Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 512.552.16

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ (σ,τ)–ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ПОЛУПРОСТЫХ КОЛЬЦАХ

О. Гёлбаши, Н. Айдын

Аннотация. Некоторые результаты из [1], относящиеся к ортогональному дифференцированию на полупростых кольцах, доказываются для (σ,τ)-дифференцирований и обобщенных (σ,τ)-дифференцирований.

Ключевые слова: полупростое кольцо, обобщенное дифференцирование, ортогональное дифференцирование.

1. Введение

Всюду в этой работе R — ассоциативное кольцо. Говорят, что кольцо R *без 2-кручений*, если из $2x = 0$, $x \in R$, вытекает, что $x = 0$. Напомним, что R *полупростое*, если из $xRx = 0$ следует, что $x = 0$. Аддитивное отображение $d : R \to R$ называют *дифференцированием*, если $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ для любых $x, y \in R$. Есть много работ, посвященных простым и полупростым кольцам, допускающим дифференцирования. Недавно в [2] введено следующее понятие. Аддитивное отображение $D : R \to R$ называют *обобщенным дифференцированием*, если существует дифференцирование $d : R \to R$ такое, что

$$D(xy) = D(x)y + xd(y) \quad \text{для всех } x, y \in R.$$

Многими авторами исследовались свойства простых и полупростых колец с обобщенным дифференцированием. Отображения $d, g : R \to R$ называют *ортогональными*, если

$$d(x)Rg(y) = 0 = g(y)Rd(x) \quad \text{для всех } x, y \in R.$$

Понятие ортогональных дифференцирований введено Бресаром и Вукманом в [1]. Очевидно, что ненулевое дифференцирование не может быть ортогональным самому себе. В [3] доказаны некоторые результаты, относящиеся к ортогональным дифференцированиям на полупростых кольцах, связанные с теоремой Познера, для произведения дифференцирований на простом кольце. В [4] введено понятие ортогональности для пары (D, d), (G, g) обобщенных дифференцирований на полупростых кольцах и даны необходимые и достаточные условия ортогональности (D, d) и (G, g). В данной статье мы распространяем эти результаты на ортогональные (σ,τ)-дифференцирования и обобщенные (σ,τ)-дифференцирования.

Всюду ниже R — полупростое кольцо без 2-кручения; σ, τ — автоморфизмы R; d, g — (σ,τ)-дифференцирования на R такие, что $g\tau = \tau g$, $d\tau = \tau d$, $\sigma g = g\sigma$,

$\sigma d = d\sigma$. Обобщенное (σ,τ)-дифференцирование $D : R \to R$, задаваемое (σ,τ)-дифференцированием d на R, обозначаем через (D,d) и считаем обобщенные (σ,τ)-дифференцирования (D,d), (G,g) такими, что $G\tau = \tau G$, $D\tau = \tau D$, $\sigma G = G\sigma$, $\sigma D = D\sigma$.

2. Результаты

Лемма 1 [1, лемма 1]. *Пусть $a, b \in R$. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(i) $axb = 0$ *для любого* $x \in R$*;*

(ii) $bxa = 0$ *для любого* $x \in R$*;*

(iii) $axb + bxa = 0$ *для любого* $x \in R$*.*

Если одно из этих утверждений выполнено, то также $ab = ba = 0$*.*

Лемма 2 [1, лемма 2]. *Пусть аддитивные отображения f, h кольца R в себя таковы, что $f(x)Rh(x) = 0$ для любого $x \in R$. Тогда $f(x)Rh(y) = 0$ для всех $x, y \in R$.*

Лемма 3. *(σ,τ)-Дифференцирования d, g на R ортогональны тогда и только тогда, когда $d(x)g(y) + g(x)d(y) = 0$ для всех $x, y \in R$.*

Доказательство. Пусть $d(x)g(y) + g(x)d(y) = 0$ для всех $x, y \in R$. Подставляя в этом уравнении yx на место y, получим

$$0 = d(x)g(yx) + g(x)d(yx) = (d(x)g(y) + g(x)d(y))\sigma(x) + d(x)\tau(y)g(x) + g(x)\tau(y)d(x) = d(x)\tau(y)g(x) + g(x)\tau(y)d(x).$$

Так как τ — автоморфизм кольца R, по лемме 1 имеем $d(x)yg(x) = 0$ для любого $x \in R$. Отсюда по лемме 2 $d(x)yg(z) = 0$ для всех $x, y, z \in R$. Вновь используя лемму 1, находим, что d и g ортогональны.

