Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 517.44+517.5

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ N–ФУНКЦИЙ. I

А. Е. Мамонтов

Аннотация: Ранее автором был предложен новый подход к экстраполяции операторов со шкалы пространств Лебега в лежащие за пределами этой шкалы пространства Орлича. В работе, состоящей из двух частей, разработан математический аппарат, позволяющий доказывать описанные экстраполяционные теоремы для произвольного поведения оператора в шкале Лебега (т. е. произвольной его нормы как функции от p), а также для случая, когда базовой шкалой является отрезок шкалы Лебега с показателями, отделенными от 1 или $+\infty$. При этом возникают некорректные задачи об обращении классических интегральных преобразований типа Меллина и Лапласа на неаналитических функциях в терминах их асимптотики на вещественной оси, а также вопрос о свойствах интегральных преобразований типа свертки на классах N-функций. В части I статьи изучаются интегральные представления N-функций разложениями по степенным функциям с положительным весом, а также поведение на классах N-функций интегральных преобразований типа свертки.

Ключевые слова: экстраполяция операторов, пространства Орлича, N-функции, функции Юнга, интегральные преобразования Меллина и Лапласа, интегральные преобразования типа свертки.

Введение

Теория N-функций (функций Юнга) и порождаемых ими пространств Орлича, впервые систематически изложенная в классической монографии [1], активно разрабатывается в течение уже более полувека и нашла одно из первых своих приложений в области интегральных уравнений с нестепенными нелинейностями. С тех пор эта теория получила свое дальнейшее развитие и много интересных новых приложений. При этом оказалось, что часть вопросов теории пространств Орлича и Соболева — Орлича может быть решена путем обобщения свойств пространств L_p и W_p^l, а в других случаях прямое обобщение затруднительно или невозможно в силу специфики соответствующих пространств Орлича. Например, такой важный вопрос, как оценки решений дифференциальных уравнений в пространствах Орлича, может решаться интерполяционными или экстраполяционными методами на основе известных оценок в L_p. Однако с достаточной полнотой такие методы развиты лишь для случая пространств, «зажатых» между L_{p_1} и L_{p_2} с $1 < p_1 < p_2 < +\infty$ (см., например, [2]). Для случаев, когда интересующие нас пространства Орлича L_Φ лежат за пределами базовой шкалы L_p (например, $\Phi(s) = s\ln^\gamma s$, $\Phi(s) = \exp(s^\gamma)$ или $\Phi(s) = s^{p_0}\ln^\gamma s$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00131) и программы ФАО РФ «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 8247).

когда базовая шкала есть $\{L_p \mid p > p_0\}$, и т. п.), или же интерполяционное пространство Орлича L_Φ лежит «очень близко» к одному из двух крайних пространств (например, $\Phi(s) = s^{p_0} \ln^\gamma s$ при крайних пространствах L_{p_0} и L_{p_1}), удовлетворительной теории до сих пор не построено.

В этих случаях уместно применение экстраполяционных методов, в которых свойства оператора в пространствах L_Φ изучаются на основе его поведения в близких к L_Φ пространствах L_p, а точнее на основе поведения его нормы $\varphi(p)$ как оператора в L_p. В этой области до недавнего времени имелись лишь отдельные результаты для специальных функций φ или для специальных операторов и всегда в случае, когда одно из пространств (образов или прообразов) есть L_1 или L_∞ (см. обзор в работе [3]). При этом подразумевается, что промежуточные пространства можно заполнить интерполяцией между построенным крайним экстраполяционным пространством и исходными пространствами, однако пересчет пространств (прообразов и образов оператора) будет в этом случае неконструктивным и может не покрыть всю шкалу.

С другой стороны, развитие этой теории стимулируется прикладными вопросами. Так, в последнее десятилетие одним из приложений теории пространств Орлича явилась проблема глобальной разрешимости уравнений вязкой сжимаемой жидкости (ВСЖ). Были получены новые теоремы о глобальном существовании и единственности решений этих уравнений в случаях двух [4] и более [5–7] пространственных переменных, а также изучены, в терминах пространств Орлича, точные классы корректности для уравнения переноса, входящего в систему уравнений ВСЖ [8]. При этом одним из ключевых моментов оказалось получение оценок для уравнения Пуассона в «крайних» пространствах Орлича L_Φ, т. е. с такими Φ, как $\Phi(s) = s \ln^\gamma s$ или $\Phi(s) = \exp(s^\gamma)$. В работах автора [9, 10] был предложен метод экстраполяции линейных операторов из L_p в такого рода пространства Орлича, на основе которого требуемые оценки были получены и успешно применены к уравнениям ВСЖ. А именно, было показано, что если линейный оператор $A \in \mathscr{L}(L_p)$

1) при $p \in (1, 1+\varepsilon)$ с нормой $\|A\|_{\mathscr{L}(L_p)} \le C\varphi(p)$, где $\varphi(p) = (p-1)^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$,

или

2) при $p \in (N, +\infty)$ с $\varphi(p) = p^m$,

то можно утверждать, что $A \in \mathscr{L}(L_\Phi, L_M)$, где соответственно

1) L_Φ — достаточно произвольное пространство Орлича, лежащее между L_K, $K(s) = s \ln^m s$, и всеми $L_{1+\varepsilon}$, а $\overline{M} = \mathbf{S}^m[\overline{\Phi}]$ (черта означает двойственность по Юнгу, т. е. операцию взятия дополнительной N-функции),

2) L_M — достаточно произвольное пространство Орлича, лежащее между всеми L_p и L_G, $G(s) = \exp(s^{1/m})$, а $\Phi = \mathbf{S}^m[M]$.

Здесь

$$\mathbf{S}[\Psi](v) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-s}\Psi(vs)\,ds. \tag{0.1}$$

В частности, полагая в точности $\Phi = K$ или $M = G$, получим известные экстраполяционные теоремы, упомянутые нами выше. При других (промежуточных) Φ, M указанные оценки являются новыми. При этом степени $\mathbf{S}^m$ можно представить в виде преобразований вида (0.1), но с ядром $\exp(-s^{1/m})$ (см. пример 3.12). Требование линейности оператора A можно ослабить.

Остается, однако, открытой проблема обобщения этого результата на случай произвольных норм операторов (т. е. функций φ), а также на случай, когда базовой для экстраполяции шкалой является $\{L_p \mid p \in (\alpha, \beta)\}$ с $\alpha > 1$ или $\beta < +\infty$.

Позднее в работе [3] (независимо и другими методами) был получен результат с произвольной функцией φ для случая экстраполяции влево (т. е. в сторону более широких пространств), но в классах пространств Лоренца, что не столь удобно для приложений к дифференциальным уравнениям.

Наша задача в настоящей статье — обобщить методы работ [9, 10] на случай произвольной функции φ (при этом вместо преобразования (0.1) с ядром e^{-s} возникает более общее преобразование $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ с ядром $\psi(s)$, восстанавливаемым по φ), усовершенствовать их по отношению к используемым представлениям N-функций, а также рассмотреть случай $\beta < +\infty$. Тем самым будет дано обоснование экстраполяции достаточно произвольных операторов из $\{L_p \mid p \in (\alpha, \beta)\}$, $1 \le \alpha < \beta \le +\infty$, в произвольные пространства Орлича, лежащие между L_α и всеми L_p, $p > \alpha$, или между всеми L_p, $p < \beta$, и L_β. Соответствующие экстраполяционные теоремы мы планируем дать в другой работе. Их преимущество — ясный и конструктивный пересчет пространств Орлича непосредственно в терминах порождающих их N-функций.

Охарактеризуем кратко содержание данной статьи.

В § 1 изучается вопрос о представлении N-функций интегральными разложениями по степенным функциям с положительным весом (интегральный аналог степенных рядов с положительными коэффициентами).

В § 2 рассматриваются преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ типа свертки с произвольными ядрами ψ и изучается их поведение на N-функциях различных классов. При этом особую роль играют «пробные» степенные N-функции $\Phi(s) = s^p$ как инварианты указанных преобразований с точностью до умножения на величину $\varphi(p)$, называемую нами характеристикой преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$.

Задача о восстановлении преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ (т. е. его ядра ψ) по заданной характеристике φ изучается в § 3.

Наконец, § 4 посвящен выводам и дополнительным замечаниям.

Отметим, что все необходимые понятия, связанные с N-функциями, и свойства последних читатель может найти в монографиях [1, 11].

§ 1. Интегральные представления N-функций

Будем обозначать символом $\mathscr{N}$ множество всех N-функций, при этом будем рассматривать их значения лишь на $\mathbb{R}^+$, подразумевая четное продолжение в $\mathbb{R}^-$.

Определение 1.1. *Обобщенными* N-*функциями* назовем элементы множества $\overline{\mathscr{N}} \equiv \mathscr{N} \cup (\overline{\mathscr{N}} \setminus \mathscr{N})$, где по определению $\overline{\mathscr{N}} \setminus \mathscr{N}$ содержит функции, обладающие всеми свойствами N-функций, кроме принятия конечных значений на всем $\mathbb{R}^+$, а вместо этого обладающие свойством $\Phi(s) \to +\infty$ при $s \to s_* < +\infty$.

Другими словами, $\overline{\mathscr{N}}$ — это $\mathscr{N}$, в котором область значений функций есть $\overline{\mathbb{R}^+}$ вместо $\mathbb{R}^+$. Ясно, что пространства $L_\Phi(\Omega)$ с нормой Люксембурга, порожденные функциями $\Phi \in \overline{\mathscr{N}} \setminus \mathscr{N}$, совпадают как множества с $L_\infty(\Omega)$ и нормы эквивалентны:

$$s_0 \|u\|_{L_\Phi(\Omega)} \le \|u\|_{L_\infty(\Omega)} \le s_* \|u\|_{L_\Phi(\Omega)},$$

где $\Phi(s_0) = 1/\mu(\Omega)$.

Пусть заданы числа $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$. Введем несколько терминов и классов функций.

Определение 1.2. Пусть $f, g : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — измеримые функции. Будем говорить, что f *растет на* $+\infty$ *быстрее*[1)] (или *убывает медленнее*) функции g, если $g(s)/f(s) \to 0$ при $s \to +\infty$.

Определение 1.3. $\mathscr{D}(\beta)$ есть класс измеримых отображений $f : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}^+}$ таких, что

1) f конечна в левой окрестности точки 1,

2) $f(s)$ растет на $+\infty$ быстрее (или убывает медленнее при $\beta \le 0$), чем s^γ с любым $\gamma < \beta$,

3) если $\beta < +\infty$, то $f(s)$ растет медленнее (убывает быстрее), чем s^β.

Определение 1.4. Положим

$$\mathscr{A}(\alpha,\beta) = \left\{ u : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}^+} \mid u(s) = \int\limits_\alpha^\beta \chi(p) s^p \, dp,\ \chi \in L_1(\alpha,\beta),\ \beta \in \operatorname{supp}\chi,\ \chi \ge 0 \right\}. \tag{1.1}$$

Отметим очевидные свойства класса $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$.

