpha_k(x,\nu) = \frac{\alpha_0(x,\nu)}{2}\int\limits_{\Gamma(x,\nu)} \frac{c^2(\xi)(\Delta\alpha_{k-1}(\xi,\nu) + q(\xi)\alpha_{k-1}(\xi,\nu))}{\alpha_0(\xi,\nu)}\,ds, \quad k = 1,\dots,5. \tag{1.10}$$

Здесь $\Gamma(x,\nu)$ — *геодезическая линия, соединяющая точку* x *с прямой* $\{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid \xi\cdot\nu = 0\}$, ds — *элемент римановой длины,* $ds = c^{-1}(x)\big(dx_1^2 + dx_2^2\big)^{1/2}$, $\tau(x,\nu) \in \mathbf{C}^{19}(\Omega(T_0,\nu))$, $\alpha_k(x,\nu) \in \mathbf{C}^{17-2k}(\Omega(T_0,\nu))$ *для* $\Omega(T_0,\nu) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \tau(x,\nu) \le T_0/2\}$ *и функция* $u_5(x,t,\nu)$ *равна нулю для* $t \le \tau(x,\nu)$ *и принадлежит функциональному пространству* $\mathbf{H}^6(K(T_0,\nu))$ *при каждом фиксированном* ν. *Более того, существует положительное число* C, *зависящее только от* T, r, q_0, *не возрастающее при уменьшении* q_0 *и такое, что выполняются следующие неравенства:*

$$\|u - 1\|_{\mathbf{H}^6(G(\nu))} \le Cq_0, \quad \|\tau(x,\nu) - x\cdot\nu\|_{\mathbf{C}^{18}(B)} \le Cq_0. \tag{1.11}$$

Следствие. *Если* $(c,\sigma,q) \in \Lambda(q_0,d)$, *то при достаточно малых значениях* q_0 *функция* $u(x,t,\nu)$ *непрерывна в замыкании области* $G(\nu)$ *вместе со своими производными до четвертого порядка включительно.*

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

Введем функцию $\hat u(x,t,\nu) := u(x,t+\tau(x,\nu),\nu)$. Эта функция для $(x,t) \in G$, $G := B \times (0,T]$, удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} c^2(2\nabla\hat u_t\cdot\nabla\tau - \Delta\hat u - q\hat u) + (\sigma + c^2\Delta\tau)\hat u_t = 0, \quad (x,t) \in G; \\ \hat u|_{t=+0} = \alpha_0(x,\nu), \quad \hat u_t|_{t=+0} = \alpha_1(x,\nu). \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$.

Функции $\alpha_0(x,\nu)$, $\alpha_1(x,\nu)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям первого порядка (сравните с соответствующими формулами (3.3) ниже):

$$2c^2\nabla\alpha_0\cdot\nabla\tau + \alpha_0(\sigma + c^2\Delta\tau) = 0, \quad 2c^2\nabla\alpha_1\cdot\nabla\tau + \alpha_1(\sigma + c^2\Delta\tau) - c^2(\Delta\alpha_0 + q\alpha_0) = 0. \tag{2.2}$$

Функция $\varphi(x,\nu) = \ln\alpha_0(x,\nu)$ является решением уравнения

$$2\nabla\varphi\cdot\nabla\tau + \sigma c^{-2} + \Delta\tau = 0. \tag{2.3}$$

С учетом равенства $\alpha_0(x,\nu) = \exp(\varphi(x,\nu))$ последнее из уравнений (2.2) может быть переписано в виде

$$2(\nabla\alpha_1\cdot\nabla\tau - \alpha_1\nabla\varphi\cdot\nabla\tau) - \alpha_0(\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2 + q) = 0, \tag{2.4}$$

а уравнение (2.1) — в виде

$$2\nabla \hat{u}_t \cdot \nabla\tau - \Delta\hat{u} - 2(\nabla\varphi \cdot \nabla\tau)\hat{u}_t - q\hat{u} = 0, \quad (x,t) \in G. \tag{2.5}$$

Используя следствие леммы 1.1, введем в рассмотрение функцию $v(x,t,\nu) = \ln \hat{u}(x,t,\nu)$, полагая, что число q_0 достаточно мало. В дальнейшем мы будем рассматривать функцию $v(x,t,\nu)$ только для $(x,t) \in G$. Нетрудно проверить, что функция $v(x,t,\nu)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} 2\nabla v_t \cdot \nabla\tau - \Delta v - |\nabla v|^2 + 2(\nabla v \cdot \nabla\tau - \nabla\varphi \cdot \nabla\tau)v_t - q = 0, \quad (x,t) \in G; \\ v|_{t=0} = \varphi(x,\nu), \quad v_t|_{t=0} = \beta(x,\nu), \end{gathered} \tag{2.6}$$

в которых функция $\beta(x,\nu) = \alpha_1(x,\nu)/\alpha_0(x,\nu)$ является решением уравнения

$$2\nabla\beta \cdot \nabla\tau - \Delta\varphi - |\nabla\varphi|^2 - q = 0. \tag{2.7}$$

Рассмотрим $(c_j, \sigma_j, q_j) \in \Lambda(q_0, d)$ для $j = 1, 2$. Обозначим через u_j, $\hat{u}_j$, v_j, φ_j, β_j, τ_j, $f_j := u_j|_{S(\nu)}$, $g_j := (\nabla u_j \cdot n)|_{S(\nu)}$ соответствующие им функции и введем разности

$$\begin{gathered} \tilde{u} = \hat{u}_1 - \hat{u}_2, \quad \tilde{v} = v_1 - v_2, \quad \widetilde{\varphi} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \tilde{\beta} = \beta_1 - \beta_2, \\ \tilde{\tau} = \tau_1 - \tau_2, \quad \tilde{c} = c_1 - c_2, \tilde{\sigma} = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \tilde{q} = q_1 - q_2. \end{gathered}$$