Обратно, если d и g ортогональны, то $d(x)Rg(y) = 0 = g(x)Rd(y)$ для всех $x, y \in R$. По лемме 1 $d(x)g(y) = g(x)d(y) = 0$ и тем самым $d(x)g(y)+g(x)d(y) = 0$ для всех $x, y \in R$. $\square$

Теорема 1. *(σ,τ)-Дифференцирования d и g на R ортогональны тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(i) $dg = 0$*;*

(ii) $gd = 0$*;*

(iii) $dg + gd = 0$*;*

(iv) $d(x)g(x) = 0$ *для любого* $x \in R$*;*

(v) dg — (σ^2,τ^2)*-дифференцирование на* R*.*

Доказательство. (i)⇒«d и g ортогональны». Допустим, что $dg = 0$. Тогда

$$0 = dg(xy) = dg(x)\sigma^2(y) + \tau(g(x))d(\sigma(y)) + d(\tau(x))\sigma(g(y)) + \tau^2(x)dg(y)$$

и, значит,

$$\tau(g(x))d(\sigma(y)) + d(\tau(x))\sigma(g(y)) = 0 \quad \text{для всех } x, y \in R.$$

Используя равенства $g\tau = \tau g$, $d\tau = \tau d$, $\sigma g = g\sigma$, $\sigma d = d\sigma$ и тот факт, что σ, τ — автоморфизмы R, получим $g(x)d(y) + d(x)g(y) = 0$ для всех $x, y \in R$. Отсюда по лемме 3 d и g ортогональны.

«d и g ортогональны»$\Rightarrow$(i). Имеем $d(x)yg(z)=0$ для всех $x,y,z\in R$. Тогда

$$0=d(d(x)yg(z))=d^2(x)\tau(y)g(\tau(z))+d(\sigma(x))d(y)g(\tau(z))+d(\sigma(x))\tau(y)dg(z).$$

Поскольку d и g ортогональны и σ,τ суть автоморфизмы R, первые два слагаемых равны нулю. Отсюда $d(x)ydg(z)=0$ для всех $x,y,z\in R$. Подставив в последнем равенстве $g(z)$ на место x, получим $dg(z)Rdg(z)=0$ для любого $z\in R$. Так как R полупростое, имеем $dg=0$.

(ii)$\Leftrightarrow$«d и g ортогональны». Доказывается аналогично.

(iii)$\Rightarrow$«d и g ортогональны». Пусть теперь $dg+gd=0$. Тогда

$$\begin{aligned}0&=(dg+gd)(xy)=dg(x)\sigma^2(y)+g(\tau(x))d(\sigma(y))+d(\tau(x))g(\sigma(y))\\&\quad+\tau^2(x)dg(y)+gd(x)\sigma^2(y)+d(\tau(x))g(\sigma(y))+g(\tau(x))d(\sigma(y))+\tau^2(x)gd(y)\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$2g(\tau(x))d(\sigma(y))+d(\tau(x))g(\sigma(y))=0\quad\text{для всех } x,y\in R.$$

Поскольку σ,τ — автоморфизмы полупростого кольца R без 2-кручения, заключаем, что $g(x)d(y)+d(x)g(y)=0$ для всех $x,y\in R$. Таким образом, по лемме 3 d и g ортогональны.

«d и g ортогональны»$\Rightarrow$(iii). Мы доказали, что любое ортогональное (σ,τ)-дифференцирование таково, что $dg=0$ и $gd=0$. Тем самым (iii) также выполнено.