1. Все элементы класса $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ — аналитические функции.

2. При $\beta > 1$ верно $\mathscr{A}(\alpha,\beta) \subset \overline{\mathscr{N}}$, требование $u(s)/s \to 0$ при $s \to 0$ выполнено в силу теоремы Лебега и свойства $\chi \in L_1$.

3. При $1 < \beta < +\infty$ справедливо $\mathscr{A}(\alpha,\beta) \subset \mathscr{N}$.

4. При $\beta = +\infty$ в $\mathscr{N}$ содержатся (т. е. принимают всюду конечные значения) те элементы $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$, у которых

$$\chi(p)e^{\gamma p} \to 0 \quad \text{при } p \to +\infty \quad \forall \gamma > 0.$$

5. При $\beta < +\infty$ верно

$$\mathscr{A}(\alpha,\beta) = \{u \mid u(s) = s^\beta u_1(s), u_1 \in \mathscr{A}(\alpha-\beta, 0)\}. \tag{1.2}$$

6. $\mathscr{A}(\alpha,\beta) \subset \mathscr{D}(\beta)$ — следует из теоремы Лебега и свойства $\chi \in L_1$.

Определение 1.5. Для двух измеримых функций $u, v : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}^+}$ будем писать $u \overset{1}{\sim} v$, если $u(s)/v(s) \to 1$ при $s \to +\infty$, при этом действуют договоренности

$$\frac{+\infty}{+\infty} = 1, \quad \text{а также} \quad \frac{+\infty}{f(s)} \not\to 1, \quad \frac{f(s)}{+\infty} \not\to 1,$$

если f принимает всюду конечные значения.

Определение 1.6. Положим $\mathscr{B}(\alpha,\beta) = \{v : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}^+} \mid v(1) < +\infty,\ \exists u \in \mathscr{A}(\alpha,\beta) : u \overset{1}{\sim} v\}$.

Отметим очевидные свойства класса $\mathscr{B}(\alpha,\beta)$.

1. При $\beta < +\infty$ (как вытекает из (1.2)) верно

$$\mathscr{B}(\alpha,\beta) = \{v \mid v(s) = s^\beta v_1(s), v_1 \in \mathscr{B}(\alpha-\beta, 0)\}. \tag{1.3}$$

2. $\mathscr{B}(\alpha,\beta) \subset \mathscr{D}(\beta)$ — следует из свойства 6 класса $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$.

Есть еще следующее менее тривиальное свойство.

[1)] Не следует путать эту ситуацию с отношением $\succ$ для N-функций, которое тоже часто называют словами «растет быстрее»; см. также (4.15).

Утверждение 1.7. *При любом $\beta \in (-\infty, +\infty]$ класс $\mathscr{B}(\alpha,\beta)$ не зависит от выбора $\alpha \in [-\infty, \beta)$.*

Доказательство. С уменьшением α классы $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ и $\mathscr{B}(\alpha,\beta)$ могут только расшириться, так что достаточно показать включение $\mathscr{B}(\alpha_1,\beta) \subset \mathscr{B}(\alpha_2,\beta)$ с любыми $-\infty \le \alpha_1 < \alpha_2 < \beta$, для чего, в свою очередь, достаточно показать, что

$$\forall u_1 \in \mathscr{A}(\alpha_1,\beta)\, \exists u_2 \in \mathscr{A}(\alpha_2,\beta) \quad u_1 \overset{1}{\sim} u_2.$$

Действительно, по определению (1.1) имеем

$$u_1(s) = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta} \chi_1(p)s^p\,dp = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \chi_1(p)s^p\,dp + \int\limits_{\alpha_2}^{\beta} \chi_1(p)s^p\,dp \equiv u_{11}(s) + u_2(s).$$

Второе слагаемое и есть искомая функция. В самом деле, $u_2 \in \mathscr{A}(\alpha_2,\beta)$, а отношение $u_1 \overset{1}{\sim} u_2$ следует из включений $u_2 \in \mathscr{D}(\beta)$, $u_{11} \in \mathscr{D}(\alpha_2)$. □

Отметим, что в силу (1.2) и (1.3) для изучения классов $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ и $\mathscr{B}(\alpha,\beta)$ при всех α, β достаточно рассмотреть лишь случаи $\beta = 0$ и $\beta = +\infty$.

Благодаря утверждению 1.7 при всех $\beta \in (-\infty, +\infty]$ корректно следующее

Определение 1.8. Положим $\mathscr{B}(\beta) = \{v \mid v(1) < +\infty, v \overset{1}{\sim} u \in \mathscr{A}(\alpha,\beta)\}$.

Далее, дадим

Определение 1.9. Пусть u, v — измеримые отображения $\mathbb{R}^+$ в $\overline{\mathbb{R}^+}$. Будем писать

1) $u \prec v$, если найдутся постоянные $C_{1,2} > 0$ такие, что $u_1(s) \le C_1 v(C_2 s)$ при $s \gg 1$,

2) $u \sim v$, если $u \prec v$ и $v \prec u$.

Легко видеть, что $\sim$ есть отношение эквивалентности, причем, будучи суженными на $\mathscr{N}$, два введенных отношения совпадают с обычными порядком и эквивалентностью N-функций.

Определение 1.10. Положим $\mathscr{C}(\alpha,\beta) = \{v : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}^+} \mid v(1) < +\infty, \exists u \in \mathscr{A}(\alpha,\beta)\ u \sim v\}$.

Имеем следующие очевидные свойства введенного класса:

1) $\mathscr{C}(\alpha,\beta) = \{v \mid v(s) = s^\beta v_1(s),\ v_1 \in \mathscr{C}(\alpha-\beta, 0)\}$;

2) $\mathscr{C}(\alpha,\beta) \supset \mathscr{B}(\alpha,\beta)$, поскольку отношение $\sim$ слабее $\overset{1}{\sim}$;

3) $\mathscr{C}(\alpha,\beta)$ не зависит от выбора $\alpha < \beta$ (в силу аргументов, использованных в доказательстве утверждения 1.7, и того, что отношение $\sim$ слабее $\overset{1}{\sim}$).

Благодаря последнему свойству корректно следующее

Определение 1.11. Положим $\mathscr{C}(\beta) = \{v \mid v(1) < +\infty,\ v \sim u \in \mathscr{A}(\alpha,\beta)\}$.

Подводя итог вышеизложенному, сформулируем следующие факты.

1. При $\beta > 1$ класс $\mathscr{C}(\beta) \cap \mathscr{N}$ есть множество N-функций, представимых с точностью до эквивалентности N-функций интегралами вида (1.1); при этом не играет роли выбор α.
2. При любом β верно $\mathscr{C}(\beta) \subset \mathscr{D}(\beta)$.
3. Достаточно изучить $\mathscr{C}(+\infty)$ и $\mathscr{C}(0)$ (или любой другой класс $\mathscr{C}(\beta)$ с фиксированным β).

Наша задача в § 1 — дать конструктивное описание класса $\mathscr{C}(\beta)$, т. е., находясь в рамках необходимого условия, а именно принадлежности $\mathscr{D}(\beta)$, указать необременительные достаточные условия для принадлежности $\mathscr{C}(\beta)$ или предъявить богатые семейства представителей этого класса.

С этой целью удобно ввести для функций $\Phi \in \mathscr{D}(\beta)$ специальные вспомогательные функции (производная здесь понимается в смысле $\mathscr{D}'$, но далее дифференциальные свойства будут при необходимости уточняться[2)]):

$$\mathbf{e}_\Phi(s) = \frac{s\Phi'(s)}{\Phi(s)}, \tag{1.4}$$

$$\mathbf{m}_\Phi(p) = \min_{u \geq 1} \frac{\Phi(u)}{u^p}, \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{\mu}_\Phi(p) \text{ — любая точка, где достигается минимум в (1.5).} \tag{1.6}$$

Отметим элементарные свойства введенных величин.

Предложение 1.12. *Пусть $\beta \leq +\infty$. Для любой $\Phi \in \mathscr{D}(\beta)$ при $p \in [1, \beta)$ имеют место следующие утверждения.*

1. $\mathbf{m}_\Phi(p)$ *и* $\boldsymbol{\mu}_\Phi(p)$ *определены и конечны,* $\mathbf{m}_\Phi$ *не возрастает.*
2. *Если $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^+)$, то при p, близких к β,*

$$\mathbf{e}_\Phi(\boldsymbol{\mu}_\Phi(p)) = p. \tag{1.7}$$

3. *При всех $u \geq 1$*

$$\mathbf{m}_\Phi(p)u^p \leq \Phi(u), \quad \mathbf{m}_\Phi(p)\boldsymbol{\mu}_\Phi^p(p) = \Phi(\boldsymbol{\mu}_\Phi(p)). \tag{1.8}$$

4. *При всех $\delta > 0$*

$$u^p \mathbf{m}_\Phi(p) = \delta^p \Phi(u/\delta), \quad \text{где } u = \delta\boldsymbol{\mu}_\Phi(p). \tag{1.9}$$

5. *При p, близких к β, верно (в смысле $\mathscr{D}'$)*

$$\frac{d}{dp} \ln \mathbf{m}_\Phi(p) + \ln \boldsymbol{\mu}_\Phi(p) = 0. \tag{1.10}$$

6. *Если Φ принимает всюду конечные значения, то*

$$\lim_{p \to \beta} \mathbf{m}_\Phi^{1/p}(p) = 0. \tag{1.11}$$

7. *Если Φ принимает всюду конечные значения, то*

$$\lim_{p \to \beta} \boldsymbol{\mu}_\Phi(p) = +\infty. \tag{1.12}$$

8. *Если (при $\beta = +\infty$) Φ стремится к $+\infty$ на конечном интервале, то*

$$C_1 \leq \mathbf{m}_\Phi^{1/p}(p) \leq C_2. \tag{1.13}$$

9. *Справедливо представление*

$$\Phi(s) = C \exp\left(\int_1^s \frac{\mathbf{e}_\Phi(\xi)}{\xi}\, d\xi \right). \tag{1.14}$$

[2)] При этом мы будем действовать «с запасом», т. е. требовать несколько бо́льшей гладкости, чем, может быть, строго необходимо, имея в виду несущественность этого, поскольку в дальнейшем множество рассматриваемых функций будет пополняться по отношению $\sim$ (или, соответственно для § 3, по $\mathscr{L}$).

Доказательство. 1. Очевидно в силу того, что $\Phi(u)$ растет быстрее, чем u^p.

2. Величина
$$\frac{d}{du}\frac{\Phi(u)}{u^p} = \frac{\mathbf{e}_\Phi(u) - p}{u^{p+1}}\Phi(u)$$
при $u = 1$, $p \to \beta$ отрицательна, значит, при p, близких к β, минимум (1.5) достигается внутри интервала $1 < u < +\infty$, т. е. указанная производная обращается в 0 при $u = \boldsymbol{\mu}_\Phi(p)$, что и требовалось.

