Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 517.956.32

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВОЛНОВОМУ УРАВНЕНИЮ

В. М. Гордиенко

Аннотация. Для класса систем гиперболических по Фридрихсу, к которым может быть сведено волновое уравнение, построено соотношение вдоль дополнительной характеристики. Доказано утверждение о сохранении вихря. Сформулированы условия, при которых решения систем гиперболических по Фридрихсу указанного класса являются решениями исходного волнового уравнения.

Ключевые слова: волновое уравнение, гиперболическая по Фридрихсу система.

Пусть функция Φ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = f \tag{1}$$

при $t > 0$.

Тогда, как известно, вектор-функция U, образованная первыми производными функции Φ

$$U \equiv \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_t \\ \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{bmatrix}, \tag{2}$$

удовлетворяет при $t > 0$ симметрической системе

$$\begin{bmatrix} k & -l & -m & -n \\ -l & k & 0 & 0 \\ -m & 0 & k & 0 \\ -n & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l & -k & 0 & 0 \\ -k & l & m & n \\ 0 & m & -l & 0 \\ 0 & n & 0 & -l \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} m & 0 & -k & 0 \\ 0 & -m & l & 0 \\ -k & l & m & n \\ 0 & 0 & n & -m \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & -k \\ 0 & -n & 0 & l \\ 0 & 0 & -n & m \\ -k & l & m & n \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix} f, \tag{3}$$

где k, l, m, n — любые функции от t, x, y, z. Будем предполагать выполненными условия

$$k > 0, \quad l^2 + m^2 + n^2 < k^2, \tag{4}$$

обеспечивающие положительную определенность матрицы при $\frac{\partial}{\partial t}$ и, следовательно, гиперболичность по Фридрихсу системы (3).

В работе доказывается обратное утверждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (НШ–9019.2006.1) и Сибирского отделения Российской академии наук (интеграционные проекты № 5, № 2.15).

Теорема. *Пусть вектор-функция*

$$U = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{5}$$

является решением симметрической гиперболической системы (3) (*т. е. условия* (4) *выполнены*), *и пусть для начальных условий при* $t = 0$ *справедливо*

$$\operatorname{rot} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} = 0. \tag{6}$$

Тогда при $t > 0$ *для решения* U *имеют место равенства*

$$\begin{bmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} = 0, \qquad \begin{bmatrix} u_t - p_x \\ v_t - p_y \\ w_t - p_z \end{bmatrix} = 0, \tag{7}$$

$$p_t - u_x - v_y - w_z = f. \tag{8}$$

Из (7) уже следует, что существует функция Φ такая, что верно (2), а тогда (8) означает, что эта функция удовлетворяет волновому уравнению (1).

В конце статьи мы покажем, как сформулированные утверждения о связи между решениями волнового уравнения (1) гиперболической системы (3) переносятся на случай краевой задачи, удовлетворяющей условию Лопатинского.

Рассмотрим выражения

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_1 = {}& \begin{bmatrix} k & -l & -m & -n \\ -l & k & 0 & 0 \\ -m & 0 & k & 0 \\ -n & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l & -k & 0 & 0 \\ -k & l & m & n \\ 0 & m & -l & 0 \\ 0 & n & 0 & -l \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} m & 0 & -k & 0 \\ 0 & -m & l & 0 \\ -k & l & m & n \\ 0 & 0 & n & -m \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & -k \\ 0 & -n & 0 & l \\ 0 & 0 & -n & m \\ -k & l & m & n \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathscr{I}_2 = \begin{bmatrix} k & -l & -m & -n & 0 & 0 & 0 \\ -l & k & 0 & 0 & 0 & -n & m \\ -m & 0 & k & 0 & n & 0 & -l \\ -n & 0 & 0 & k & -m & l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t - u_x - v_y - w_z \\ u_t - p_x \\ v_t - p_y \\ w_t - p_z \\ w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_3 = {}& -\left(k\frac{\partial}{\partial t} - l\frac{\partial}{\partial x} - m\frac{\partial}{\partial y} - n\frac{\partial}{\partial z}\right) \begin{bmatrix} p \\ -u \\ -v \\ -w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix} \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ & + k \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} p - l \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} u - m \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} v - n \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} w. \end{aligned}$$