Тогда получим соотношения

$$\begin{gathered} 2\nabla\tilde{v}_t \cdot \nabla\tau_1 - \Delta\tilde{v} + a_1 \cdot \nabla\tilde{v} + a_2\tilde{v}_t + a_3 \cdot \nabla\tilde{\tau} + a_4 \cdot \nabla\widetilde{\varphi} - \tilde{q} = 0, \quad (x,t) \in G; \\ \tilde{v}|_{t=+0} = \widetilde{\varphi}(x,\nu), \quad \tilde{v}_t|_{t=+0} = \tilde{\beta}(x,\nu), \end{gathered} \tag{2.8}$$

в которых

$$a_1 = -\nabla(v_1 + v_2) + 2(v_2)_t\nabla\tau_2, \quad a_2 = 2(\nabla v_1 \cdot \nabla\tau_1 - \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\tau_1),$$

$$a_3 = 2\nabla(v_2)_t + 2(v_2)_t(\nabla v_1 - \nabla\varphi_1), \quad a_4 = -2(v_2)_t\nabla\tau_2.$$

Из уравнений (2.3), (2.7) следует, что функции $\widetilde{\varphi}(x,\nu)$, $\tilde{\beta}(x,\nu)$, удовлетворяют равенствам

$$\nabla\widetilde{\varphi} \cdot b_1 + \nabla\tilde{\tau} \cdot b_2 + \Delta\tilde{\tau} + \tilde{c}b_3 + \tilde{\sigma}b_4 = 0, \quad \Delta\widetilde{\varphi} + \nabla\widetilde{\varphi} \cdot h_1 + \nabla\tilde{\beta} \cdot h_2 + \nabla\tilde{\tau} \cdot h_3 + \tilde{q} = 0, \tag{2.9}$$

в которых

$$\begin{gathered} b_1 = \nabla(\tau_1 + \tau_2), \quad b_2 = \nabla(\varphi_1 + \varphi_2), \quad b_3 = -(\sigma_1 + \sigma_2)(c_1 + c_2)c_1^{-2}c_2^{-2}/2, \\ b_4 = (c_1^{-2} + c_2^{-2})/2, \quad h_1 = \nabla(\varphi_1 + \varphi_2), \quad h_2 = -2\nabla\tau_1, \quad h_3 = -2\nabla\beta_2. \end{gathered}$$

Введем новую функцию $w(x,t,\nu) := \tilde{v}_t(x,t,\nu)$. Эта функция удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} 2\nabla w_t \cdot \nabla\tau_1 - \Delta w + a_1 \cdot \nabla w + a_2 w_t + (a_2)_t w + (a_1)_t \cdot \nabla\tilde{v} \\ + (a_3)_t \cdot \nabla\tilde{\tau} + (a_4)_t \cdot \nabla\widetilde{\varphi} = 0, \quad (x,t) \in G; \\ w|_{t=+0} = \tilde{\beta}(x,\nu). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Заметим, что функция $\tilde{v}$ может быть представлена в виде

$$\tilde{v}(x,t,\nu) = \widetilde{\varphi}(x,\nu) + \int_0^t w(x,\tau,\nu)\,d\tau, \quad (x,t) \in G. \tag{2.11}$$

В силу леммы 1.1 и сделанных выше предположениях о коэффициентах уравнения (1.3) справедливы неравенства

$$\max_{1\le k\le 4}\|a_k\|_{\mathbf{C}^2(G)}\le Cq_0,\quad \max_{k=2,3}\|b_k\|_{\mathbf{C}^2(G)}\le Cq_0,\quad \max_{k=1,3}\|h_k\|_{\mathbf{C}^2(G)}\le Cq_0 \tag{2.12}$$

с положительной постоянной C, зависящей от T, r и q_0, не возрастающей с уменьшением q_0. Поэтому из соотношений (2.10)–(2.12) следует неравенство

$$\|2\nabla w_t\cdot\nabla\tau_1-\Delta w\|^2_{\mathbf{H}^1(G)}\le Cq_0^2\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(G)}+\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}+\|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\big) \tag{2.13}$$

с некоторой новой постоянной C.

Воспользуемся следствием леммы 4.3.6 из книги [12] (см. также статью [9]), сформулировав его в виде леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $c\in\Lambda(q_0,d)$, $\chi:=4r/T<1$ и $z(x,t)\in\mathbf{H}^2(G)$. Тогда для достаточно малых q_0 существует такая положительная постоянная C, зависящая только от r, q_0 и T, что имеет место неравенство*

$$\|z\|^2_{\mathbf{H}^1(G)}+\|z\|^2_{\mathbf{H}^1(B\times\{0\})}\le C\big(\|2\nabla z_t\cdot\nabla\tau-\Delta z\|^2_{\mathbf{L}^2(G)}+\|z\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}+\|\nabla z\cdot n\|^2_{\mathbf{L}^2(S')}\big). \tag{2.14}$$

Применяя эту лемму последовательно к функциям w, w_{x_1},w_{x_2}, w_t (при этом $\tau=\tau_1$) и складывая отвечающие им неравенства (2.14), получим после несложных преобразований вначале неравенство вида

$$\begin{aligned}\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(G(\nu))}+\|\tilde{\beta}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\le C\big(&\|2\nabla w_t\cdot\nabla\tau_1-\Delta w\|^2_{\mathbf{H}^1(G)}\\&+q_0^2\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(G(\nu))}+\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(S')}+\|\nabla w\cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}\big),\end{aligned} \tag{2.15}$$

затем, исключая из него $\|2\nabla w_t\cdot\nabla\tau_1-\Delta w\|^2_{\mathbf{H}^1(G)}$ с помощью (2.13), найдем, что

$$\begin{aligned}\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(G)}+\|\tilde{\beta}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\le{}& Cq_0^2\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(G)}+\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}+\|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\big)\\&+C\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^2(S')}+\|\nabla w\cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}\big).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Отсюда при достаточно малых значениях параметра q_0 вытекает оценка

$$\|\tilde{\beta}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\le C\big(q_0^2(\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}+\|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)})+\varepsilon^2(\nu)\big) \tag{2.17}$$