3, 4. Очевидно вытекают из определений (1.5), (1.6).

5. Взяв ln, а затем d/dp от $(1.8)_2$ и воспользовавшись (1.7), получим (1.10).

6. При всех $u \geq 1$ имеем из $(1.8)_1$ $\mathbf{m}_\Phi^{1/p}(p) \leq \Phi^{1/p}(u)/u$, откуда $\varlimsup\limits_{p\to\beta} \mathbf{m}_\Phi^{1/p}(p) \leq \Phi^{1/\beta}(u)/u \to 0$ при $u \to +\infty$ в силу $u \in \mathscr{D}(\beta)$, что дает требуемое.

7. Имеем
$$\boldsymbol{\mu}_\Phi(p) = \frac{\Phi^{1/p}(\boldsymbol{\mu}_\Phi(p))}{\mathbf{m}_\Phi^{1/p}(p)} \geq \frac{\Phi^{1/p}(1)}{\mathbf{m}_\Phi^{1/p}(p)},$$
откуда следует (1.12) благодаря (1.11). Отметим, что при $\beta = +\infty$ для гладких Φ формула (1.12) сразу вытекает из (1.7).

8. Неравенство (1.13) сразу получим из (1.10) с учетом того, что $\boldsymbol{\mu}_\Phi$ ограничена.

9. Очевидно. □

Отметим, что по любой из величин (1.4)–(1.6) можно восстановить функцию Φ: для $\mathbf{e}_\Phi$ это следует из (1.14), а для $\mathbf{m}_\Phi$ (а значит, в силу (1.10) и для $\boldsymbol{\mu}_\Phi$) это доказано в § 4.

Построение функции класса $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$, эквивалентной заданной функции класса $\mathscr{D}(\beta)$, в некоторых случаях удается с помощью следующего оператора.

Определение 1.13. Оператор $\mathbf{P}_\beta$ вводится на $\mathscr{D}(\beta)$ по правилу
$$\mathbf{P}_\beta[\Phi](u) = \int\limits_\alpha^\beta \mathbf{m}_\Phi(p) u^p \, dp. \tag{1.15}$$

Отметим следующие очевидные свойства $\mathbf{P}_\beta[\Phi]$, справедливые для всех $\Phi \in \mathscr{D}(\beta)$, принимающих всегда конечные значения.

1. $\mathbf{P}_\beta[\Phi]$ также принимает конечные значения, поскольку в силу (1.11) для любого u можно добиться $\mathbf{m}_\Phi^{1/p}(p)u \leq 1/2$ при p, близких к β.

2. $\mathbf{P}_\beta[\Phi] \in \mathscr{A}(\alpha,\beta)$.

3. При $\beta > 1$ верно $\mathbf{P}_\beta[\Phi] \in \mathscr{N}$, что следует из свойств 3, 4 класса $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ и соотношения (1.11).

3. $\mathbf{P}_\beta[\Phi] \prec \Phi$, поскольку в силу $(1.8)_1$
$$\mathbf{P}_\beta[\Phi](v/e) \leq \Phi(v) \int\limits_\alpha^\beta e^{-p}\, dp = C\Phi(v).$$

4. При изменении α функция $\mathbf{P}_\beta[\Phi]$ заменяется эквивалентной в смысле $\sim$ (из свойства 3 класса $\mathscr{C}(\alpha,\beta)$).

При анализе нашей задачи, решаемой в § 1 (см. постановку выше), удобно отдельно рассмотреть случаи конечного и бесконечного β.

Случай $\beta = +\infty$. Целесообразно ввести обозначение

$$\mathscr{E} = \{\Phi \in \mathscr{D}(+\infty) \mid \Phi \sim \mathbf{P}_\infty[\Phi]\}, \tag{1.16}$$

так что наша задача при $\beta = +\infty$ может быть конкретизирована как задача о конструктивном описании класса $\mathscr{E}$, так как, очевидно, $\mathscr{E} \subset \mathscr{C}(+\infty)$. Отметим, что класс $\mathscr{E}$ содержит все $\Phi \sim \Phi_0$, если $\Phi_0 \in \mathscr{E}$ (см. § 4).

Прежде всего отбросим «патологические» функции Φ, появление которых в приложениях маловероятно. А именно, заметим, что хотя для $\Phi \in \mathscr{D}(+\infty)$ функция $\mathbf{e}_\Phi$, будучи неограниченной, все же не обязана стремиться к $+\infty$ (и тем более быть монотонной), как легко проверить построением соответствующего примера с помощью (1.14), такое поведение Φ можно отнести к разряду «патологий», поскольку оно не описывает какой-либо новой *асимптотики*, а лишь говорит о нерегулярности *характера* роста Φ. Таким образом, можно ограничиться следующим классом.

Определение 1.14. $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^+)$ *растет на* $+\infty$ *равномерно*, если существует такая постоянная $\gamma \geq 1$, что справедливо соотношение

$$\mathbf{e}_\Phi(q) \leq \mathbf{e}_\Phi(t) \Longrightarrow q \leq \gamma t. \tag{1.17}$$

Очевидно, этот класс есть обобщение случая монотонной $\mathbf{e}_\Phi$ (который соответствует значению $\gamma = 1$).

Перейдем к описанию достаточных признаков класса $\mathscr{E}$.

Утверждение 1.15. *Пусть* $\Phi \in \mathscr{D}(+\infty) \cap C^1(\mathbb{R}^+)$ *обладает следующими свойствами:*

1) Φ *растет равномерно с некоторым* $\gamma \geq 1$*;*

2) *существуют такие числа* $\varepsilon > 0$ *и* $a \in (0,1)$*, что при* $u \gg 1$ *верна оценка*

$$\Phi\left(\frac{au}{\gamma}\right)(\mathbf{e}_\Phi(\gamma u) - \mathbf{e}_\Phi(au)) \geq \Phi(\varepsilon u). \tag{1.18}$$

Тогда $\Phi \in \mathscr{E}$.

Замечание 1.16. Из условия $a < 1$ и (1.17) следует, что $\mathbf{e}_\Phi(\gamma u) > \mathbf{e}_\Phi(au)$.

Доказательство утверждения 1.15. В силу свойства 4 оператора $\mathbf{P}_\beta$ достаточно показать, что $\mathbf{P}_\infty[\Phi] \succ \Phi$. Для этого сузим интервал интегрирования в (1.15) до (непустого в силу замечания 1.16) интервала $p \in (\mathbf{e}_\Phi(au), \mathbf{e}_\Phi(\gamma u))$, где ввиду (1.7) и (1.17) имеет место включение $\delta \equiv \frac{u}{\boldsymbol{\mu}_\Phi(p)} \in \left(\frac{1}{\gamma^2}, \frac{\gamma}{a}\right)$, а поэтому (благодаря (1.9)) и оценка $\mathbf{m}_\Phi(p)(\gamma^2 u)^p \geq \Phi(au/\gamma)$, которая ввиду (1.18) окончательно дает $\mathbf{P}_\infty[\Phi](\gamma^2 u) \geq \Phi(\varepsilon u)$, что и требовалось. $\square$

Следствие 1.17. *В утверждении* 1.15 *условие* 2 *можно заменить одним из следующих условий:*

2′) *существует постоянная* $a < 1$ *такая, что при* $u \gg 1$ *верно*

$$\mathbf{e}_\Phi(\gamma u) - \mathbf{e}_\Phi(au) \geq \text{const} > 0; \tag{1.19}$$

2″) (a) $\mathbf{e}_\Phi(s)/s$ *не возрастает,*

(b) $\mathbf{e}_\Phi \in C^1$ *в окрестности* $+\infty$*, и найдутся такие постоянные* $\varepsilon_1 > 0$, $B > 1$, *что*

$$\forall C \in [\gamma, B\gamma/(B-1)] \quad \exp[(1-\varepsilon_1)\mathbf{e}_\Phi(v)] s\mathbf{e}'_\Phi(s)|_{s=Cv} \geq B, \quad v \gg 1. \tag{1.20}$$

Доказательство. Из (1.19) очевидно следует (1.18). Пусть теперь выполнено условие $2''$. Можно считать, что $B < \gamma/(\gamma-1)$. Докажем, что (1.18) выполнено с

$$a = \frac{B-1}{B}\gamma, \quad \varepsilon = \frac{B-1}{B}\varepsilon_1.$$

В самом деле, имеем $\mathbf{e}_\Phi(\gamma u) - \mathbf{e}_\Phi(au) = (\gamma-a)u\mathbf{e}'_\Phi(bu)|_{b(u)\in[a,\gamma]} \ge \frac{\gamma-a}{\gamma}s\mathbf{e}'_\Phi(s)|_{s=bu}$, а с учетом (1.14) и условия $2''$(a) получаем

$$\frac{\Phi(au/\gamma)}{\Phi(\varepsilon u)} = \exp\left(\int\limits_{\varepsilon u}^{\frac{a}{\gamma}u} \frac{\mathbf{e}_\Phi(\xi)}{\xi}\,d\xi\right) \ge \exp\left(\left(\frac{a}{\gamma}u - \varepsilon u\right)\frac{\mathbf{e}_\Phi(\frac{a}{\gamma}u)}{\frac{a}{\gamma}u}\right)$$
$$= \exp\left((1-\varepsilon_1)\mathbf{e}_\Phi\left(\frac{a}{\gamma}u\right)\right).$$

Используя (1.20) с $v = au/\gamma$ и $C = b\gamma/a$, легко придем к (1.18). $\square$

Таким образом, получаем, что все достаточно быстро (и равномерно) растущие $\Phi \in \mathscr{D}(+\infty)$ принадлежат $\mathscr{C}(+\infty)$, а именно, можно указать следующие классы.

1. Если $\mathbf{e}_\Phi(u)$ растет не медленнее $\ln u$ (что приблизительно соответствует Δ_3-условию для Φ), то выполнено (1.19) и $\Phi \in \mathscr{E} \subset \mathscr{C}(+\infty)$ (а значит, то же верно и для всех $\Phi_1 \sim \Phi$).

2. Для многих Φ, растущих существенно медленнее нижнего порога Δ_3-условия (приблизительно соответствующего равенству в (1.19)), выполнено условие $2''$, например для Φ_α такой, что $\mathbf{e}_{\Phi_\alpha}(s) = \ln^\alpha \ln s + 1$, $\alpha > 1$.

3. Та же функция при $\alpha = 1$, т. е. $\Phi_1(s) = \exp(\ln s \cdot \ln\ln s)$, уже не удовлетворяет условию $2''$, но для нее все же выполнено (1.18) (по-видимому, Φ_1 является нижним порогом применимости утверждения 1.15, т. е. условия 2 в нем, а возможно, и самого класса $\mathscr{E}$).