Конструкции, которые здесь будут рассмотрены, основаны на справедливости следующих тождеств:

$$\mathscr{I}_1 = \mathscr{I}_2 = \mathscr{I}_3.$$

Эти тождества выполнены при любых функциях p, u, v, w и при любых параметрах k, l, m, n, которые могут быть постоянными, а могут зависеть от t, x, y, z.

Мы будем использовать следующие обозначения для матриц и векторов, участвующих в записи выражений $\mathscr{I}_1, \mathscr{I}_2, \mathscr{I}_3$:

$$U = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \mathscr{W} \equiv \begin{bmatrix} p_t - u_x - v_y - w_z \\ u_t - p_x \\ v_t - p_y \\ w_t - p_z \\ w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} k & -l & -m & -n \\ -l & k & 0 & 0 \\ -m & 0 & k & 0 \\ -n & 0 & 0 & k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} l & -k & 0 & 0 \\ -k & l & m & n \\ 0 & m & -l & 0 \\ 0 & n & 0 & -l \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} m & 0 & -k & 0 \\ 0 & -m & l & 0 \\ -k & l & m & n \\ 0 & 0 & n & -m \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & -k \\ 0 & -n & 0 & l \\ 0 & 0 & -n & m \\ -k & l & m & n \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} k & -l & -m & -n & 0 & 0 & 0 \\ -l & k & 0 & 0 & 0 & -n & m \\ -m & 0 & k & 0 & n & 0 & -l \\ -n & 0 & 0 & k & -m & l & 0 \end{bmatrix}.$$

Напомним, как волновое уравнение (1) сводится к симметрической системе (3).

Пусть Φ удовлетворяет волновому уравнению (1) и U — вектор-функция, для которой функция Φ есть потенциал (2). Тогда для вектор-функции $\mathscr{W}$ справедливо

$$\mathscr{W} \equiv \begin{bmatrix} p_t - u_x - v_y - w_z \\ u_t - p_x \\ v_t - p_y \\ w_t - p_z \\ w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv F.$$

Умножая последнее равенство на прямоугольную матрицу G, получим следствие уравнения (1) и обозначений (2):

$$\begin{bmatrix} k & -l & -m & -n & 0 & 0 & 0 \\ -l & k & 0 & 0 & 0 & -n & m \\ -m & 0 & k & 0 & n & 0 & -l \\ -n & 0 & 0 & k & -m & l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t - u_x - v_y - w_z \\ u_t - p_x \\ v_t - p_y \\ w_t - p_z \\ w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix} f, \tag{9}$$

в краткой записи

$$G\mathscr{W} = \begin{bmatrix} k \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix} f$$

или, что то же самое,

$$G[\mathscr{W} - F] = 0. \tag{10}$$

Из тождества $\mathscr{I}_1 = \mathscr{I}_2$ следует эквивалентная запись соотношений (9) в виде (3), которая означает, что вектор-функция U из производных от Φ решения волнового уравнения, определенная равенством (2), удовлетворяет симметрической системе.

Система (3) является симметрической гиперболической по Фридрихсу, если выполнено условие (4), что предполагается.

Итак, каждому решению волнового уравнения (1) соответствует некоторое решение симметрической гиперболической системы (3).

Переходим к обоснованию обратного утверждения, сформулированного в теореме.

Сначала докажем, что равенства (7) и (8) выполнены при $t = 0$. Заметим, что система (9) (эквивалентная системе (3)) может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} k & -l & -m & -n \\ -l & k & 0 & 0 \\ -m & 0 & k & 0 \\ -n & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t - u_x - v_y - w_z - f \\ u_t - p_x \\ v_t - p_y \\ w_t - p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & -m \\ -n & 0 & l \\ m & -l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что равенство (6) влечет равенства (7) и (8).