с постоянной C, зависящей от r, T, q_0. Здесь

$$\varepsilon^2(\nu)=\|(\hat{f}_1-\hat{f}_2)_t\|^2_{\mathbf{H}^2(S')}+\|(\hat{g}_1-\hat{g}_2)_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} \tag{2.18}$$

и функции $\hat{f}_j$, $\hat{g}_j$ определены равенствами

$$\hat{f}_j(x,t,\nu)=f_j(x,t-\tau_j(x,\nu),\nu),\quad \hat{g}_j(x,t,\nu)=g_j(x,t-\tau_j(x,\nu),\nu),\quad j=1,2.$$

Рассмотрим теперь неравенства (2.17) и соотношения (2.9) для $\nu=\nu^{(k)}$, $k=1,2,3$. Обозначим

$$\tilde{\beta}(x,\nu^{(k)}):=\tilde{\beta}_k(x),\quad \widetilde{\varphi}(x,\nu^{(k)}):=\widetilde{\varphi}_k(x),\quad \tilde{\tau}(x,\nu^{(k)}):=\tilde{\tau}_k(x),$$

$$\varepsilon^2(\nu^{(k)}):=\varepsilon_k^2,\qquad b_j(x,\nu^{(k)}):=b_{jk}(x),\quad h_j(x,\nu^{(k)}):=h_{jk}(x).$$

Неравенство (2.17) приводит к соотношениям

$$\|\tilde{\beta}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\le C\big(q_0^2(\|\widetilde{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}+\|\tilde{\tau}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(B)})+\varepsilon_k^2\big),\quad k=1,2,3. \tag{2.19}$$

Из (2.9) следует, что

$$\nabla\widetilde{\varphi}_k \cdot b_{1k} + \nabla\tilde{\tau}_k \cdot b_{2k} + \Delta\tilde{\tau}_k + \tilde{c}b_3 + \tilde{\sigma}b_4 = 0, \tag{2.20}$$

$$\Delta\widetilde{\varphi}_k + \nabla\widetilde{\varphi}_k \cdot h_{1k} + \nabla\tilde{\beta}_k \cdot h_{2k} + \nabla\tilde{\tau}_k \cdot h_{3k} + \tilde{q} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.21}$$

Из (2.21) находим, что выполняются неравенства

$$\|\tilde{q}\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \le C\big(\|\widetilde{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \|\tilde{\tau}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \|\tilde{\beta}_k\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big), \quad k = 1, 2, 3, \tag{2.22}$$

при некоторой постоянной $C = C(r, T, q_0)$. Сопоставляя их с неравенствами (2.19), выводим, что справедлива оценка

$$\|\tilde{q}\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \le C\big(\|\widetilde{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \|\tilde{\tau}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \varepsilon_k^2\big), \quad k = 1, 2, 3, \tag{2.23}$$

с некоторой постоянной $C = C(r, T, q_0)$.

Вычитая из равенства (2.21), отвечающего значениям $k = 2, 3$, аналогичное равенство при $k = 1$, получим новые равенства

$$\Delta\widehat{\varphi}_k(x) + \nabla\widetilde{\varphi}_k \cdot h_{1k} - \nabla\widetilde{\varphi}_1 \cdot h_{11} + \nabla\tilde{\beta}_k \cdot h_{2k} - \nabla\tilde{\beta}_1 \cdot h_{21} + \nabla\tilde{\tau} \cdot h_{3k} - \nabla\tilde{\tau} \cdot h_{31} = 0, \quad k = 2, 3, \tag{2.24}$$

в которых $\widehat{\varphi}_k(x) = \widetilde{\varphi}_k(x) - \widetilde{\varphi}_1(x)$. Отсюда с учетом (2.12) получаем неравенство

$$\max_{k=2,3} \|\Delta\widehat{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le C \sum_{j=1}^{3} \big(q_0^2\big(\|\widetilde{\varphi}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \|\tilde{\tau}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\big) + \|\tilde{\beta}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\big), \tag{2.25}$$

в котором постоянная C зависит от r, T, q_0. Исключая отсюда $\|\tilde{\beta}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}$ с помощью (2.19), находим

$$\max_{k=2,3} \|\Delta\widehat{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le C \sum_{j=1}^{3} \big(q_0^2\big(\|\widetilde{\varphi}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \|\tilde{\tau}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\big) + \varepsilon_j^2\big). \tag{2.26}$$

Оценим $\|\widehat{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)}$ через $\mathbf{H}^1(D)$-норму оператора Лапласа от $\widehat{\varphi}_k$. Для каждой функции $\widehat{\varphi}_k(x)$, $k = 2, 3$, справедливо неравенство

$$\|\widehat{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} \le C\Big(\|\Delta\widehat{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \sum_{|\gamma|\le 3} \|D^\gamma\widehat{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)}\Big), \tag{2.27}$$

в котором

$$D^\gamma = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1}\partial x_2^{\gamma_2}}, \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \ |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Оценим значения функции $\widehat{\varphi}_k$ и ее производных на ∂B. Напомним, что $\widehat{\varphi}_k = \widetilde{\varphi}_k - \widetilde{\varphi}_1$, $k = 2, 3$, и $\widetilde{\varphi}_j(x) = \tilde{v}_j(x, x \cdot \nu^{(j)} + 0)$, $j = 1, 2, 3$. Так как по предположению $\operatorname{supp}(\sigma(x), c(x) - 1) := \Omega \subset B$ и $\operatorname{dist}(\partial B, \Omega) \ge d$, функция $\widetilde{\varphi}_j(x)$ обращается в нуль со всеми производными на ∂B всюду, кроме множества $\partial B_+ := \{x \in \partial B \mid \nu \cdot (x - x^0) > \sqrt{r^2 - (r-d)^2}\}$. По аналогичным причинам функция $\tilde{\tau}_j(x)$ также отлична от нуля на ∂B только на множестве ∂B_+. Вне B функция $\widetilde{\varphi}_j$ удовлетворяет уравнению $2\nabla\widetilde{\varphi}_j \cdot \nabla\tau_1 + 2\nabla\tilde{\tau}_j \cdot \nabla\varphi_{2j} + \Delta\tilde{\tau}_j = 0$ (см. (2.9)), а функция $\tilde{\tau}_j$ — уравнению $\nabla\tilde{\tau}_j \cdot \nabla(\tau_1(x, \nu^{(j)}) + \tau_2(x, \nu^{(j)})) = 0$. Поэтому все производные функций $\tilde{\tau}_j$ и $\widetilde{\varphi}_j$ на ∂B_+ могут быть выражены через значения касательных производных на ∂B_+. Таким образом,