Обоснование. Положив $\varepsilon = \frac{a}{\gamma e^\delta}$ с $\delta > 1$ и использовав оценку $\ln(1+z) > z/2$ (верную при $z < 1$), получим для $\Phi = \Phi_1$ оценки

$$\ln\Phi\left(\frac{au}{\gamma}\right) - \ln\Phi(\varepsilon u) = \ln\frac{au}{\gamma}\cdot\ln\left(1 + \frac{\ln a/\gamma - \ln\varepsilon}{\ln u + \ln\varepsilon}\right) + \delta\ln\ln\varepsilon u$$
$$\ge \frac{\delta}{2}\cdot\frac{\ln u + \ln a/\gamma}{\ln u + \ln\varepsilon} + \delta\ln\ln\varepsilon u \ge \frac{\delta}{2} + \delta\ln\ln\varepsilon u,$$
$$\mathbf{e}_\Phi(\gamma u) - \mathbf{e}_\Phi(au) = \ln\left(1 + \frac{\ln\gamma - \ln a}{\ln u + \ln a}\right) \ge \frac{(\ln\gamma - \ln a)/2}{\ln u + \ln a},$$

из которых следует (1.18). $\square$

4. Представители класса $\mathscr{C}(+\infty)$ из $\overline{\mathscr{N}} \setminus \mathscr{N}$ получаются с помощью (1.1) при $\chi(p) = s_*^{-p}$, где $s_* \in (0, +\infty)$, так как тогда $\Phi(s) \to +\infty$ при $s \to s_*$.

Случай $\beta < +\infty$. В этом случае применение оператора $\mathbf{P}_\beta$ не столь целесообразно (так как рост функции $\mathbf{P}_\beta[\Phi]$ может быть медленнее Φ, см. §4) и исследование представимости функций $\Phi \in \mathscr{D}(\beta)$ интегралами вида (1.1) с точностью до $\sim$ удобно проводить «с обратной стороны», т. е. перебирая подходящие классы весов χ и заполняя их образами (под действием (1.1)) возможные классы функций Φ.

Перепишем желаемое включение $\Phi \in \mathscr{C}(\beta)$ в виде

$$\Phi(s) \sim s^{\beta}\Psi(s), \quad \Psi(e^z) = \int\limits_0^{\alpha} \chi(\xi) e^{-z\xi} d\xi, \quad \chi \geq 0, \ 0 < \alpha \leq +\infty. \tag{1.21}$$

Таким образом, необходимо описать класс $\mathscr{C}(0)$ как множество функций, являющихся образами преобразования Лапласа от неотрицательных интегрируемых функций с точностью до эквивалентности $\sim$ и замены аргумента $s = e^z$. При этом выбор α роли не играет. Отметим, что эта задача отличается от классической проблемы обращения преобразования Лапласа, когда образ обязан быть аналитической функцией, а обращение совершается в терминах поведения образа в $\mathbb{C}$. В нашем же случае образ может не быть аналитическим (но мы можем варьировать его в определенном смысле) и обращение требуется выразить в терминах его асимптотики на $\mathbb{R}$.

Естественно сначала обратиться к таблицам преобразований Лапласа с целью построения примеров и тем самым частичного решения поставленной задачи.

Пример 1.18. Взяв $\chi(\xi) = \xi^{\nu}$, $\nu > -1$, $\alpha = +\infty$, получим [12, с. 127, (1)] образ $\Psi(e^z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}$, т. е. функции

$$\Phi(s) = \frac{s^{\beta}}{\ln^{\gamma} s}, \quad \gamma > 0,$$

и им эквивалентные принадлежат $\mathscr{C}(\beta)$.

Пример 1.19. Положив $\chi(\xi) = \exp(-1/\xi)$, $\alpha = +\infty$, получим [12, с. 135, (25)] образ $\Psi(e^z) = \frac{2}{\sqrt{z}} K_1(2\sqrt{z})$ и в силу асимптотики $K_1(y) y e^{y} \to \mathrm{const}$ приходим к еще одному представителю класса $\mathscr{C}(\beta)$:

$$\Phi(s) = \frac{s^{\beta}}{\exp(2\sqrt{\ln s}) \ln s}.$$

Удается явно выразить в специальных функциях (при помощи пакета Mathematica) интеграл (1.21) для функции $\chi(\xi) = \exp(-\xi^{-\tau})$ и при некоторых других $\tau > 0$, но результат оказывается громоздкий. $\square$

Кроме того, для получения новых примеров представлений (1.21) может применяться следующая процедура. Пусть функция Φ представима в виде $\Phi(s) \sim s^{\beta} \prod\limits_{k=1}^{m} \zeta_k(s)$, где $\zeta_k \in \mathscr{D}(0)$ имеют прообразы $\chi_k \geq 0$ (например, найденные в таблицах преобразований Лапласа или взятые из утверждений, доказанных ниже в § 1). Тогда, как следует из общих свойств преобразования Лапласа, $\Phi \in \mathscr{C}(\beta)$, причем прообраз χ функции $\Psi(e^z)$, соответствующей функции Φ согласно (1.21), получается последовательным применением к χ_k оператора свертки

$$(\chi_1 * \chi_2)(s) = \int\limits_0^{s} \chi_1(\eta)\chi_2(s-\eta)\, d\eta \quad \text{и т. д.} \tag{1.22}$$

Специфика нашей ситуации, однако, в том, что нас интересует асимптотика Ψ в окрестности $+\infty$, на которую влияет только поведение функции χ в окрестности 0, а не $+\infty$ (где ее можно вовсе обрезать, положив $\alpha < +\infty$), причем хотелось бы получить как можно более богатый набор «эталонных» функций

Ψ с разными асимптотиками, которые далее можно «размножать» процедурой (1.22); при этом в таблицах преобразований Лапласа ощущается явный недостаток в таких эталонных функциях — примеры 1.18 и 1.19 исчерпывают собой все асимптотики Φ, которые удается взять из таблиц. Однако благодаря тому, что нам достаточно получать представления с точностью до $\sim$, мы можем указать новые классы функций вида (1.21). А именно, заметив, что большей скорости стремления $\chi(\xi)$ к 0 (или меньшей скорости стремления к $+\infty$) при $\xi \to 0$ соответствуют более медленно растущие на $+\infty$ (т. е. дальше отстоящие от верхней границы s^β класса $\mathscr{C}(\beta)$) функции $\Phi(s)$, построим подклассы $\mathscr{C}(\beta)$, соответствующие прообразам $\chi(\xi)$, крайне быстро убывающим в нуле (таким, как $\chi(\xi) = \exp(-e^{1/\xi})$), или, наоборот, «примыкающим» к $1/\xi$ (таким, как $\chi(\xi) = \frac{1}{\xi \ln^2(1/\xi)}$).

Утверждение 1.20. *Пусть $F \in C^1(\ln\lambda, +\infty)$, где $\lambda > 1$, причем*

$$F(s) \uparrow 0, \quad \frac{F'(s)}{F(s)} \to 0, \quad e^s F'(s) \to +\infty \quad \text{при } s \to +\infty. \tag{1.23}$$

Тогда интеграл $\Psi(e^z)$ из (1.21) с $\chi(\xi) = \frac{1}{\xi} F'(\ln \frac{1}{\xi})$ и $\alpha = 1/\lambda$ удовлетворяет оценке

$$0 < C_1 \le \frac{\Psi(e^z)}{-F(\ln z)} \le C_2 < +\infty \tag{1.24}$$

с некоторыми постоянными $C_{1,2}$. Другими словами, $\Phi(s) \equiv s^\beta \cdot (-F(\ln\ln s)) \sim s^\beta \Psi(s)$, т. е. $\Phi \in \mathscr{C}(\beta)$.

Пример 1.21. Положив $F(s) = -s^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, получим представитель класса $\mathscr{C}(\beta)$:

$$\Phi(s) = \frac{s^\beta}{\ln^\gamma \ln s}.$$

Пример 1.22. При $F(s) = -\ln^{-\gamma} s$, $\gamma > 0$, получаем другой представитель класса $\mathscr{C}(\beta)$:

$$\Phi(s) = \frac{s^\beta}{\ln^\gamma \ln\ln s}.$$

Доказательство утверждения 1.20. Имеем

$$\Psi(e^z) = \left(\int\limits_0^{1/z} + \int\limits_{1/z}^{1/\lambda} \right) \frac{e^{-z\xi}}{\xi} F'\left(\ln\frac{1}{\xi}\right) d\xi. \tag{1.25}$$

В первом интеграле справедливы оценки $e^{-1} \le e^{-z\xi} \le 1$, в то время как в силу $(1.23)_1$

$$\int\limits_0^{1/z} F'\left(\ln\frac{1}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi} = -F(\ln z),$$

так что первое слагаемое в (1.25) удовлетворяет (1.24). Во втором интеграле при $z \gg 1$ будет благодаря $(1.23)_3$ справедлива оценка $\frac{1}{\xi}F'\bigl(\ln\frac{1}{\xi}\bigr) \le zF'(\ln z)$, в то время как

$$\int\limits_{1/z}^{1/\lambda} e^{-z\xi} d\xi \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-z\xi}\, d\xi \le \frac{1}{z},$$

так что ввиду $(1.23)_2$ этот интеграл бесконечно мал по сравнению с первым и тем самым асимптотика (1.24) полностью обоснована. $\square$

Утверждение 1.23. *Пусть* $\nu \in C^1(\lambda, +\infty)$, *где* $\lambda > 0$, *причем*

$$s^2\nu'(s) \uparrow +\infty \quad \text{при } s \to +\infty.$$

Тогда интеграл $\Psi(e^z)$ *из* (1.21) *с* $\chi(\xi) = \exp(-\nu(1/\xi))$ *и* $\alpha = 1/\lambda$ *удовлетворяет оценке*

$$\frac{\varkappa(2z) - \varkappa(z)}{\varkappa(z)\varkappa(2z)} \exp\left(-\nu(s) - \frac{z}{s}\right)\Big|_{s=\varkappa(2z)} \le \Psi(e^z) \le \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\nu(s) - \frac{z}{s}\right)\Big|_{s=\varkappa(z)}, \tag{1.26}$$

где $\varkappa^{-1}(s) = s^2\nu'(s)$.

Пример 1.24. Взяв $\nu(s) = \frac{s^{\gamma-1}}{\gamma-1}$ с $\gamma > 1$, получим $\varkappa(z) = z^{1/\gamma}$, и (1.26) дает

$$(1 - 2^{-1/\gamma})z^{-1/\gamma}\exp\left(-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}2^{-1/\gamma}z^{1-1/\gamma}\right) \le \Psi(e^z) \le \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma-1}z^{1-1/\gamma}\right),$$

т. е. функция Φ из (1.21) оценивается так:

$$\frac{s^\beta}{\ln^{1/\gamma} s \exp\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}2^{-1/\gamma}\ln^{1-1/\gamma} s\right)} \prec \Phi(s) \prec \frac{s^\beta}{\exp\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}2^{-1/\gamma}\ln^{1-1/\gamma} s\right)},$$

что при $\gamma = 2$ согласуется с примером 1.19 (при $\tau = 1$) и дает оценку асимптотики при других γ, хотя и не выражает асимптотику точно.