(iv)$\Rightarrow$«d и g ортогональны». Линеаризация $d(x)g(x)=0$ дает

$$d(x)g(y)+d(y)g(x)=0\quad\text{для всех } x,y\in R. \tag{2.1}$$

Подставив yz на место y в (2.1), получим

$$0=d(x)g(y)\sigma(z)+d(x)\tau(y)g(z)+d(y)\sigma(z)g(x)+\tau(y)d(z)g(x).$$

Ввиду (1) $d(x)g(y)=-d(y)g(x)$ и $d(z)g(x)=-d(x)g(z)$, так что предыдущее соотношение превращается в такое:

$$d(y)[\sigma(z),g(x)]=[\tau(y),d(x)]g(z)\quad\text{для всех } x,y,z\in R. \tag{2.2}$$

Заменяя y на $\tau^{-1}(d(x))$, имеем $d(\tau^{-1}(d(x)))[\sigma(z),g(x)]=0$ и тем самым

$$\tau^{-1}(d^2(x))[z,g(x)]=0\quad\text{для всех } x,z\in R. \tag{2.3}$$

Теперь подставим zr вместо z в (2.3). Используя полученное равенство, заключаем, что

$$\tau^{-1}(d^2(x))z[r,g(x)]=0\quad\text{для всех } x,z,r\in R.$$

Определим отображение $I_{g(x)}:R\to R$, полагая $I_{g(x)}(r)=[r,g(x)]$ для любого $r\in R$. Ясно, что $I_{g(x)}$ аддитивно на R. Из леммы 2 получаем

$$\tau^{-1}(d^2(x))z[r,g(y)]=0\quad\text{для всех } x,y,z,r\in R. \tag{2.4}$$

Взяв xu вместо x в (2.4) и использовав это равенство, выводим, что

$$0=(\tau^{-1}(d^2(x)\sigma^2(u)+2\tau(d(x))\sigma(d(u))+\tau^2(x)d^2(u)))z[r,g(y)],$$

откуда

$$2(d(x))\sigma(d(u))z[r,g(y)]=0\quad\text{для всех } x,y,z,r,u\in R.$$

Поскольку σ,τ — автоморфизмы простого полукольца без 2-кручения R и $\sigma d = d\sigma$, имеем

$$d(x)d(u)z[r,g(y)] = 0 \quad \text{для всех } x,y,z,r,u \in R. \tag{2.5}$$

Взяв xt в качестве x и применив (2.5), получим $d(x)\sigma(t)d(u)z[r,g(y)] = 0$ для всех $x,y,z,r,u,t \in R$. В частности,

$$d(x)R[r,g(y)]d(x)R[r,g(y)] = 0 \quad \text{для всех } x,y,r \in R,$$

поэтому $d(x)R[r,g(y)] = 0$ для всех $x,y,r \in R$. Так как R полупростое, имеем также $[d(x),g(y)]R[d(x),g(y)] = 0$. Отсюда $d(x)g(y) = g(y)d(x)$ для всех $x,y \in R$. Тогда (2.1) может быть записано в виде $d(x)g(y)+g(x)d(y) = 0$ для всех $x,y \in R$. По лемме 3 d и g ортогональны.

«d и g отрогональны»$\Rightarrow$(iv). Если d и g ортогональны, то $d(x)Rg(x) = 0$ и тем самым $d(x)g(x) = 0$ для любого $x \in R$ по лемме 1.

(v)$\Rightarrow$«d и g ортогональны». Непосредственными вычислениями можно проверить следующее равенство:

$$dg(xy) = dg(x)\sigma^2(y) + \tau(g(x))d(\sigma(y)) + d(\tau(x))\sigma(g(y)) + \tau^2(x)dg(y).$$

Поскольку dg — (σ^2,τ^2)-дифференцирование на R, имеем

$$dg(xy) = dg(x)\sigma^2(y) + \tau^2(x)dg(y).$$

Сравнивая последние два выражения для $dg(xy)$, получим $\tau(g(x))d(\sigma(y)) + d(\tau(x))\sigma(g(y)) = 0$, откуда

$$g(x)d(y) + d(x)g(y) = 0 \quad \text{для всех } x,y \in R.$$

Согласно лемме 3 d и g ортогональны.