$$\begin{aligned} &\sum_{|\gamma|\le 5} \|D^\gamma\tilde{\tau}_j\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)} \le C\|\tilde{\tau}_j\|^2_{\mathbf{H}^5(\partial B)}, \\ &\sum_{|\gamma|\le 3} \|D^\gamma\widetilde{\varphi}_j\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)} \le C\big(\|\widetilde{\varphi}_j\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \|\tilde{\tau}_j\|^2_{\mathbf{H}^5(\partial B)}\big), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Значения функции $\widetilde{\varphi}_j(x)$ на ∂B могут быть выражены через данные обратной задачи. В самом деле,

$$\widetilde{\varphi}_j(x) = \tilde{v}_j(x,+0) = [\ln \hat{u}_1(x,+0,\nu^{(j)}) - \ln \hat{u}_2(x,+0,\nu^{(j)})] = \tilde{u}(x,+0,\nu^{(j)}) b_j(x).$$

Здесь функция $b_j(x)$ определяется формулой

$$b_j(x) = \int_0^1 \frac{ds}{s\hat{u}_1(x,+0,\nu^{(j)}) + (1-s)\hat{u}_2(x,+0,\nu^{(j)})}$$

и является ограниченной в области B вместе с производными до третьего порядка. В то же время $\tilde{u}(x,+0,\nu^{(j)}) = \hat{f}_1^{(j)}(x,+0) - \hat{f}_2^{(j)}(x,+0)$ на ∂B. Поэтому

$$\|\widetilde{\varphi}_j\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} \leq C \big\|\hat{f}_1^{(j)} - \hat{f}_2^{(j)}\big\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B\times\{0\})}.$$

Принимая во внимание эту оценку и полученное выше неравенство (2.28), находим, что

$$\sum_{|\gamma|\leq 3} \|D^\gamma \widetilde{\varphi}_j\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)} \leq C\varepsilon^2_{1j}, \quad j = 1,2,3. \tag{2.29}$$

Здесь

$$\varepsilon^2_{1j} := \big\|\hat{f}_1^{(j)} - \hat{f}_2^{(j)}\big\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B\times\{0\})} + \|\tilde{\tau}_j\|^2_{\mathbf{H}^5(\partial B)}.$$

Из соотношений (2.26), (2.27), (2.29) следует, что

$$\max_{k=2,3} \|\widehat{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} \leq C \sum_{j=1}^{3} \big(q_0^2\big(\|\widetilde{\varphi}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \|\tilde{\tau}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\big) + \tilde{\varepsilon}^2_j\big), \tag{2.30}$$

где $\tilde{\varepsilon}^2_j = \varepsilon^2_j + \varepsilon^2_{1j}$.

Из уравнения эйконала вытекает равенство

$$\nabla\tilde{\tau}\cdot\nabla(\tau_1+\tau_2) + \tilde{c}(c_1+c_2)c_1^{-2}c_2^{-2} = 0. \tag{2.31}$$

Отсюда находим, что

$$\|\tilde{c}\|_{\mathbf{H}^1(B)} \leq C\|\tilde{\tau}_k\|_{\mathbf{H}^2(B)}, \quad \|\tilde{c}\|_{\mathbf{H}^2(B)} \leq C\|\tilde{\tau}_k\|_{\mathbf{H}^3(B)}, \quad k=1,2,3. \tag{2.32}$$

Из равенств (2.20) с учетом неравенства (2.32) получим, что

$$\|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \leq C\big(\|\widetilde{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \|\tilde{\tau}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)}\big), \quad k=1,2,3. \tag{2.33}$$

Кроме того, из тех же равенств вытекают соотношения

$$\Delta\hat{\tau}_k + \nabla\widetilde{\varphi}_k\cdot b_{1k} - \nabla\widetilde{\varphi}_1\cdot b_{11} + \nabla\tilde{\tau}_k\cdot b_{2k} - \nabla\tilde{\tau}_1\cdot b_{21} = 0, \quad k=2,3, \tag{2.34}$$

в которых $\hat{\tau}_k = \tilde{\tau}_k - \tilde{\tau}_1$, $k=2,3$. Отсюда с учетом неравенства (2.12) находим

$$\|\Delta\hat{\tau}_k\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \leq C\sum_{j=1}^{3}\big(\|\widetilde{\varphi}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + q_0^2\|\tilde{\tau}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\big), \quad k=2,3. \tag{2.35}$$

Поэтому

$$\|\hat{\tau}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} \leq C\sum_{j=1}^{3}\big(\|\widetilde{\varphi}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + q_0^2\|\tilde{\tau}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \|\tilde{\tau}_j\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)}\big), \quad k=2,3. \tag{2.36}$$

Далее, из равенства (2.31) вытекают соотношения

$$\nabla\hat{\tau}_k \cdot b_{1k} + \nabla\tilde{\tau}_1 \cdot r_k = 0, \quad k = 2,3, \tag{2.37}$$

в которых

$$b_{1k} = \nabla(\tau_1(x,\nu^{(k)}) + \tau_2(x,\nu^{(k)}), \quad k = 1,2,3; \quad r_k = b_{1k} - b_{11}, \quad k = 2,3.$$