Пример 1.25. Возьмем $\nu(s) = \mathrm{Ei}(s) - e^s/s$, где (напомним) $\mathrm{Ei}'(s) = e^s/s$. Тогда $\varkappa(z) = \ln z$ и (1.26) дает

$$\frac{\ln 2}{\ln z \ln 2z}\exp\left(-\mathrm{Ei}(\ln 2z) + \frac{z}{\ln 2z}\right) \le \Psi(e^z) \le \frac{1}{\lambda}\exp(-\mathrm{Ei}(\ln z)),$$

что с учетом асимптотического разложения $\mathrm{Ei}(s) = e^s(s^{-1} + s^{-2} + \dots)$ окончательно приводит к оценке функции Φ из (1.21):

$$\frac{s^\beta}{(\ln\ln s)\ln(2\ln s)\exp\left(\frac{(1+\varepsilon)\ln s}{\ln\ln s}\right)} \prec \Phi(s) \prec \frac{s^\beta}{\exp\left(\frac{\ln s}{\ln\ln s}\right)},$$

т. е. Φ растет еще медленнее, чем в примере 1.19.

Доказательство утверждения 1.23. Имеем

$$\Psi(e^z) = \int\limits_0^{1/\lambda} \exp\left(-\nu\left(\frac{1}{\xi}\right) - z\xi\right)d\xi = \int\limits_\lambda^{+\infty} \exp\left[-\left(\nu(s) + \frac{z}{s}\right)\right]\frac{ds}{s^2}. \tag{1.27}$$

Как легко видеть, $\exp[-(\nu(s)+z/s)]$ как функция от s достигает максимума при $s = \varkappa(z)$, откуда оценка сверху в (1.26) очевидна. Для оценки снизу заметим, что указанная функция убывает на интервале $\varkappa(z) \le s \le \varkappa(2z)$ и, сужая на этот интервал интеграл (1.27), приходим к требуемому. $\square$

В итоге полученные нами классы функций $\Phi \in \mathscr{C}(\beta)$ и соответствующие им χ можно представить в виде табл. 1 (см. § 4). Отметим при этом, что в приложениях нас будет интересовать не столько конкретный вид весов χ в интегральном представлении, сколько описание (в терминах асимптотики Φ на $+\infty$) классов $\mathscr{C}(\beta)$, в которых существует принципиальная возможность такого представления.

§ 2. Специальные интегральные преобразования N-функций

Пусть задано число $\sigma \geq 0$ и функция ψ, измеримая на $[\sigma, +\infty)$ и такая, что

$$\psi \geq 0; \quad \exists M_* \in \mathscr{N} \;\; \psi M_* \in L_1(\sigma, +\infty). \tag{2.1}$$

Определение 2.1. Интегральное преобразование $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ определяется формулой

$$\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi](v) = \int\limits_{\sigma}^{+\infty} \psi(s)\Phi(vs)\,ds.$$

Определение 2.2. Функция $N \in \mathscr{N}$ называется *пороговой для* $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$, если $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[N] \in \overline{\mathscr{N}} \setminus \mathscr{N}$.

Отметим некоторые свойства введенных понятий.

1. Если $\Phi \in \mathscr{N}$ такова, что $\Phi \lll M_*$, то $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi]$, очевидно, определена на $\mathbb{R}^+$ (более того, $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi] \in \mathscr{N}$, см. предложение 2.3).

2. $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[M_*] \in \overline{\mathscr{N}}$, т. е., вообще говоря, M_* может быть пороговой функцией для $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ (в противном случае пороговая функция растет быстрее, но она всегда существует и может быть явно построена, см. замечание 2.9).

3. $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ сохраняет отношение $\sim$ и потому является операцией над классами N-функций, т. е. над порождаемыми ими пространствами Орлича (см. предложение 2.3).

Предложение 2.3. $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ *переводит* N*-функции снова в* N*-функции и сохраняет порядки* $\prec$, $\lll$ *и отношение* $\sim$.

Доказательство. Пусть $\Phi \in \mathscr{N}$, $\Phi \lll M_*$. При проверке свойства $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi] \in \mathscr{N}$ неочевидна лишь асимптотика величины $\frac{\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi](v)}{v}$ в 0 и $+\infty$. Для $v \to 0$ это следует из теоремы Лебега, так как при $v < 1$ в силу выпуклости Φ верно $\frac{\Phi(vs)}{v} \leq \Phi(s)$ и $\frac{\Phi(vs)}{v} \to 0$ при $v \to 0$, а при $v \gg 1$ имеем

$$\frac{\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi](v)}{v} \geq \int\limits_{\max(1,\sigma)}^{+\infty} \frac{\Phi(vs)}{v}\psi(s)\,ds > \frac{\Phi(v)}{v} \int\limits_{\max(1,\sigma)}^{+\infty} \psi(s)\,ds \to +\infty \quad \text{при } v \to +\infty.$$

Пусть теперь $\Psi \lll M_*$ такова, что $\Phi \prec \Psi$, т. е. $\Phi(u) \leq \Psi(cu)$ при $u \geq u_0$. Продолжим ψ нулем на $[0, \sigma)$, если $\sigma > 0$, и заметим, что

$$\mathbf{F}_{\psi,0}[\Phi](v) = \int\limits_{0}^{u_0/v} \Phi(vs)\psi(s)\,ds + \int\limits_{u_0/v}^{+\infty} \Phi(vs)\psi(s)\,ds \leq \Phi(u_0)\|\psi\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} + \mathbf{F}_{\psi,0}[\Psi](cv),$$

а это и означает $\mathbf{F}_{\psi,0}[\Phi] \prec \mathbf{F}_{\psi,0}[\Psi]$.

Если же $\Phi \lll \Psi$, т. е.

$$\forall \lambda > 0\, \forall \varepsilon > 0\, \exists u_0(\lambda, \varepsilon)\, \forall u \geq u_0(\lambda, \varepsilon) \quad \Phi(\lambda u) \leq \varepsilon \Psi(u),$$

то, задав произвольно λ и ε, получим аналогично

$$\mathbf{F}_{\psi,0}[\Phi](\lambda u) \leq \Phi(\lambda u_0(\lambda, \varepsilon/2)) \int\limits_{0}^{u_0(\lambda,\varepsilon/2)/v} \psi(s)\,ds + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{F}_{\psi,0}[\Psi](v) \leq \varepsilon \mathbf{F}_{\psi,0}[\Psi](v)$$

при $v \geq v_0(\lambda, \varepsilon)$, где $v_0(\lambda, \varepsilon)$ подобрано так, что для $v = v_0(\lambda, \varepsilon)$ верны оценки

$$\mathbf{F}_{\psi,0}[\Psi](v) \geq 1, \quad \Phi(\lambda u_0(\lambda, \varepsilon/2)) \int\limits_0^{u_0(\lambda,\varepsilon/2)/v} \psi(s)\,ds \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, $\mathbf{F}_{\psi,0}[\Phi] \not\prec \mathbf{F}_{\psi,0}[\Psi]$.

Наконец, сохранение $\sim$ следует из сохранения $\prec$. $\square$

Представляет интерес вопрос об изменении скорости роста на $+\infty$ N-функций под действием преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$. При этом полезно данное в следующем определении обозначение.

Определение 2.4. Преобразование $\mathscr{M}_\sigma$ действует по формуле

$$\mathscr{M}_\sigma[\psi](p) = \left(\int\limits_\sigma^{+\infty} \psi(s) s^p\,ds \right)^{1/p}.$$

Это преобразование с точностью до степени $1/p$ есть преобразование Меллина. Можно отметить следующие простые факты.

1. Для $\Phi(s) = s^p$ будет $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi](v) = \varphi^p(p) v^p$, где

$$\varphi = \mathscr{M}_\sigma[\psi], \tag{2.2}$$

т. е. степенные функции всегда инвариантны относительно $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$, но с возникновением множителя $\varphi(p)$, который мы назовем *характеристикой* преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$.

2. Если $M_* \in \overline{\mathscr{N}} \setminus \mathscr{N}$, то допустимы (в смысле (2.1)) только финитные ψ: $\operatorname{supp} \psi = [\sigma, \sigma_*]$, т. е. только такие $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ могут быть определены на всем $\mathscr{N}$. При этом для всех $\Phi \in \mathscr{N}$ будет $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi] \sim \Phi$, т. е. в указанном случае все $\Phi \in \mathscr{N}$ суть инварианты $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$. При этом в (2.2) будем иметь $\varphi(p) \leq C\sigma_*$.

3. В общем случае $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ повышает скорость роста Φ (см. утверждение 2.6).

Последний вопрос удобно в некоторых случаях анализировать с использованием следующей вспомогательной функции[4)] (функции растяжения):

$$\ell_\Phi(s) = \sup_{v \geq u_0} \frac{\Phi(vs)}{\Phi(v)}, \tag{2.3}$$

где u_0 выбирается подходящим образом. Сформулируем общие свойства функции ℓ_Φ.

Предложение 2.5. 1. *Для любой $\Phi \in \mathscr{N}$ функция ℓ_Φ определена и конечна на интервале не ýже, чем $[0, 1]$.*

2. *ℓ_Φ определена на всем $\mathbb{R}^+$ в том и только в том случае, когда Φ удовлетворяет Δ_2-условию, т. е.*

$$\exists C > 1, u_0 > 0\, \forall u \geq u_0 \quad \Phi(2u) \leq C\Phi(u), \tag{2.4}$$

при этом u_0 в (2.3) нужно брать из (2.4), и верна оценка

$$\forall s \geq 1 \quad \ell_\Phi(s) \leq C s^{\frac{\ln C}{\ln 2}}, \tag{2.5}$$

[4)]Эта идея и некоторые моменты в утверждении 2.6 подсказаны О. И. Королевым.

где C взято из (2.4).

3. ℓ_Φ *является главной частью функции из* $\overline{\mathscr{N}}$, *причем* $\ell_\Phi(s) \le s$ *при* $s \to 0$.

4. $\forall \Phi \in \mathscr{N}\ \ell_\Phi \succ \Phi$.

5. $\ell_\Phi \sim \Phi$ *в том и только в том случае, когда* Φ *удовлетворяет* Δ'*-условию, т. е.*

$$\exists C > 1, v_0 > 0\, \forall u, v \ge v_0 \quad \Phi(uv) \le C\Phi(u)\Phi(v). \tag{2.6}$$

Доказательство. 1. При $s \le 1$ правая часть (2.3) конечна ввиду оценки $\Phi(vs) \le s\Phi(v)$.

2. Если выполнено (2.4), то для любых $v \ge u_0$, $n \in \mathbb{N}$, $s \in [2^{n-1}, 2^n]$ имеем

$$\Phi(vs) \le \Phi(2^n v) \le C^n \Phi(v) \le C\Phi(v) C^{\frac{\ln s}{\ln 2}} = C\Phi(v) s^{\frac{\ln C}{\ln 2}},$$

откуда следуют (2.5) и существование $\ell_\Phi(s)$ при $s \ge 1$.