Таким образом, из того, что для вектор-функции (5) — решения системы (3) — при $t = 0$ выполнены условия (6), следует, что при $t = 0$ выполнены (7) и (8).

Будем доказывать выполнение равенств (7) и (8) при всех $t > 0$.

Характеристический определитель системы (3) равен

$$\det\left[\tau A + \xi B + \eta C + \zeta D\right] = (k^2 - l^2 - m^2 - n^2)(k\tau - l\xi - m\eta - n\zeta)^2(\tau^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2).$$

Мы получим дополнительное соотношение вдоль характеристики

$$k\frac{\partial}{\partial t} - l\frac{\partial}{\partial x} - m\frac{\partial}{\partial y} - n\frac{\partial}{\partial z}$$

для вектора

$$\mathscr{V} \equiv k \operatorname{rot} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \times \left(\operatorname{grad} p - \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right)$$

в виде дифференциального уравнения

$$\left(k\frac{\partial}{\partial t} - l\frac{\partial}{\partial x} - m\frac{\partial}{\partial y} - n\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathscr{V} + \Omega\mathscr{V} = 0, \tag{11}$$

квадратная матрица Ω размера 3×3 будет явно выражена через параметры k, l, m, n и их производные.

Определим дифференциальную матрицу J равенством

$$J = \begin{bmatrix} m\frac{\partial}{\partial z} - n\frac{\partial}{\partial y} & 0 & k\frac{\partial}{\partial z} - n\frac{\partial}{\partial t} & -k\frac{\partial}{\partial y} + m\frac{\partial}{\partial t} \\ n\frac{\partial}{\partial x} - l\frac{\partial}{\partial z} & -k\frac{\partial}{\partial z} + n\frac{\partial}{\partial t} & 0 & k\frac{\partial}{\partial x} - l\frac{\partial}{\partial t} \\ l\frac{\partial}{\partial y} - m\frac{\partial}{\partial x} & k\frac{\partial}{\partial y} - m\frac{\partial}{\partial t} & -k\frac{\partial}{\partial x} + l\frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Нам будут полезны еще две формы записи матрицы J. Одна получается, если в (12) сгруппировать слагаемые при k, l, m, n:

$$J = k\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} + l\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ m\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

а другая — если группировать слагаемые при операторах дифференцирования:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -n & m \\ 0 & n & 0 & -l \\ 0 & -m & l & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & k \\ -m & 0 & -k & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}$$
$$+ \begin{bmatrix} -n & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & k & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y} + \begin{bmatrix} m & 0 & k & 0 \\ -l & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial z}. \quad (14)$$

Из записи J в форме (13) легко следует, что

$$J\begin{bmatrix} p \\ -u \\ -v \\ -w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(w_y - v_z) + n(v_t - p_y) - m(w_t - p_z) \\ k(u_z - w_x) - n(u_t - p_x) + l(w_t - p_z) \\ k(v_x - u_y) + m(u_t - p_x) - l(v_t - p_y) \end{bmatrix}.$$

Это равенство запишем в виде

$$J\begin{bmatrix} p \\ -u \\ -v \\ -w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n & -m & k & 0 & 0 \\ -n & 0 & l & 0 & k & 0 \\ m & -l & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_t - p_x \\ v_t - p_y \\ w_t - p_z \\ w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix}, \quad (15)$$

а также еще в двух вариантах:

$$J\begin{bmatrix} p \\ -u \\ -v \\ -w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n & -m & k & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & l & 0 & k & 0 \\ 0 & m & -l & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_t - u_x - v_y - w_z \\ u_t - p_x \\ v_t - p_y \\ w_t - p_z \\ w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} \equiv H\mathscr{W}, \quad (16)$$

$$J\begin{bmatrix} p \\ -u \\ -v \\ -w \end{bmatrix} = k\,\mathrm{rot}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \times \left[\mathrm{grad}\, p - \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\right] = \mathscr{V}. \quad (17)$$