Из леммы 1.1 следует, что для достаточно малых значениях q_0 выполняются неравенства

$$\|\nabla\tau(x,\nu) - \nu\|_{\mathbf{C}^{17}(B)} \le Cq_0$$

с некоторой постоянной $C = C(q_0, r)$. Подобные соотношения имеют место и для функций r_k, а именно

$$\|r_k - 2(\nu^{(k)} - \nu^{(1)})\|_{\mathbf{C}^{17}(B)} \le Cq_0, \quad k = 2,3. \tag{2.38}$$

Так как $\nu^{(k)} \ne \nu^{(1)}$, $k = 2,3$, функции r_k не обращаются в нуль в области B, если параметр q_0 мал. Рассматривая соотношения (2.37) как систему линейных уравнений относительно компонент $(\tilde{\tau}_1)_{x_1}$, $(\tilde{\tau}_1)_{x_2}$ вектора $\nabla\tilde{\tau}_1$, замечаем, что детерминант этой системы отличен от нуля (по крайней мере для достаточно малых значений q_0), поскольку $\nu^{(2)} \ne \nu^{(3)}$. Поэтому искомые компоненты можно выразить через компоненты векторов $\nabla\hat{\tau}_2$, $\nabla\hat{\tau}_3$ посредством формул

$$(\tilde{\tau}_1)_{x_j} + \sum_{k=2}^{3} A_{jk}(\nabla\hat{\tau}_k \cdot b_{1k}) = 0, \quad j = 1,2, \tag{2.39}$$

в которых A_{jk} образуют матрицу, обратную матрице исходной алгебраической системы. Отсюда

$$\|\tilde{\tau}_1\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} \le C\big(\max_{k=2,3} \|\hat{\tau}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} + \|\tilde{\tau}_1\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}\big) \tag{2.40}$$

с некоторой постоянной C, зависящей от r, q_0 и $|\nu^{(k)} - \nu^{(j)}|$, $k \ne j$. Так как $\tilde{\tau}_k = \tilde{\tau}_1 + \hat{\tau}_k$, $k = 2,3$, то

$$\|\tilde{\tau}_j\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} \le C\big(\max_{k=2,3} \|\hat{\tau}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} + \|\tilde{\tau}_1\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}\big), \quad j = 1,2,3. \tag{2.41}$$

Из равенства (2.36) тогда следует, что при малых значениях параметра q_0 справедливо неравенство

$$\max_{k=2,3} \|\hat{\tau}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} \le C\sum_{j=1}^{3}\big(\|\widetilde{\varphi}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \|\tilde{\tau}_j\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)}\big), \tag{2.42}$$

а значит, и аналогичные неравенства для функций $\tilde{\tau}_k(x)$:

$$\|\tilde{\tau}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} \le C\sum_{j=1}^{3}\big(\|\widetilde{\varphi}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \|\tilde{\tau}_j\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)}\big), \quad k = 1,2,3. \tag{2.43}$$

Теперь мы можем переписать неравенство (2.30) в виде

$$\max_{k=2,3} \|\widehat{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} \le C\sum_{j=1}^{3}\big(q_0^2\|\widetilde{\varphi}_j\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \hat{\varepsilon}_j^2\big). \tag{2.44}$$

Так как $\widetilde{\varphi}_j = \widehat{\varphi}_j + \widetilde{\varphi}_1$ для $j = 2, 3$, при малых q_0 можно исключить $\widetilde{\varphi}_j$, $j = 2, 3$, из правой части этого неравенства. Тогда оно принимает вид

$$\max_{k=2,3} \|\widehat{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} \leq C\big(q_0^2 \|\widetilde{\varphi}_1\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \tilde{\varepsilon}^2\big), \tag{2.45}$$

в котором $\tilde{\varepsilon}^2 =: \sum\limits_{j=1}^{3} \tilde{\varepsilon}_j^2$. Поэтому неравенства (2.43) могут быть записаны в виде

$$\|\tilde{\tau}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} \leq C\big(\|\widetilde{\varphi}_1\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \tilde{\varepsilon}^2\big), \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.46}$$

Аналогично предыдущему соотношения (2.23), (2.33) могут быть представлены в виде

$$\|\tilde{q}\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \leq C\big(\|\widetilde{\varphi}_1\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \tilde{\varepsilon}^2\big), \tag{2.47}$$

$$\|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \leq C\big(\|\widetilde{\varphi}_1\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \tilde{\varepsilon}^2\big). \tag{2.48}$$

Остается оценить $\|\widetilde{\varphi}_1\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}$, чтобы замкнуть всю цепочку неравенств. Рассмотрим для этого опять систему соотношений (2.37). Из нее следует, что

$$r_3 \cdot \nabla(b_{12} \cdot \nabla\hat{\tau}_2) - r_2 \cdot \nabla(b_{13} \cdot \nabla\hat{\tau}_3) + \nabla\tilde{\tau}_1 \cdot l_1 = 0, \tag{2.49}$$

где компоненты l_{1j} вектора l_1 находятся через компоненты r_{kj} векторов r_k по формулам

$$l_{1j} = \sum_{i=1}^{2} [r_{3i}(r_{2j})_{x_i} - r_{2i}(r_{3j})_{x_i}], \quad j = 1, 2.$$

Исключая из равенства (2.49) компоненты вектора $\nabla\tilde{\tau}_1$ с помощью формул (2.39), получим в результате соотношение вида

$$r_3 \cdot \nabla(b_{12} \cdot \nabla\hat{\tau}_2) - r_2 \cdot \nabla(b_{13} \cdot \nabla\hat{\tau}_3) + \nabla\hat{\tau}_2 \cdot l_2 + \nabla\hat{\tau}_3 \cdot l_3 = 0, \tag{2.50}$$