Обратно, если правая часть (2.3) конечна при всех $s \ge 0$, в частности при $s = 2$, то при $v \ge u_0$ имеем $\Phi(2v) \le \Phi(v)\ell_\Phi(2)$, что и означает (2.4).

3. Из свойств обобщенных N-функций для ℓ_Φ неочевидна лишь асимптотика при $s \to 0$ и (для случая, когда ℓ_Φ конечна на всем $\mathbb{R}^+$) при $s \to +\infty$. При $s \le 1$ имеем $\ell_\Phi(s) \le \sup\limits_{v \ge u_0} \frac{s\Phi(v)}{\Phi(v)} = s$, а при $s \to +\infty$

$$\frac{\ell_\Phi(s)}{s} \ge \frac{\Phi(u_0 s)}{s\Phi(u_0)} = \frac{\Phi(u_0 s)}{u_0 s} \frac{u_0}{\Phi(u_0)} \to +\infty.$$

4. Имеем по определению $\Phi(\xi) \le \Phi(u_0)\ell_\Phi(\xi/u_0)$ для всех $\xi \in [0, u_0 s_*)$ (где s_* есть правая граница области определения ℓ_Φ), что и требовалось.

5. Если выполнено (2.6), то $\ell_\Phi(s) \le C\Phi(s)$ при $s \ge v_0$, т. е. $\ell_\Phi \prec \Phi$, и в силу п. 4 получаем $\ell_\Phi \sim \Phi$.

Обратно, пусть $\ell_\Phi \prec \Phi$. Тогда для всех $v, s \ge u_0$ (где u_0 взято из (2.3)) имеем

$$\frac{\Phi(vs)}{\Phi(v)} \le \ell_\Phi(s) \le \Phi(Cs) \le C_1\Phi(s),$$

поскольку Φ удовлетворяет Δ_2-условию ввиду п. 2. $\square$

Теперь мы готовы описать связь роста Φ и $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi]$.

Утверждение 2.6. *Пусть* $\Phi \lll M_*$. *Тогда*

1. $\Phi \prec \mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi] \prec \ell_\Phi$.

2. *При дополнительном ограничении* $\ell_\Phi \le M_*$ *верна импликация:* Φ *удовлетворяет* Δ_2*-условию* $\Longrightarrow \mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi] \sim \Phi$.

3. Φ *удовлетворяет* Δ'*-условию* $\Longrightarrow \mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi] \sim \Phi$.

4. Φ *удовлетворяет* Δ'*-условию* $\Longleftrightarrow \mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi] \sim \ell_\Phi$.

Следствие 2.7. 1. *Если* Φ *удовлетворяет* Δ'*-условию, то*

$$\Phi \sim \mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi] \sim \ell_\Phi.$$

2. *Если* Φ *удовлетворяет* Δ_2*-условию (с условием* $\ell_\Phi \le M_*$*, которое зачастую не является дополнительным ограничением, например, в случае роста* M_* *быстрее степенных функций), но не* Δ'*-условию, то*

$$\Phi \sim \mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi] \prec \ell_\Phi,$$

где второе отношение строгое. Таким образом, п. 3 *утверждения* 2.6 *в обратную сторону неверен.*

3. *Если* Φ *не удовлетворяет* Δ_2*-условию, то, вообще говоря, оба отношения в п.* 1 *утверждения* 2.6 *строгие.*

Замечание 2.8. Неясно, верен ли п. 2 утверждения 2.6 в обратную сторону.

Доказательство утверждения 2.6. 1. Для любой $\Phi \lll M_*$ имеем

$$\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi](v) \geq \int\limits_{\max(1,\sigma)}^{+\infty} \Phi(vs)\psi(s)ds \geq \int\limits_{\max(1,\sigma)}^{+\infty} s\Phi(v)\psi(s)ds = C\Phi(v),$$

т. е. $\Phi \prec \mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi]$. С другой стороны, в силу (2.3) и п. 4 предложения 2.5

$$\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi](v) \leq \int\limits_{\sigma}^{\max(\sigma,v_0)} \psi(s)\Phi(vs)ds + \int\limits_{\max(\sigma,v_0)}^{+\infty} \psi(s)\Phi(vs)\,ds$$
$$\leq C_1\Phi(C_2v) + \int\limits_{\max(\sigma,v_0)}^{+\infty} \psi(s)\ell_\Phi(v)\Phi(s)ds \leq \ell_\Phi(C_3v),$$

поскольку последний интеграл сходится ввиду $\Phi \lll M_*$.

2. Если $\ell_\Phi \leq M_*$ и Φ удовлетворяет Δ_2-условию, то ввиду п. 2 предложения 2.5 $\ell_\Phi(s)$ конечна при всех s, так что при $v \geq v_0$

$$\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi](v) \leq \int\limits_{\sigma}^{+\infty} \psi(s)\ell_\Phi(s)\Phi(v)ds \leq C\Phi(v).$$

3. Если выполнено (2.6), то (продолжая ψ нулем на $[0,\sigma)$) имеем при $v \geq v_0$

$$\mathbf{F}_{\psi,0}[\Phi](v) \leq v_0\psi(v_0)\Phi(v_0v) + \int\limits_{v_0}^{+\infty} C\Phi(v)\Phi(s)\psi(s)ds \leq C_1\Phi(C_2s).$$

4. При выполнении (2.6) из п. 3 настоящего утверждения и п. 5 предложения 2.5 будет $\ell_\Phi \sim \Phi \sim \mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi]$. Обратно, пусть теперь $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi] \succ \ell_\Phi$, тогда

$$\exists a, b\, \forall v \geq b \quad \int\limits_{\sigma}^{+\infty} \psi(s)\Phi(avs)\,ds \geq \ell_\Phi(v),$$

т. е.

$$1 \leq I(a,v) \equiv \int\limits_{\sigma}^{+\infty} \frac{\psi(s)\Phi(avs)}{\ell_\Phi(v)}\,ds. \tag{2.7}$$

Поскольку $\Phi(avs) \leq \ell_\Phi(v)\Phi(as)$ при $s \geq u_0/a$, подынтегральная функция в $I(a,v)$ может быть оценена величиной

$$\psi(s)\left(\Phi(as) + \frac{\Phi(u_0v)}{\ell_\Phi(v)}\right) \tag{2.8}$$

при всех $v \gg 1$. Если бы Φ не удовлетворяла Δ'-условию, то в силу пп. 4, 5 предложения 2.5 было бы $\ell_\Phi \not\gg \Phi$, так что (2.8) можно было бы оценить равномерно по v интегрируемой по s мажорантой. Тогда $I(a,v) \to 0$ при $v \to +\infty$ по теореме Лебега, что противоречит (2.7). $\square$

Характеристика φ и пороговая функция наряду с ядром ψ являются удобными инструментами описания преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$; часто в их терминах (а не в терминах ядра) удобнее описывать свойства $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$. Более того, между характеристикой и пороговой функцией существует следующая связь.

Замечание 2.9. Характеристика φ — неубывающая функция, поэтому $\varphi \geq \varphi_* = \mathrm{const} > 0$. Следовательно, интеграл

$$M_*(v) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{v^p\,dp}{\varphi^p(p)}$$

сходится при $v < \varphi_*$. Легко видеть, что M_* есть пороговая функция для $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$. Таким образом, далее можно считать, что M_* в (2.1) сразу выбрана пороговой. $\square$

Следующий важный вопрос — вычисление суперпозиции операторов $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}(\sigma_1,\sigma_2;\psi_1,\psi_2)(s)\\
&\qquad = \int\limits_{-\frac{\ln s}{2}+\ln\sigma_1}^{\frac{\ln s}{2}-\ln\sigma_2} \psi_1(\sqrt{s}e^{\xi})\psi_2(\sqrt{s}e^{-\xi})\,d\xi = \int\limits_{\sigma_1^2/s}^{s/\sigma_2^2} \frac{\psi_1(\sqrt{s\zeta})\psi_2(\sqrt{s/\zeta})}{2\zeta}\,d\zeta,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\forall g \quad g_{\exp}(z) = g(e^z). \tag{2.10}$$

Предложение 2.10. *Суперпозиция двух операторов $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \circ \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$ снова является оператором вида $\mathbf{F}_{\psi_3,\sigma_3}$, ядро которого — свертка исходных:*

$$\psi_3 = \mathbf{C}(\sigma_1,\sigma_2;\psi_1,\psi_2), \quad \text{т. е.} \quad \psi_{3\exp}(z) = \int\limits_{\ln\sigma_1}^{z-\ln\sigma_2} \psi_{1\exp}(\eta)\psi_{2\exp}(z-\eta)\,d\eta \tag{2.11}$$

(что при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ дает обычную свертку функций $\psi_{i\exp}$ по $\mathbb{R}$), а характеристика есть произведение исходных характеристик, т. е. (ср. (2.2))

$$\mathscr{M}_{\sigma_1\sigma_2}[\mathbf{C}(\sigma_1,\sigma_2;\psi_1,\psi_2)] = \mathscr{M}_{\sigma_1}[\psi_1]\cdot\mathscr{M}_{\sigma_2}[\psi_2], \tag{2.12}$$

причем $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$.

Замечание 2.11. Выражение суперпозиции операторов $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ в терминах их пороговых функций изучается в § 4.

Доказательство предложения 2.10. Имеем

$$(\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \circ \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2})[\Phi](v) = \int\limits_{\sigma_1}^{+\infty} ds_1 \int\limits_{\sigma_2}^{+\infty} ds_2 \psi_1(s_1)\psi_2(s_2)\Phi(vs_1s_2),$$

что после замены $s = s_1s_2$, $\xi = \frac{1}{2}\ln\frac{s_1}{s_2}$ легко дает $(2.11)_1$, (2.9), а затем и $(2.11)_2$. Применяя оператор $\mathbf{F}_{\psi_3,\sigma_3} = \mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \circ \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$ к функции $\Phi(s) = s^p$, очевидно, получим соотношение характеристик; в частности, из (2.2) и $(2.11)_1$ следует (2.12). $\square$

Пример 2.12. Взяв $\psi_k(s) = s^{-\gamma_k}$, $\sigma_k = 1$, $\gamma_k > 0$, $k = 1,2$, получим $\mathbf{C}(1,1;\psi_1,\psi_2)(s) = \frac{s^{-\gamma_1}-s^{-\gamma_2}}{\gamma_2-\gamma_1}$, а при $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ будет $\mathbf{C}(1,1;\psi_1,\psi_1)(s) = s^{-\gamma}\ln s$.