Из равенства (13) также следует, что при любой функции h

$$J\left\{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} h\right\} = 0, \quad (18)$$

а из равенства (14) — что при любой функции h

$$J\left\{\begin{bmatrix} k \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix} h\right\} = \left\{J\begin{bmatrix} k \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix}\right\} h.$$

Значит, в случае постоянных параметров k, l, m, n имеем

$$J\begin{bmatrix} k \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix} h = 0 \quad (\text{при любой функции } h). \tag{19}$$

Используя тождество $\mathscr{I}_1 = \mathscr{I}_3$, систему (3) можно записать в виде

$$-\left(k\frac{\partial}{\partial t} - l\frac{\partial}{\partial x} - m\frac{\partial}{\partial y} - n\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{bmatrix} p \\ -u \\ -v \\ -w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix}\left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$+ k\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} p - l\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} u - m\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} v - n\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} w = \begin{bmatrix} k \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix} f$$

или, перенося все в левую часть, в виде

$$-\left(k\frac{\partial}{\partial t} - l\frac{\partial}{\partial x} - m\frac{\partial}{\partial y} - n\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{bmatrix} p \\ -u \\ -v \\ -w \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} k \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix}\left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} - f\right)$$
$$+ k\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} p - l\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} u - m\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} v - n\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} w = 0. \tag{20}$$

Запишем систему (3), перенеся все в левую часть:

$$\begin{bmatrix} k & -l & -m & -n \\ -l & k & 0 & 0 \\ -m & 0 & k & 0 \\ -n & 0 & 0 & k \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l & -k & 0 & 0 \\ -k & l & m & n \\ 0 & m & -l & 0 \\ 0 & n & 0 & -l \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} m & 0 & -k & 0 \\ 0 & -m & l & 0 \\ -k & l & m & n \\ 0 & 0 & n & -m \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & -k \\ 0 & -n & 0 & l \\ 0 & 0 & -n & m \\ -k & l & m & n \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix} f = 0. \tag{21}$$

Напомним, что соотношения (10) и (20) являются эквивалентными записями системы (21) (и все они эквивалентны системе (3)).

Подействуем на систему (21) матрицей J. Так как матрица J дифференциальная, образуется две группы слагаемых: первая, когда будем дифференцировать производные от p, u, v, w, вторая, когда будем дифференцировать параметры k, l, m, n. Вычисляя слагаемые первой группы, будем считать систему (21) записанной в виде (20), при этом параметры k, l, m, n можно считать постоянными. Используя соотношения (18) и (19), получим, что первая группа слагаемых равна

$$-\left(k\frac{\partial}{\partial t} - l\frac{\partial}{\partial x} - m\frac{\partial}{\partial y} - n\frac{\partial}{\partial z}\right) J \begin{bmatrix} p \\ -u \\ -v \\ -w \end{bmatrix} = -\left(k\frac{\partial}{\partial t} - l\frac{\partial}{\partial x} - m\frac{\partial}{\partial y} - n\frac{\partial}{\partial z}\right) \mathscr{V}.$$

Вычисляя слагаемые второй группы и считая систему (21) записанной в виде (10), получим, что вторая группа слагаемых равна $(JG)[\mathscr{W} - F]$. Итак, в результате применения матрицы J к системе (21), приходим к следствию этой системы:

$$-\left(k\frac{\partial}{\partial t} - l\frac{\partial}{\partial x} - m\frac{\partial}{\partial y} - n\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathscr{V} + (JG)\big[\mathscr{W} - F\big] = 0. \tag{22}$$

Займемся преобразованием второго слагаемого. Определим составную матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -l & -m & -n & 0 & 0 & 0 \\ -l & k & 0 & 0 & 0 & -n & m \\ -m & 0 & k & 0 & n & 0 & -l \\ -n & 0 & 0 & k & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & n & -m & k & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & l & 0 & k & 0 \\ 0 & m & -l & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

Обозначим $\delta = \sqrt{k^2 - l^2 - m^2 - n^2}$. Можно проверить, что $\det \mathcal{A} = k\delta^6$ и