в котором векторы l_2, l_3 удовлетворяют неравенствам

$$\|l_k\|_{\mathbf{C}^2(B)} \leq Cq_0, \quad k = 2, 3.$$

Запишем систему соотношений (2.34) в виде

$$\Delta\hat{\tau}_k + \nabla\widehat{\varphi}_k \cdot b_{1k} + \nabla\widetilde{\varphi}_1 \cdot r_k + \nabla\hat{\tau}_k \cdot b_{2k} + \nabla\tilde{\tau}_1 \cdot \hat{b}_{2k} = 0, \quad k = 2, 3. \tag{2.51}$$

Здесь $\hat{b}_{2k} = b_{2k} - b_{21}$. Применим к соотношениям (2.51) при $k = 2$ оператор $r_3 \cdot \nabla(b_{12} \cdot \nabla)$, а при $k = 3$ оператор $r_2 \cdot \nabla(b_{13} \cdot \nabla)$ и возьмем разность результатов. Тогда получим новое соотношение вида

$$L\widetilde{\varphi}_1 \equiv r_3 \cdot \nabla(b_{12} \cdot \nabla(\nabla\widetilde{\varphi}_1 \cdot r_2)) - r_2 \cdot \nabla(b_{13} \cdot \nabla(\nabla\widetilde{\varphi}_1 \cdot r_3)) = h(x), \tag{2.52}$$

в котором функция $h(x)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} h(x) = r_3 \cdot \nabla(b_{12} \cdot \nabla[\Delta\hat{\tau}_2 + \nabla\widehat{\varphi}_2 \cdot b_{12} + \nabla\hat{\tau}_2 \cdot b_{22} + \nabla\tilde{\tau}_1 \cdot \hat{b}_{22}]) \\ - r_2 \cdot \nabla(b_{13} \cdot \nabla[\Delta\hat{\tau}_3 + \nabla\widehat{\varphi}_3 \cdot b_{13} + \nabla\hat{\tau}_3 \cdot b_{23} + \nabla\tilde{\tau}_1 \cdot \hat{b}_{23}]). \end{aligned} \tag{2.53}$$

Используя соотношения (2.39), (2.50), нетрудно установить, что

$$\|h\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \leq Cq_0^2 \max_{k=2,3} \big(\|\hat{\tau}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} + \|\widehat{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)}\big). \tag{2.54}$$

Следовательно,

$$\|h\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \leq Cq_0^2(\|\widetilde{\varphi}_1\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \tilde{\varepsilon}^2). \tag{2.55}$$

Введем векторы $r_1 = b_{12} - b_{13}$, $\hat{\nu}^{(k)} = r_k/|r_k|$, $k = 1, 2, 3$. Заметим, что при малых q_0 вектор r_1 близок к вектору $2(\nu^{(2)} - \nu^{(3)})$, а векторы r_2, r_3 близки к векторам $2(\nu^{(2)} - \nu^{(1)})$, $2(\nu^{(3)} - \nu^{(1)})$ соответственно. Поэтому для малых значений q_0 нетрудно установить следующую оценку:

$$\left\| L\widetilde{\varphi}_1 - |r_1||r_2||r_3| \frac{\partial^3 \widetilde{\varphi}_1}{\partial \hat{\nu}^{(1)} \partial \hat{\nu}^{(2)} \partial \hat{\nu}^{(3)}} \right\|_{\mathbf{L}^2(B)} \leq C q_0 \|\widetilde{\varphi}_1\|_{\mathbf{H}^2(B)}. \tag{2.56}$$

Таким образом, главная часть оператора L представляет собой смешанную производную третьего порядка, взятую по трем различным направлениям на плоскости $\mathbb{R}^2$. Поэтому имеет место неравенство

$$\|\widetilde{\varphi}_1\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} \leq C\big(\|L\widetilde{\varphi}_1\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|\widetilde{\varphi}_1\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}\big). \tag{2.57}$$

Принимая во внимание оценки (2.55), (2.56), отсюда находим окончательное неравенство для функции $\widetilde{\varphi}_1$ в виде

$$\|\widetilde{\varphi}_1\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} \leq C\tilde{\varepsilon}^2. \tag{2.58}$$

Поэтому из неравенств (2.44), (2.46) вытекает, что

$$\max_{k=2,3} \|\widehat{\varphi}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} \leq C\tilde{\varepsilon}^2, \quad \max_{k=1,2,3} \|\hat{\tau}_k\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} \leq C\tilde{\varepsilon}^2. \tag{2.59}$$

Из неравенств (2.32), (2.47), (2.48) следует выполнение неравенства (1.7) теоремы 1.1. $\square$

§ 3. Доказательство леммы 1.1

Рассмотрим вначале задачу (1.5). Обозначим $p(x, \nu) := \nabla\tau(x, \nu)$. Без потери общности примем здесь, что $\nu = (1, 0)$. Тогда $\tau(x, \nu) = -x_1$ для $x_1 \leq 0$. Чтобы найти функцию $\tau(x, \nu)$ для $x_1 > 0$ рассмотрим уравнения для определения геодезических линий. Пусть функции $x = F(\tau, \gamma)$, $p = P(\tau, \gamma)$ дают решение следующей задачи Коши:

$$\frac{dx}{ds} = pc^2(x), \quad \frac{dp}{ds} = -\nabla \ln c(x), \quad x|_{s=0} = (0, \gamma), \quad p|_{s=0} = \nu, \tag{3.1}$$

где s — риманова длина, которая совпадает с временем пробега сигнала от точки x до прямой $\{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid \xi \cdot \nu = 0\}$. Равенство $x = F(s, \gamma)$ определяет уравнение геодезической, ортогонально пересекающей прямую $x_1 = 0$ в точке $(0, \gamma)$. Нетрудно показать, что для каждой области $D := \{(s, \gamma) \mid 0 \leq s \leq s_0, |\gamma| \leq R\}$ с заданными $s_0 > 0$, $R > 0$ существует единственное решение $x = F(\tau, \gamma)$, $p = P(\tau, \gamma)$ задачи (3.1) в области D, причем функции $F(\tau, \gamma)$, $P(\tau, \gamma)$ из $\mathbf{C}^{18}(D)$ и, более того, можно найти положительную постоянную $C = C(q_0, s_0, R)$ такую, что выполняется оценка

$$\|F - (0, \gamma) - \nu s\|_{\mathbf{C}^{18}(D)} \leq C q_0, \quad |P - \nu\|_{\mathbf{C}^{18}(D)} \leq C q_0. \tag{3.2}$$

Это означает, что каждая геодезическая близка прямой линии и переменная p близка к ν, если параметр q_0 мал. Выбирая $s_0 > 0$ и $R > 0$ достаточно большими и подбирая подходящее значение q_0, можно доказать, что множество $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = F(s, \gamma), (s, \gamma) \in D\}$ содержит внутри себя априори заданную ограниченную область $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$.