Пример 2.13. Если $\psi(s) = \exp(-\ln^2 s)$, $\sigma = 0$, то из $(2.11)_2$ легко найдем

$$\mathbf{C}(0,0;\psi,\psi)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\biggl(-\frac{\ln^2 s}{2}\biggr).$$

Пример 2.14. Положим $\psi_1(s) = e^{-s}$, $\sigma = 0$. Степени оператора $\mathbf{F}_{\psi_1,0}$ имеют в силу предложения 2.10 вид $\mathbf{F}_{\psi_n,0}$, где $\psi_{n+1} = \mathbf{C}(0,0;\psi_1,\psi_n)$, что после несложных выкладок с учетом представления $(2.9)_2$ можно записать в виде

$$\psi_{n+1} = \mathscr{L}\biggl[\frac{1}{\cdot}\psi_n\biggl(\frac{1}{\cdot}\biggr)\biggr]. \tag{2.13}$$

В частности, при $n = 1$ получим ([12, с. 135, (29)] при $\nu = 0$, $\alpha = 4$) представление $\psi_2(s) = 2\mathrm{K}_0(2\sqrt{s})$. Поскольку $\mathrm{K}_0(s)e^s\sqrt{s} \to \mathrm{const}$ при $s \to +\infty$, то $\frac{\psi_2(s)}{s^{-1/4}e^{-2\sqrt{s}}} \to \mathrm{const}$, т. е. $\psi_2(s) \sim e^{-\sqrt{s}}$ (замена ядра эквивалентным допустима, так как в определенном смысле не меняет преобразование $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$, см. следствие 2.19 и замечание 2.22). При $n \ge 2$ анализ асимптотики ψ_{n+1} из (2.13) затруднителен (хотя возможно выражение в специальных функциях, например с помощью пакета Mathematica); впрочем, далее (в примере 3.12) представление для всех $\mathbf{F}_{\psi_n,0}$ будет получено другим путем. $\square$

Еще один интересный пример получается с использованием предложения 2.10 и очевидного соотношения

$$\mathscr{M}_\sigma[\psi\ln(\cdot)](p) = \biggl(\frac{d}{dp}\varphi^p(p)\biggr)^{1/p}, \quad \text{где} \quad \varphi = \mathscr{M}_\sigma[\psi]. \tag{2.14}$$

Пример 2.15. Найдем оператор $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ с характеристикой φ_γ такой, что

$$\forall p < \beta < +\infty\, \forall\gamma \in \mathbb{N}_0 \quad \varphi_\gamma^p(p) \overset{1}{\sim} \frac{\ln^{\gamma+1}\frac{1}{\beta-p}}{\Gamma(\gamma+2)}. \tag{2.15}$$

Систематически задача восстановления преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ по его характеристике φ будет решаться в §3, наш же пример дает $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ с характеристикой $\ln^{(\gamma+1)/p}(1/(\beta-p))$, поскольку изменение φ с точностью до $\overset{\mathscr{L}}{\sim}$ (см. определение 2.16), а тем более до более сильного отношения $\overset{1}{\sim}$ в определенном смысле не меняет $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ (см. следствие 2.19 и замечание 2.22). Более того, $\ln^{(\gamma+1)/p}(1/(\beta-p))$ можно заменить на $\ln^{(\gamma+1)/\beta}(1/(\beta-p))$ (см. обоснование в § 3 — замечание 3.2, и далее, где задача о нахождении ψ при последнем φ будет решена при любом $\gamma \ge 0$).

Обозначим

$$\psi_\gamma(s) = \frac{s^{-(\beta+1)}\ln^\gamma\ln s}{\Gamma(\gamma+1)\ln s}, \quad \psi_{1\gamma}(s) = \psi_\gamma(s)\ln s, \quad \gamma \ge 0;$$

$$\varphi_\gamma = \mathscr{M}_e[\psi_\gamma], \quad \varphi_{1\gamma} = \mathscr{M}_e[\psi_{1\gamma}].$$

Покажем, что при $\gamma \in \mathbb{N}_0$ преобразование $\mathbf{F}_{\psi_\gamma,e}$ искомое, т. е. φ_γ удовлетворяет (2.15). Отметим, что в силу (2.14)

$$\mathscr{M}_\sigma[\psi_{1\gamma}]^p(p) = \frac{d}{dp}\mathscr{M}_\sigma[\psi_\gamma]^p(p),$$

в частности, это равенство и непосредственный подсчет дают, что

$$\varphi^p_{1\gamma}(p) = \frac{d}{dp}\varphi^p_\gamma(p); \quad \mathscr{M}_1[\psi_{10}]^p(p) = \frac{1}{\beta - p}; \quad \varphi^p_{10}(p) = \frac{e^{p-\beta}}{\beta - p}. \tag{2.16}$$

Для любого $\gamma \geq 1$ легко подсчитать с учетом предложения 2.10, что

$$\mathbf{C}(e, 1; \psi_{\gamma-1}, \psi_{10})_{\exp}(z) = \frac{e^{-(\beta+1)z}\ln^\gamma z}{\Gamma(\gamma)\gamma},$$

т. е. $\mathbf{C}(e, 1; \psi_{\gamma-1}, \psi_{10}) = \psi_{1\gamma}$, что после применения $\mathscr{M}_e$ с помощью (2.12) приводит к соотношению $\varphi_{1\gamma} = \varphi_{\gamma-1} \cdot \mathscr{M}_1[\psi_{10}]$, т. е. в силу $(2.16)_{1,2}$

$$\frac{d}{dp}\varphi^p_\gamma(p) = \varphi^p_{\gamma-1}(p) \cdot \frac{1}{\beta - p}. \tag{2.17}$$

При $\gamma = 0$ из $(2.16)_{1,3}$ легко находим $\frac{d}{dp}\varphi^p_0(p) = \frac{e^{p-\beta}}{\beta-p}$, т. е. $\varphi^p_0(p) = -\operatorname{Ei}(p-\beta) + \mathrm{const}$ удовлетворяет (2.15). Далее индукцией по γ обосновывается (2.15) при всех $\gamma \in \mathbb{N}$ с использованием (2.17) и того факта, что отношение $\overset{1}{\sim}$ выдерживает интегрирование и умножение на произвольную функцию. $\square$

Наконец, еще одна группа вопросов, связанных с преобразованием $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$, состоит в следующем: поскольку описание N-функций нас интересует с точностью до $\sim$, то следует понять, в каких пределах возможно варьировать $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$, чтобы образы N-функций одного класса (в смысле $\sim$) составляли после указанной вариации снова тот же класс, что и до вариации? Прежде чем формулировать ответ на этот вопрос, определим следующие понятия.

Определение 2.16. Будем говорить, что две измеримые функции $f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^+$ *связаны отношением* $f \overset{\varphi}{\prec} g$, если существует такая постоянная $C > 0$, что $f(\xi) \leq Cg(\xi)$ при ξ, близких к β. Также будем писать $f \overset{\varphi}{\sim} g$, если $f \overset{\varphi}{\prec} g$ и $g \overset{\varphi}{\prec} f$.

Далее будем считать, что в соответствии с (2.1) и определением 2.1 заданы два преобразования $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}$ и $\mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$, определенные на $\mathscr{C}(\beta)$ для некоторого $\beta \leq +\infty$, так что их характеристики $\varphi_k = \mathscr{M}_{\sigma_k}[\psi_k]$, $k = 1, 2$, определены на (α, β).

Определение 2.17. Будем писать

1) $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta}{\prec} \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$, если для любого $\Phi \in \mathscr{C}(\beta)$ верно $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}[\Phi] \prec \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}[\Phi]$;

2) $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta}{\prec}_* \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$, если существуют такие постоянные $C > 0$, $u_0 \geq 0$ и $\alpha < \beta$, что для любого $\Psi \in \mathscr{A}(\alpha, \beta)$ справедливо $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}[\Psi](v) \leq \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}[\Psi](Cv)$ при всех $v \geq u_0$ (т. е. имеет место отношение $\prec$ с равномерными по всем Ψ постоянными C и u_0);

3) $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta}{\preccurlyeq} \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$, если для любого $\Phi \in \mathscr{C}(\beta)$ выполнено $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}[\Phi] \preccurlyeq \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}[\Phi]$;

4) $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta}{\sim} \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$, если $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta}{\prec} \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$ и $\mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2} \overset{F,\beta}{\prec} \mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}$, т. е. $\forall \Phi \in \mathscr{C}(\beta)$ верно $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}[\Phi] \sim \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}[\Phi]$;

5) $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta}{\sim}_* \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$, если $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta}{\prec}_* \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$ и $\mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2} \overset{F,\beta}{\prec}_* \mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}$, т. е. найдется $\alpha < \beta$ такое, что для всех $\Psi \in \mathscr{A}(\alpha, \beta)$ функции $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}[\Psi]$ и $\mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}[\Psi]$ эквивалентны с равномерными по всем Ψ постоянными C и u_0.

Утверждение 2.18. *Имеют место следующие импликации (помечены цифрами для дальнейших ссылок):*

$$\psi_1 \prec \psi_2 \overset{1}{\Longrightarrow} \varphi_1 \overset{\varphi}{\prec} \varphi_2 \overset{2}{\Longleftrightarrow} \mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta}{\prec}_* \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2} \overset{3}{\Longrightarrow} \mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta}{\prec} \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}. \tag{2.18}$$

Из (2.18), очевидно, вытекает

Следствие 2.19. *Имеют место соотношения*

$$\psi_1 \sim \psi_2 \Longrightarrow \varphi_1 \overset{\mathscr{L}}{\sim} \varphi_2 \Longleftrightarrow \mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta}{\sim}_* \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2} \Longrightarrow \mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta}{\sim} \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}. \tag{2.19}$$

Прежде чем доказывать утверждение 2.18, отметим инвариантность (с точностью до $\overset{\mathscr{L}}{\sim}$) образов $\mathscr{M}_\sigma$ относительно изменения σ, о которой говорится в следующей лемме.

Лемма 2.20. *Пусть* $0 \le \sigma_3 \le \sigma_4 < +\infty$*;* ψ *задана на* $[\sigma_3, +\infty)$*,* $\psi \ge 0$*,* $\varphi_k = \mathscr{M}_{\sigma_k}[\psi]$*,* $k = 3, 4$*. Тогда для любого* $p \ge 1$

$$\varphi_4(p) \le \varphi_3(p) \le C_0\varphi_4(p), \quad \text{где} \quad C_0 = 1 + \frac{\int\limits_{\sigma_3}^{\sigma_4} \psi(s)ds}{\int\limits_{\sigma_4}^{+\infty} \psi(s)ds}, \tag{2.20}$$

т. е. $\varphi_3 \overset{\mathscr{L}}{\sim} \varphi_4$.