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\delta^2} \begin{bmatrix} k & l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ l & k & 0 & 0 & 0 & n & -m \\ m & 0 & k & 0 & -n & 0 & l \\ n & 0 & 0 & k & m & -l & 0 \\ 0 & 0 & -n & m & k - \frac{l^2}{k} & -\frac{lm}{k} & -\frac{ln}{k} \\ 0 & n & 0 & -l & -\frac{lm}{k} & k - \frac{m^2}{k} & -\frac{mn}{k} \\ 0 & -m & l & 0 & -\frac{ln}{k} & -\frac{mn}{k} & k - \frac{n^2}{k} \end{bmatrix}.$$

Обозначим через R прямоугольную матрицу, состоящую из трех последних столбцов матрицы $\mathcal{A}^{-1}$:

$$R = \frac{1}{\delta^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & -m \\ -n & 0 & l \\ m & -l & 0 \\ k - \frac{l^2}{k} & -\frac{lm}{k} & -\frac{ln}{k} \\ -\frac{lm}{k} & k - \frac{m^2}{k} & -\frac{mn}{k} \\ -\frac{ln}{k} & -\frac{mn}{k} & k - \frac{n^2}{k} \end{bmatrix}.$$

Теперь для второго слагаемого в левой части равенства (22) получаем

$$
\begin{aligned}
(JG)[\mathscr{W}-F] &= (JG)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}[\mathscr{W}-F] = (JG)\mathcal{A}^{-1}\begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix}[\mathscr{W}-F] \\
&= (JG)\mathcal{A}^{-1}\begin{bmatrix} G[\mathscr{W}-F] \\ H[\mathscr{W}-F] \end{bmatrix} = (JG)\mathcal{A}^{-1}\begin{bmatrix} O \\ H\mathscr{W} \end{bmatrix} \\
&= (JG)RH\mathscr{W} = (JG)R\mathscr{V} = \Omega\mathscr{V}.
\end{aligned}
$$

Мы обозначили через Ω квадратную матрицу размера 3×3:

$$
\Omega = (JG)R \equiv \frac{1}{\delta^2}\left(\begin{bmatrix} m\frac{\partial}{\partial z} - n\frac{\partial}{\partial y} & 0 & k\frac{\partial}{\partial z} - n\frac{\partial}{\partial t} & -k\frac{\partial}{\partial y} + m\frac{\partial}{\partial t} \\ n\frac{\partial}{\partial x} - l\frac{\partial}{\partial z} & -k\frac{\partial}{\partial z} + n\frac{\partial}{\partial t} & 0 & k\frac{\partial}{\partial x} - l\frac{\partial}{\partial t} \\ l\frac{\partial}{\partial y} - m\frac{\partial}{\partial x} & k\frac{\partial}{\partial y} - m\frac{\partial}{\partial t} & -k\frac{\partial}{\partial x} + l\frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{bmatrix}\right.
$$

$$
\left.\times\begin{bmatrix} k & -l & -m & -n & 0 & 0 & 0 \\ -l & k & 0 & 0 & 0 & -n & m \\ -m & 0 & k & 0 & n & 0 & -l \\ -n & 0 & 0 & k & -m & l & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & -m \\ -n & 0 & l \\ m & -l & 0 \\ k - \frac{l^2}{k} & -\frac{lm}{k} & -\frac{ln}{k} \\ -\frac{lm}{k} & k - \frac{m^2}{k} & -\frac{mn}{k} \\ -\frac{ln}{k} & -\frac{mn}{k} & k - \frac{n^2}{k} \end{bmatrix}.
$$

Таким образом, дополнительное соотношение (22) принимает вид

$$
-\left(k\frac{\partial}{\partial t} - l\frac{\partial}{\partial x} - m\frac{\partial}{\partial y} - n\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathscr{V} + \Omega\mathscr{V} = 0.
$$

Тем самым равенство (11) обосновано.