«d и g ортогональны»$\Rightarrow$(v). Мы доказали, что любое ортогональное дифференцирование удовлетворяет равенству $dg = 0$. Поэтому dg — (σ^2,τ^2)-дифференцирование на R. $\square$

Следствие 1. *Пусть R — простое кольцо характеристики, отличной от двух. Если (σ,τ)-дифференцирования d и g на R удовлетворяют одному из утверждений теоремы 1, то либо $d = 0$, либо $g = 0$.*

Следствие 2. *Если d — (σ,τ)-дифференцирование на R такое, что $d(x)^2 = 0$ для любого $x \in R$, то $d = 0$.*

Определение 1 [4, определение]. Обобщенные дифференцирования (D,d) и (G,g) на R называют *ортогональными*, если

$$D(x)RG(y) = 0 = G(y)RD(x) \quad \text{для всех } x,y \in R.$$

Лемма 4. *Если (σ,τ)-обобщенные дифференцирования (D,d) и (G,g) на R ортогональны, то имеют место следующие утверждения:*

(i) *$D(x)G(y) = G(x)D(y) = 0$, откуда $D(x)G(y) + G(x)D(y) = 0$ для всех $x,y \in R$;*

(ii) *d и G ортогональны и $d(x)G(y) = G(y)d(x) = 0$ для всех $x,y \in R$;*

(iii) *g и D ортогональны и $g(x)D(y) = D(y)g(x) = 0$ для всех $x,y \in R$;*

(iv) *d и g ортогональны;*

(v) *$dG = Gd = 0$, $gD = Dg = 0$ и $DG = GD = 0$.*

Доказательство. (i) Согласно предположениям $D(x)zG(y) = 0$ для всех $x,y,z \in R$. Отсюда по лемме 1 $D(x)G(y) = 0 = G(x)D(y)$ для любых $x,y \in R$. Тем самым $D(x)G(y) + G(x)D(y) = 0$ для всех $x,y \in R$.

(ii) Поскольку $D(x)G(y) = 0$ и $D(x)zG(y) = 0$, для всех $x, y, z \in R$ имеем

$$0 = D(rx)G(y) = (D(r)\sigma(x) + \tau(r)d(x))G(y) = \tau(r)d(x)G(y).$$

Отсюда ввиду полупростоты R получаем

$$d(x)G(y) = 0 \quad \text{для всех } x, y \in R. \tag{2.6}$$

Записав rx вместо x в (2.6), имеем $0 = d(xr)G(y) = (d(x)\sigma(r) + \tau(x)d(r))G(y)$ и тогда $d(x)\sigma(r)G(y) = 0$ для всех $x, y, r \in R$. Так как σ — автоморфизм R, то $d(x)RG(y) = 0$ для всех $x, y \in R$. Тогда по лемме 1 $G(y)d(x) = 0$ для всех $x, y \in R$, что доказывает (ii).

(iii) Доказывается такими же рассуждениями, как и (ii).

(iv) Поскольку $D(x)G(y) = 0$, для всех $x, y \in R$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= D(xz)G(yw) = (D(x)\sigma(z) + \tau(x)d(z))(G(y)\sigma(w) + \tau(y)g(w)) \\ &= D(x)\sigma(z)G(y)\sigma(w) + D(x)\sigma(z)\tau(y)g(w) + \tau(x)d(z)G(y)\sigma(w) + \tau(x)d(z)\tau(y)g(w). \end{aligned}$$

Из (ii) и (iii) получаем

$$\tau(x)d(z)\tau(y)g(w) = 0 \quad \text{для всех } x, y, z, w \in R.$$

Так как τ — автоморфизм R, находим, что

$$d(z)yg(w) = 0 \quad \text{для всех } y, z, w \in R.$$

Поэтому d и g ортогональны.

(v) Известно, что d и G ортогональны ввиду (ii). Отсюда

$$0 = G(d(x)zG(y)) = Gd(x)\sigma(z)\sigma(G(y)) + \tau(d(x))g(zG(y)).$$

Используя равенства $d\tau = \tau d$, $G\sigma = \sigma G$ и ортогональность d и g, получим

$$Gd(x)\sigma(z)G(\sigma(y)) = 0,$$

так что

$$Gd(x)zG(y) = 0 \quad \text{для всех } x, y, z \in R.$$

Заменяя y на $d(x)$ в предыдущем равенстве, имеем $Gd = 0$ ввиду полупростоты R.

Аналогично если каждое из равенств $d(G(x)zd(y)) = 0$, $D(g(x)zD(y)) = 0$, $g(D(x)zg(y)) = 0$, $G(D(x)zG(y)) = 0$ выполнено для всех $x, y, z \in R$, то соответственно $dG = Dg = gD = DG = GD = 0$. □

Теорема 2. *(σ, τ)-Обобщенные дифференцирования (D, d) и (G, g) на R ортогональны тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(i) (a) $D(x)G(y) + G(x)D(y) = 0$ для всех $x, y \in R$;

(b) $d(x)G(y) + g(x)D(y) = 0$ для всех $x, y \in R$;

(ii) $D(x)G(y) = d(x)G(y) = 0$ для всех $x, y \in R$;

(iii) $D(x)G(y) = 0$ для всех $x, y \in R$ и $dG = dg = 0$.