Доказательство. Первое неравенство в (2.20) очевидно. Далее, имеем оценку $\varphi_4^p(p) \ge \sigma_4^p \int\limits_{\sigma_4}^{+\infty} \psi(s)ds$, откуда в силу $C_0 \ge 1$ получается цепочка неравенств

$$\varphi_3^p(p) \le \varphi_4^p(p) + \sigma_4^p \int\limits_{\sigma_3}^{\sigma_4} \psi(s)ds \le C_0\varphi_4^p(p) \le C_0^p\varphi_4^p(p),$$

что и требовалось. □

Доказательство утверждения 2.18. 1. Достаточно рассмотреть ситуацию $\sigma_{1,2} = 0$, так как тогда общий случай получается применением леммы 2.20 с $\sigma_3 = 0$, $\sigma_4 = \sigma_{1,2}$, $\psi = \psi_{1,2}$. По условию имеем $\psi_1(s) \le C_1\psi_2(C_2 s)$ при $s \ge C_3$. Как сказано в замечании 2.9, $\varphi_2 \ge \varphi_* = \mathrm{const} > 0$. Таким образом, справедлива цепочка неравенств (при всех $p < \beta$):

$$\begin{aligned}\varphi_1^p(p) &\le \int\limits_0^{C_3} \psi_1(s)s^p ds + \int\limits_{C_3}^{+\infty} C_1\psi_2(C_2 s)s^p ds \le \|\psi_1\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} C_3^p + \frac{C_1}{C_2}\left(\frac{1}{C_2}\right)^p \varphi_2^p(p)\\ &\le \left(\frac{1 + \|\psi_1\|_{L_1(\mathbb{R}^+)}}{\varphi_*} C_3\right)^p \varphi_2^p(p) + \left(\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\frac{1}{C_2}\right)^p \varphi_2^p(p) \le C_4^p\varphi_2^p(p),\end{aligned}$$

что и требовалось.

2 $\Longrightarrow$. Пусть $\varphi_1(p) \le C\varphi_2(p)$ при всех $p \in (\alpha, \beta)$ (чего можно добиться, взяв α достаточно близким к β). Возьмем произвольно $\Psi \in \mathscr{A}(\alpha, \beta)$ и покажем выполнение отношения из п. 2 определения 2.17 с заданной C и $u_0 = 0$. По определению имеем $\Psi(s) = \int\limits_\alpha^\beta \chi(p)s^p\, dp$ с некоторой $\chi \ge 0$. Тогда при всех $v \ge 0$

$$\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}[\Psi](v) = \int\limits_\alpha^\beta \varphi_1^p(p)\chi(p)v^p\, dp \le \int\limits_\alpha^\beta \varphi_2^p(p)\chi(p)(Cv)^p\, dp = \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}[\Psi](Cv),$$

что и требовалось.

2 $\Longleftarrow$. Опираясь на п. 2 определения 2.17, выберем произвольно $p \in (\alpha,\beta)$ и покажем, что $\varphi_1(p) \le C\varphi_2(p)$. Возьмем δ-образную последовательность $\chi_n \ge 0$, т. е. такую, что $\chi_n \to \delta(\cdot - p)$ в $\mathscr{D}'(\alpha,\beta)$, но так, что при всех n сохраняется включение $\beta \in \operatorname{supp}\chi_n$, и рассмотрим соответствующие функции $\Psi_n(s) = \int\limits_\alpha^\beta \chi_n(\xi)s^\xi d\xi$. Ясно, что $\Psi_n \in \mathscr{A}(\alpha,\beta)$. Но тогда при всех $v \ge u_0$ имеем

$$\int\limits_\alpha^\beta \chi_n(\xi)\varphi_1^\xi(\xi)v^\xi d\xi \le \int\limits_\alpha^\beta \chi_n(\xi)\varphi_2^\xi(\xi)C^\xi v^\xi d\xi,$$

что при $n \to \infty$ дает неравенство, которое в силу произвольности v приводит к требуемому соотношению.

3. Выберем произвольно $\Phi \in \mathscr{C}(\beta)$ и найдем эквивалентную функцию $\Psi \in \mathscr{A}(\alpha,\beta)$. По условию $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}[\Psi] \prec \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}[\Psi]$ (даже с равномерными относительно Ψ постоянными C и u_0). Применяя теперь предложение 2.3, получим требуемое. $\square$

Суперпозицию импликаций 1, 2 (и 1, 2, 3) можно усилить следующим образом.

Утверждение 2.21. *Если $\psi_1 \prec \psi_2$, то операторы $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}$ и $\mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$ связаны более сильным, чем упомянутые в утверждении* 2.18, *отношением, а именно отношение*

$$\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}[\Phi] \prec \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}[\Phi] \tag{2.21}$$

верно для любой N*-функции $\Phi \lll M_{*1,2}$, где M_{*k} — пороговые функции операторов $\mathbf{F}_{\psi_k,\sigma_k}[\Psi]$, $k = 1,2$.*

Доказательство. Начиная, как и в п. 1 утверждения 2.18, с неравенства $\psi_1(s) \le C_1\psi_2(C_2 s)$ при $s \ge C_3$ (причем можно считать, что $C_2C_3 \ge \sigma_2$), выпишем теперь другую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}[\Phi](v) \le \int\limits_{\sigma_1}^{C_3}\psi_1(s)\Phi(vs)ds + \int\limits_{C_2C_3}^{+\infty} C_1\psi_2(\xi)\Phi\left(\frac{v}{C_2}\xi\right)\frac{d\xi}{C_2}\\ \le \int\limits_{\sigma_1}^{C_3}\psi_1(s)ds\cdot\Phi(C_3v) + \frac{C_1}{C_2}\mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}[\Phi]\left(\frac{v}{C_2}\right),\end{aligned}$$

которая благодаря п. 1 утверждения 2.6 дает (2.21). $\square$

Замечание 2.22. Взяв пару эквивалентных N-функций $\Phi_1 \sim \Phi_2$ и применив предложение 2.3 и утверждение 2.18, получим, что

1) условие $\psi_1 \prec \psi_2$ достаточно для $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}[\Phi_1] \prec \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}[\Phi_2]$ в классе $\Phi_{1,2} \lll M_{*1,2}$;

2) условие $\varphi_1 \overset{\varphi}{\prec} \varphi_2$ достаточно для того же отношения в классе $\Phi_{1,2} \in \mathscr{C}(\beta)$; и, очевидно, те же свойства верны для $\sim$ и $\overset{\varphi}{\sim}$ (из следствия 2.19), т. е. замена функций ψ или φ эквивалентными (в смысле $\sim$ или $\overset{\varphi}{\sim}$ соответственно) и изменение σ не меняет оператора $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ в естественном смысле — сохраняется класс функций-образов. Другими словами, преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ с эквивалентными

ядрами (в смысле $\sim$) или характеристиками (в смысле $\overset{\mathscr{L}}{\sim}$) можно отождествлять.

Замечание 2.23. Если заменить в определении 2.17 классы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{C}$ классами $\overline{\mathscr{A}}$ и $\overline{\mathscr{C}}$, отличающимися от прежних тем, что в качестве χ допускаются неотрицательные меры с носителем, вообще говоря, не содержащим β, то получим (в силу расширения классов пробных N-функций) вместо $\overset{F,\beta}{\prec}$ и $\overset{F,\beta}{\prec}_*$ более сильные отношения $\overset{F,\beta,\mu}{\prec}$ и $\overset{F,\beta,\mu}{\prec}_*$ соответственно. Однако для них, как нетрудно проверить, справедлив аналог утверждения 2.18 (доказательство п. 2$\Longleftarrow$ станет даже тривиальным, поскольку сразу можно будет взять $\Phi(s) = s^p$, $p \in (\alpha, \beta)$). Таким образом, если обозначить символом $\overset{F}{\prec}$ отношение, описанное в утверждении 2.21, то получим следующую итоговую диаграмму импликаций:

$$\psi_1 \prec \psi_2 \Longrightarrow \mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F}{\prec} \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow (\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta}{\prec}_* \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2} \Longleftrightarrow \varphi_1 \overset{\varphi}{\prec} \varphi_2 \Longleftrightarrow \mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta,\mu}{\prec}_* \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta,\mu}{\prec} \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2} \Longrightarrow \mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \overset{F,\beta}{\prec} \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}, \tag{2.22}$$

и аналогичную схему для соответствующих отношений семейства $\sim$. $\square$

Итак, нашей последней целью было дать достаточные (а желательно и необходимые) условия в терминах ядер ψ и характеристик φ для описания отношений $\overset{F}{\prec}$, $\overset{F,\beta}{\prec}$ и $\overset{F,\beta,\mu}{\prec}$. Диаграмма (2.22) дает частичный ответ на этот вопрос, которого достаточно для дальнейшего. Впрочем, остались открытыми следующие проблемы.

1. Дать необходимые условия в терминах ψ.
2. Выразить те же условия в терминах пороговых функций M_*.
3. Найти описания отношений семейства $\overset{F\ldots}{\prec\!\!\prec}$ в терминах ψ, φ, M_*.

Порядок $\overset{\varphi}{\prec}$ на характеристиках как критерий отношений между $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}$ и $\mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$ полностью описан в (2.22). Частичный ответ на вопрос 2 дается в § 4. Вопросами 1, 3 мы планируем заняться в другой работе.

В итоге мы умеем (с привлечением результатов § 4) описывать свойства преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ в терминах его ядра ψ, характеристики φ и пороговой функции M_*. Но при этом остается существенный пробел, а именно корректность употребления φ в качестве эквивалентного инструмента описания $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ не обоснована в следующем смысле: неясно, всякая ли φ имеет свое преобразование $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$. Другими словами, следует описать процедуру решения уравнения (2.2) относительно ψ и указать класс тех φ, для которых это возможно. Ответу на эти вопросы посвящен следующий § 3 (см. ч. II статьи).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
2. *Симоненко И. Б.* Интерполяция и экстраполяция линейных операторов в пространствах Орлича // Мат. сб. 1964. Т. 63, № 4. С. 536–553.
3. *Бережной Е. И., Перфильев А. А.* Точная теорема экстраполяции для операторов // Функцион. анализ и его прил. 2000. Т. 34, № 3. С. 66–68.
4. *Вайгант В. А., Кажихов А. В.* О существовании глобальных решений двумерных уравнений Навье — Стокса сжимаемой вязкой жидкости // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1283–1316.

5. *Мамонтов А. Е.* Существование глобальных решений многомерных уравнений Бюргерса сжимаемой вязкой жидкости // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 8. С. 61–80.
6. *Мамонтов А. Е.* О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье — Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости. I // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 408–420.
7. *Мамонтов А. Е.* О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье — Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости. II // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 635–649.
8. *Кажихов А. В., Мамонтов А. Е.* Об одном классе выпуклых функций и точных классах корректности задачи Коши для уравнения переноса в пространствах Орлича // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 831–850.
9. *Мамонтов А. Е.* Экстраполяция линейных операторов из L_p в пространства Орлича, порожденные быстро или медленно растущими N-функциями // Актуальные проблемы современной математики. Новосибирск: Новосиб. гос. университет, 1996. Т. 2. С. 95–103.
10. *Mamontov A. E.* Orlicz spaces in the existence problem of global solutions to viscous compressible nonlinear fluid equations. Новосибирск, 1996. 34 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики; № 2–96).
11. *Kufner A., Fučík S., John O.* Function spaces. Prague: Academia, 1977.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969.

Статья поступила 8 декабря 2004 г., окончательный вариант — 24 июня 2005 г.

Мамонтов Александр Евгеньевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
relic@hydro.nsc.ru