По предположению при $t = 0$ выполнено (6) и, как доказано на первом этапе, также выполнено (7). Значит, в силу (15) и (17) при $t = 0$ будет $\mathscr{V} = 0$. Проинтегрировав уравнение (11) при нулевом начальном условии, получим, что $\mathscr{V} = 0$ и при $t > 0$. Равенство $\mathscr{V} = 0$ в силу (16) и (17) эквивалентно равенству $H\mathscr{W} = 0$, что, в свою очередь, эквивалентно равенству

$$
H[\mathscr{W} - F] = 0. \tag{23}
$$

Написав равенство (23) под равенством (10), выводим

$$
\mathscr{A}[\mathscr{W}-F] \equiv \begin{bmatrix} k & -l & -m & -n & 0 & 0 & 0 \\ -l & k & 0 & 0 & 0 & -n & m \\ -m & 0 & k & 0 & n & 0 & -l \\ -n & 0 & 0 & k & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & n & -m & k & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & l & 0 & k & 0 \\ 0 & m & -l & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_t - u_x - v_y - w_z - f \\ u_t - p_x \\ v_t - p_y \\ w_t - p_z \\ w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} = 0,
$$

из которого в силу невырожденности матрицы $\mathscr{A}$ вытекает, что

$$
\mathscr{W} - F \equiv \begin{bmatrix} p_t - u_x - v_y - w_z - f \\ u_t - p_x \\ v_t - p_y \\ w_t - p_z \\ w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} = 0.
$$

Тем самым мы доказали соотношения (7), (8).

Теорема доказана.

Покажем, как доказанные утверждения о связи между решениями волнового уравнения (1) гиперболической системы (3) переносятся на случай краевой задачи, удовлетворяющей условию Лопатинского.

Пусть волновое уравнение (1) рассматривается в области

$$t > 0, \quad x > 0, \quad -\infty < y, z < \infty,$$

при $x = 0$ поставлено граничное условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a\frac{\partial \Phi}{\partial x} + b\frac{\partial \Phi}{\partial y} + c\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \tag{24}$$

При $t = 0$ заданы данные Коши.

Граничное условие для системы (3), к которой сведено волновое уравнение (1), естественно записывается в виде

$$p + au + bv + cw = 0 \quad \text{при } t = 0. \tag{25}$$

В работах [1–3] показано, что если смешанная задача для волнового уравнения (1), (24) удовлетворяет равномерному условию Лопатинского, то параметры k, l, m, n в системе (3) можно выбрать так, что граничное условие (25) для системы (3) будет строго диссипативным, т. е.

$$(BU, U) \equiv \left(\begin{bmatrix} l & -k & 0 & 0 \\ -k & l & m & n \\ 0 & m & -l & 0 \\ 0 & n & 0 & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right) < 0$$

при $p + au + bv + cw = 0$, $U \neq 0$. Будем считать, что выбор параметров k, l, m, n обеспечивает диссипативность граничного условия (25).

Можно показать, что в таком случае $l > 0$. Это следует из того, что при $l \leq 0$ (условия (4) тоже, разумеется, выполнены) матрица B имеет только одно отрицательное собственное значение и, значит, для обеспечения строгой диссипативности требовалось бы два граничных условия (а не одно).

Поэтому при интегрировании дополнительного соотношения (11) не требуется граничного условия при $x = 0$, что позволяет обобщить доказанную теорему и на случай граничной задачи (1), (24).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gordienko V. M.* Un probleme mixte pair l'eqution vectorielle des ondes: Cas de dissipation de l'energie; Cas mal poses // C. r. Acad. Sci. 1979. V. 288, N 10. P. 547–550.
2. *Гордиенко В. М.* Симметризация смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка с двумя пространственными переменными // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 2. С. 84–104.
3. *Малышев А. Н.* Смешанная задача для гиперболического уравнений второго порядка с комплексным граничным условием первого порядка // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 6. С. 102–121.

Статья поступила 9 октября 2007 г.

Гордиенко Валерий Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gordienk@math.nsc.ru