Используя последнее неравенство, легко проверить, что для малых q_0 якобиан $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(s, \gamma)}$ не обращается в нуль в точках области D. Поэтому равенство

$x = F(\tau, \gamma)$ можно разрешить относительно s, γ, т. е. найти $s = s(x)$, $\gamma = \gamma(x)$ в $\mathbf{C}^{18}(\Omega_0)$. Кроме того, так как $\nabla\tau(x) := p(x) = P(s(x), \gamma(x)) \in \mathbf{C}^{18}(\Omega_0)$, то $\tau(x) \in \mathbf{C}^{19}(\Omega_0)$. Заметим, что при заданной точке x геодезическая $\Gamma(x, \nu)$, проходящая через x и пересекающая ортогонально прямую $\{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid \xi \cdot \nu = 0\}$, задается равенством $\xi = F(s, \gamma(x)), s \in [0, s(x)]$. Оценка (1.11) для $\tau(x)$ немедленно следует из первого неравенства (3.2).

Подставляя представление (1.9) в уравнение (1.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых особенностях, находим дифференциальные уравнения первого порядка для коэффициентов α_k:

$$\begin{gathered} 2c^2\nabla\alpha_0 \cdot \nabla\tau + \alpha_0(\sigma + c^2\Delta\tau) = 0, \\ 2c^2\nabla\alpha_k \cdot \nabla\tau + \alpha_k(\sigma + c^2\Delta\tau) - c^2(\Delta\alpha_{k-1} + q\alpha_{k-1}) = 0, \quad k = 1, \dots, 5, \end{gathered} \tag{3.3}$$

которые должны быть выполнены для всех $\tau > 0$, и дополнительные условия при $\tau = 0$:

$$\alpha_0|_{\tau=0} = 1, \quad \alpha_k|_{\tau=0} = 0, \ k = 1, \dots, 5. \tag{3.4}$$

Интегрируя соотношения (3.3), (3.4) вдоль геодезических $\Gamma(x, \nu)$, получаем явные формулы для коэффициентов α_k в виде (1.10). Свойства гладкости этих коэффициентов, приведенные в лемме, достаточно очевидны. Из определения множества $\Lambda(q_0, d)$ и формул (1.10) следует, что справедливы оценки

$$\|\alpha_0 - 1\|_{\mathbf{C}^{17}(\Omega(T_0,\nu))} \le Cq_0, \quad \|\alpha_k\|_{\mathbf{C}^{17-2k}(\Omega(T_0,\nu))} \le Cq_0, \quad k = 1, \dots, 5,$$

с положительной постоянной $C = C(q_0, T_0)$. Здесь $\Omega(T_0, \nu) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \tau(x, \nu) \le T_0/2\}$. Функция $u_5(x, t, \nu)$ является решением задачи:

$$u_{tt} + \sigma u_t - c^2(\Delta u + qu) = F_5(x, t, \nu), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3; \quad u|_{t<0} = 0, \tag{3.5}$$

в которой

$$F_5(x, t, \nu) = c^2(x)\Delta\alpha_5(x, \nu)\theta_5(t - \tau(x, \nu)).$$

Очевидно, что функция $F_5(x, t, \nu)$ обращается в нуль $t \le \tau(x, \nu)$ и принадлежит пространству $\mathbf{H}^5(K(T_0, \nu))$, $K(T_0, \nu) := \{(x, t) \mid t \le T_0 - \tau(x, \nu)\}$ при фиксированных T_0, ν. Из энергетических оценок следует, что функция $u_5(x, t, \nu)$ принадлежит $\mathbf{H}^6(K(T_0, \nu))$, равна нулю при $t \le \tau(x, \nu)$ и для нее справедлива оценка вида $\|u_5\|_{\mathbf{H}^6(K(T_0,\nu))} \le Cq_0$. Для достаточно больших T_0 очевидно включение $G(\nu) \subset K(T_0, \nu)$. Отсюда и вытекает оценка (1.11) для функции $u(x, t, \nu)$. $\square$

§ 4. Доказательство теоремы 1.2

Докажем вначале следующую лемму.

Лемма 4.1. *Пусть* $(c_j, \sigma_j, q_j) \in \Lambda(q_0, d)$ *и* $u_j(x, t, \nu)$ — *соответствующее решение задачи* (1.3), (1.4), *а* $\tau_j(x, \nu)$ — *решение задачи* (1.5) *для* $j = 1, 2$. *Тогда, если* $\tau_1(x, \nu) = \tau_2(x, \nu)$ *на* ∂B *и* $u_1(x, t, \nu) = u_2(x, t, \nu)$ *на* $S(\nu)$, *то* $(\nabla u_1 \cdot n)(x, t, \nu) = (\nabla u_2 \cdot n)(x, t, \nu)$ *на* $S(\nu)$.

Доказательство. Обозначим здесь в отличие от § 2 $\tilde{u} = u_1 - u_2$. Покажем, что при выполнении условий леммы коэффициент $\tilde{\alpha}_0(x, \nu)$ в разложении функции $\tilde{u}$, аналогичном (1.9), равен нулю вне области B.