Доказательство. (i)⇒«(D, d) и (G, g) ортогональны». Заменяя xz на x в (a), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= D(xz)G(y) + G(xz)D(y) \\ &= D(x)\sigma(z)G(y) + \tau(x)d(z)G(y) + G(x)\sigma(z)D(y) + \tau(x)g(z)D(y) \\ &= D(x)\sigma(z)G(y) + G(x)\sigma(z)D(y) + \tau(x)(d(z)G(y) + g(z)D(y)). \end{aligned}$$

Используя (b) и то, что σ — автоморфизм кольца R, находим

$$D(x)zG(y) + G(x)zD(y) = 0 \quad \text{для всех } x, y, z \in R.$$

Тем самым по лемме 1 (D, d) и (G, g) ортогональны.

«(D, d) и (G, g) ортогональны»$\Rightarrow$(i) вытекает из леммы 4.

(ii)$\Rightarrow$«(D, d) и (G, g) ортогональны». Поскольку $D(x)G(y) = 0$ и $d(x)G(y) = 0$, для всех $x, y \in R$ имеем

$$0 = D(xz)G(y) = D(x)\sigma(z)G(y) + \tau(x)d(z)G(y) = D(x)\sigma(z)G(y),$$

поэтому $D(x)RG(y) = 0$ для всех $x, y \in R$. Требуемый результат получается по лемме 1.

«(D, d) и (G, g) ортогональны»$\Rightarrow$(ii) следует из леммы 4.

(iii)$\Rightarrow$«(D, d) и (G, g) ортогональны». Допустим, что $D(x)G(y) = 0$ для всех $x, y \in R$ и $dG = dg = 0$. Тогда

$$0 = dG(xy) = dG(x)\sigma^2(y) + \tau(G(x))d(\sigma(y)) + d(\tau(x))\sigma(g(y)) + \tau^2(x)dg(y).$$

Используя равенства $d\tau = \tau d$, $\sigma g = g\sigma$, $\sigma d = d\sigma$, $G\tau = \tau G$ и тот факт, что σ, τ суть автоморфизмы R, получим

$$G(x)d(y) + d(x)g(y) = 0 \quad \text{для всех } x, y \in R.$$

По теореме 2 d и g ортогональны, поэтому $G(x)d(y) = 0$ для всех $x, y \in R$. Если взять xz вместо x в последнем равенстве и использовать ортогональность d и g, то можно заключить, что $G(x)\sigma(z)d(y) = 0$ для всех $x, y \in R$. По лемме 1 $d(y)G(x) = 0$ для всех $x, y \in R$, поэтому выполнено (ii). Тогда ввиду (ii) (D, d) и (G, g) ортогональны.

«(D, d) и (G, g) ортогональны»$\Rightarrow$(iii). По лемме 4 $D(x)G(y) = 0$ и $dG = 0$. Поэтому по теореме 2 d и g ортогональны, так как $dg = 0$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bresar M., Vukman J.* Orthogonal derivation and extension of a theorem of Posner // Rad. Mat. 1989. V. 5. P. 237–246.
2. *Bresar M.* On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations // Glasgow Math. J. 1991. V. 33. P. 89–93.
3. *Posner E. C.* Derivations in prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 1093–1100.
4. *Argaç N., Atsushi N., Albaş E.* On orthogonal generalized derivations of semiprime rings // Turk. J. Math. 2004. V. 28. P. 185–194.

Статья поступила 19 января 2006 г.

Öznur Gölbaşi
Cumhuriyet University, Faculty of Arts and Science,
Department of Mathematics, Sivas, TURKEY
ogolbasi@cumhuriyet.edu.tr, http://www.cumhuriyet.edu.tr

Neşet Aydin
Çanakkale 18 Mart University, Faculty of Arts and Science,
Department of Mathematics, Çanakkale, TURKEY
neseta@comu.edu.tr, http://www.comu.edu.tr