Действительно, имеют место равенства $\tau_1(x, \nu) = \tau_2(x, \nu) = \tau(x, \nu)$ вне области B и $\tilde{\alpha}_0(x, \nu) = \tilde{u}(x, \tau(x, \nu) + 0, \nu)$ на ∂B. Следовательно, $\tilde{\alpha}_0(x, \nu) = 0$ на ∂B. Кроме того, вне области B выполнено дифференциальное уравнение

$\nabla\tilde\alpha_0\cdot\nabla\tau=0$. Поэтому $\tilde\alpha_0(x,\nu)=0$ для всех x, не принадлежащих B. Таким образом, функция $\tilde u=u_1-u_2$ непрерывна на характеристической поверхности $t=\tau(x,\nu)$, если $x\notin B$. Из леммы 1.1 следует, что $\tilde u\in\mathbf{H}^1(P)$ для любой ограниченной области P, расположенной вне $G':=\{(x,t)\mid x\in B, t>0\}$. Используем метод энергетических оценок, чтобы доказать, что $\tilde u=0$ вне некоторой области, прилегающей к $G(\nu)$.

Не ограничивая общности, положим опять $\nu=(1,0)$ и примем, что $x^0=\bigl(x_1^0,0\bigr)$ и $q_0\le 1/2$. Тогда конус $\{(x,t)\mid t\le T_0-|x|\}$ содержит внутри себя область $G(\nu)$, если $T_0\ge T+3\bigl(x_1^0+r\bigr)$. Предположим, что это условие выполнено. Рассмотрим область

$$P(T_0)=\{(x,t)\mid |x-x^0|>r, 0<t<\min(T+\tau(x,\nu),T_0-|x|)\}.$$

Она ограничена кусочно-гладкой характеристической поверхностью

$$S_1=\{(x,t)\mid |x-x^0|>r,\ t=\min(T+\tau(x,\nu),T_0-|x|)\},$$

боковой границей

$$S_2=\{(x,t)\mid |x-x^0|=r,\ 0<t<T+\tau(x,\nu)\}$$

и куском

$$S_3=\{(x,t)\mid |x|<T_0,\ |x-x^0|>r, t=0\}$$

плоскости $t=0$. Имеем $\tilde u(x,t,\nu)=0$ для $(x,t)\in S_2\cup S_3$. Кроме того, $\tilde u(x,t,\nu)$ принадлежит $\mathbf{H}^1(P(T_0))$ и удовлетворяет уравнению

$$\Box\,\tilde u\equiv\tilde u_{tt}-\Delta\tilde u=0,\quad (x,t)\in P(T_0).$$

Умножая обе части этого равенства на $2\tilde u_t$, используя тождество

$$2\tilde u_t\Box\,\tilde u\equiv(\tilde u_t^2+|\nabla\tilde u|^2)_t+\operatorname{div}(2\tilde u_t\nabla\tilde u),$$

интегрируя его по области $P(T_0,t_0):=\{(x,t)\in P(T_0)\mid 0<t<t_0\le T_0\}$ и применяя формулу Гаусса — Остроградского, получаем равенство

$$\int\limits_{S(t_0)}(\tilde u_t^2+|\nabla\tilde u|^2)\,dx \\ +\int\limits_{S_1(t_0)\cup S_2(t_0)\cup S_3}\left[(\tilde u_t^2+|\nabla\tilde u|^2)\cos(n,t)+2\tilde u_t\sum_{j=1}^n\tilde u_{x_j}\cos(n,x_j)\right]dS=0,$$

в котором dS — элемент площади и $S_k(t_0):=\{(x,t)\in S_k\mid 0<t<t_0\}$, $k=1,2$. Так как $\tilde u$ обращается в нуль на S_2 и $\tilde u=0$, $\tilde u_t=0$ для $(x,t)\in S_3$, интегралы по $S_2(t_0)$ и S_3 обращаются в нуль. Легко также проверить, что интеграл по $S_1(t_0)$ неотрицателен. Поэтому

$$\int\limits_{S(t_0)}(\tilde u_t^2+|\nabla\tilde u|^2)\,dx\le 0,\quad t_0\in(0,T_0).$$

Отсюда получаем $\tilde u(x,t,\nu)=0$ для $(x,t)\in P(T_0)$. Следовательно, $\nabla\tilde u\cdot n=0$ и $\nabla u_1\cdot n=\nabla u_2\cdot n$ на $S(\nu)$, и утверждение леммы становится очевидным. $\Box$

Из доказанной леммы и теоремы 1.1 вытекает справедливость теоремы 1.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романов В. Г., Кабанихин С. И.* Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
2. *Ola P., Päivärinta L., Somersalo E.* An inverse boundary value problem in electrodynamics // Duke Math. J. 1993. V. 70. P. 617–653.
3. *Ola P., Somersalo E.* Electromagnetic inverse problems and generalized Sommerfeld potential // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 560. P. 1129–1145.
4. *Yakhno V. G.* Multidimensional inverse problems in ray formulation for hyperbolic equations // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1998. V. 6, N 4. P. 373–386.
5. *Белишев М. И., Гласман А. К.* Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 2. С. 131–187.
6. *Романов В. Г.* Обратные задачи электродинамики // Докл. РАН. 2002. Т. 386, № 3. С. 304–309.
7. *Романов В. Г.* Об оценке устойчивости решения обратной задачи для гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 436–449.
8. *Romanov V. G., Yamamoto M.* Multidimensional inverse hyperbolic problem with impulse input and single boundary measurement // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1999. V. 7, N 6. P. 573–588.
9. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1323–1338.
10. *Глушкова Д. И.* Об оценке устойчивости решения обратной задачи определения коэффициента поглощения // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1203–1211.
11. *Глушкова Д. И., Романов В. Г.* Об оценке устойчивости решения в задаче об определении двух коэффициентов гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 311–321.
12. *Romanov V. G.* Investigation Methods for Inverse Problems. Utrecht: VSP, 2002.

Статья поступила 25 марта 2003 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru