Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 510.5:510.225

ОБ ОДНОЙ СВОДИМОСТИ НА ДОПУСТИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

В. Г. Пузаренко

Аннотация. Рассматривается одна сводимость на допустимых множествах, сохраняющая определимые предикаты, и описываются элементарные теоретико-решеточные свойства частично упорядоченных множеств эквивалентных относительно этой сводимости классов допустимых множеств. Кроме того, приводится преобразование, сопоставляющее каждому допустимому множеству эквивалентную ему наследственно конечную надстройку и сохраняющее следующий список дескриптивных свойств (с учетом сложности классов определимой иерархии): перечислимости, квазипроецируемости, униформизации, существования универсальной функции, отделимости и тотальной продолжимости. Вводится понятие скачка допустимого множества, транслирующего вышеприведенные дескриптивные свойства в соответствующие с понижением сложности классов на единицу.

Ключевые слова: вычислимо перечислимое множество, сводимость по перечислимости, Σ-сводимость, принципы дескриптивной теории множеств, допустимое множество, наследственно конечная надстройка, натуральный ординал.

В работе [1] вводится понятие Σ-сводимости между допустимыми множествами, сохраняющей Σ-теорию. Основным ее достоинством (так же, как и ее недостатком) является сохранение структурных свойств допустимого множества таких, как высота допустимого множества и строение элементов. В данной работе изучается сводимость, сохраняющая только Σ-теорию, но не структурные особенности. Здесь именно эта сводимость будет называться Σ-сводимостью. Данная сводимость впервые введена в [2]. Как оказалось, для изучения многих свойств такой сводимости достаточно рассматривать только наследственно конечные надстройки — наименьшие по включению допустимые множества. В данной работе показано, что для любого допустимого множества существует эквивалентная ему наследственно конечная надстройка, сохраняющая ряд дескриптивных свойств, в частности, принцип редукции и существование Σ-функции, универсальной для класса всех одноместных частичных Σ-функций. Как следствие этого преобразования приводится серия теоретико-решеточных свойств сводимости. Основной результат и следствия из него анонсированы в [3] (в настоящей работе улучшена сигнатурная оценка). Им был посвящен пленарный доклад на конференции «Мальцевские чтения-2004».

Теоретико-решеточные и структурные свойства данной сводимости изучались ранее в [4–7]. Как оказалось, предложенная сводимость на счетных допустимых множествах ведет себя так же, как и сводимость, введенная в [8]. На

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 06–01–04002–ННИОа, 05–01–00481), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–4787.2006.1) и Российского фонда содействия отечественной науке.

© **2009 Пузаренко В. Г.**

классах допустимых множеств произвольной мощности она себя ведет так же, как и сводимость, предложенная в [9].

Вводится также понятие скачка, понижающего сложность предикатов на единицу и транслирующего ряд дескриптивных свойств.

1. Предварительные сведения

1.1. О вычислимости и e-сводимости. Основные сведения по теории вычислимости можно найти, например, в [10, 11]. Здесь подробно остановимся лишь на тех определениях и обозначениях, которые приняты в данной работе.

Символ $\leftrightharpoons$ будем использовать для равенства по определению.

Записи $f : A \hookrightarrow B$ и $f : A \twoheadrightarrow B$ будут означать, что отображение f является инъективным и сюръективным соответственно.

Через ω будем обозначать множество натуральных чисел.

Пусть $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ — вычислимая функция, осуществляющая взаимно однозначное соответствие между парами натуральных чисел и натуральными числами.

Под *сочленением* $A \oplus B$ мы, как обычно, понимаем множество

$$\{2x \mid x \in A\} \cup \{2x + 1 \mid x \in B\}.$$

Через $\mathcal{P}(X)$ будем обозначать множество всех подмножеств множества X.

Часто функции будем отождествлять с их графиками. Если φ — частичная функция, то через $\delta\varphi$ и $\rho\varphi$ будем обозначать область определения и множество значений данной функции соответственно, через Γ_φ — график функции φ.

Под сводимостью по перечислимости (сокращенно, *e-сводимостью*), как обычно, понимаем сводимость на множествах натуральных чисел, обозначаемую $\leq_e$ и определяемую как

$$A \leq_e B \Leftrightarrow \forall t\, (t \in A \Leftrightarrow \exists D\, (\langle\!\langle t, D \rangle\!\rangle \in W \;\&\; D \subseteq B))$$

для некоторого вычислимо перечислимого множества W (здесь D — конечное подмножество натуральных чисел, которое можно отождествить с его номером в сильной таблице).

Отношение $\leq_e$ является отношением предпорядка на $\mathcal{P}(\omega)$, которое естественным образом индуцирует отношение частичного порядка на множестве e-степеней ${}^{\mathcal{P}(\omega)}/_{\equiv_e}$, где $A \equiv_e B \Leftrightarrow A \leq_e B \& B \leq_e A$. Для заданного $A \subseteq \omega$ через $d_e(A)$ обозначим e-степень, содержащую A. Отметим, что множество e-степеней образует относительно ассоциированного отношения частичного порядка верхнюю полурешетку с наименьшим элементом (которую будем обозначать через $\mathcal{L}_e$), причем $d_e(A) \sqcup d_e(B) = d_e(A \oplus B)$, где $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$ — точная верхняя грань e-степеней $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а наименьший элемент $\mathbf{0}$ — e-степень всех вычислимо перечислимых множеств.

Пусть $\mathcal{L} = \langle \mathrm{L}, \leq, \sqcup, \mathbf{0} \rangle$ — верхняя полурешетка с нулем. Непустое семейство $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{L}$ назовем *идеалом* $\mathcal{L}$, если выполнены следующие условия:

1) $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \,\&\, \mathbf{b} \in \mathrm{I} \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathrm{I}$;

2) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{I} \Rightarrow \mathbf{a} \sqcup \mathbf{b} \in \mathrm{I}$.

Идеал I называется *главным*, если существует $\mathbf{b} \in \mathrm{I}$, порождающий идеал I, т. е. $\mathrm{I} = \{\mathbf{c} \in \mathrm{L} \mid \mathbf{c} \leq \mathbf{b}\}$ (такой идеал будем обозначать через $\widehat{\mathbf{b}}$). В противном случае идеал I называется *неглавным*.

Через $\mathcal{J}(\mathcal{L})$ обозначим множество всех идеалов верхней полурешетки $\mathcal{L}$. Отметим, что данное множество образует решетку (относительно отношения $\subseteq$

и операций $\mathrm{I}_1 \sqcup^* \mathrm{I}_2 \leftrightharpoons \{x \in \mathrm{L} \mid \exists i_1 \in \mathrm{I}_1, \exists i_2 \in \mathrm{I}_2[x \le i_1 \sqcup i_2]\}$, $\mathrm{I}_1 \sqcap^* \mathrm{I}_2 \leftrightharpoons \mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2$) с наименьшим и наибольшим элементами ($\{\mathbf{0}\}$ и L соответственно).

Верхняя полурешетка $\mathcal{L} = \langle \mathrm{L}, \le, \sqcup, \mathbf{0} \rangle$ с нулем называется *дистрибутивной*, если для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1 \in \mathrm{L}$ таких, что $\mathbf{a} \le \mathbf{b}_0 \sqcup \mathbf{b}_1$, найдутся $\mathbf{c}_0, \mathbf{c_1} \in \mathrm{L}$ такие, что $\mathbf{a} = \mathbf{c}_0 \sqcup \mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_0 \le \mathbf{b}_0$, $\mathbf{c}_1 \le \mathbf{b}_1$.

Для заданного $A \subseteq \omega$ положим

$$K(A) \rightleftharpoons \{x \in \omega \mid x \in \Phi_x(A)\}, \quad J(A) \rightleftharpoons K(A) \oplus (\omega \setminus K(A)).$$

Если $A \in \mathbf{a}$, то $\mathbf{a}' \rightleftharpoons d_e(J(A))$ называется *e-скачком* степени $\mathbf{a}$.

Для каждого $\mathrm{I} \in \mathcal{J}(\mathcal{L}_e)$ положим $\mathrm{I}^* \rightleftharpoons \{S \subseteq \omega \mid d_e(S) \in \mathrm{I}\}$.

1.2. Элементы теории допустимых множеств. Будем придерживаться терминологии, принятой в [12, 13]. Здесь приведем лишь основные понятия, конструкции и необходимые утверждения из [5].

Допустимые множества будем обозначать символами $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, … (возможно, с индексами), а их носители — через A, B, C, … (с теми же индексами) соответственно. Под *допустимым множеством* $\mathbb{A}$ будем понимать KPU-модель, у которой отношение $\in$ вполне упорядочивает множество $\mathrm{Ord}\,\mathbb{A}$ всех ординалов данной модели. На допустимом множестве определяются понятия вычислимо перечислимого (вычислимого) множества как множества, определимого Σ-формулой (Σ- и Π-формулами одновременно). Вычислимо перечислимые (вычислимые) подмножества называются Σ- (Δ-) *подмножествами*. Семейства всех n-арных Σ- и Δ-предикатов допустимого множества $\mathbb{A}$ будем обозначать через $\Sigma(\mathbb{A}^n)$ и $\Delta(\mathbb{A}^n)$ соответственно. При $n = 1$ индекс будем опускать.

Важный класс допустимых множеств составляют наследственно конечные надстройки. Индуктивно $HF(M)$ можно определить следующим образом:

$$HF_0(M) = M;\ HF_{n+1}(M) = HF_n(M) \cup \mathcal{P}_\omega(HF_n(M));\ HF(M) = \bigcup_{n<\omega} HF_n(M),$$

где $\mathcal{P}_\omega(X)$ — множество всех конечных подмножеств множества X. Если $\mathfrak{M}$ — модель предикатной сигнатуры σ и $\sigma \cap \{\varnothing, \in^2, U_0^1\} = \varnothing$, то на $HF(M)$ можно определить естественным образом модель $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ сигнатуры $\sigma^* = \sigma \cup \{\varnothing, \in^2, U_0^1\}$, называемую *наследственно конечной надстройкой над моделью* $\mathfrak{M}$ такую, что будет выполняться $U_0^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = M$.

В дальнейшем будем подразумевать, что все рассматриваемые допустимые множества только конечной сигнатуры.

Отметим, что множество $\omega \subseteq \mathrm{Ord}\,\mathbb{A}$ является Δ-подмножеством любого допустимого множества $\mathbb{A}$. В [5] дано описание всех семейств подмножеств натуральных чисел, которые реализуются в качестве семейств Σ-подмножеств ω.

Теорема 1.1. 1. *В любом допустимом множестве* $\mathbb{A}$ *семейство* Σ*-подмножеств* ω *представимо в виде* I^* *для некоторого e-идеала* I.

2. *Для любого e-идеала* I *существует модель* $\mathfrak{M}$ *такая, что* I^* *совпадает с семейством всех* Σ*-подмножеств* ω *в* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. *Кроме того, эту модель можно выбрать так, что* $\mathrm{card}(\mathfrak{M}) = \mathrm{card}(\mathrm{I}^*)$.

Через $\mathcal{I}_e(\mathbb{A})$ обозначим множество $\{d_e(B) \mid B \subseteq \omega,\ B \in \Sigma(\mathbb{A})\}$. Данный идеал иногда будем называть *идеалом допустимого множества* $\mathbb{A}$.

Семейство $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ назовем *вычислимым в* $\mathbb{A}$, если $S \cup \{\varnothing\} = \{\Phi^{\mathbb{A}}[a, x] \mid a \in A\}$ для некоторой Σ-формулы $\Phi(x_0, x_1)$. Через $\mathcal{S}_\omega(\mathbb{A})$ обозначим класс всех вычислимых в $\mathbb{A}$ семейств подмножеств ω.

Приведем определения некоторых сводимостей на допустимых множествах.

(Ю. Л. Ершов) Будем говорить, что модель $\mathfrak{M} = \langle M, P_1, \ldots, P_k\rangle$ Σ-*определима* в допустимом множестве $\mathbb{A}$ (и обозначать как $\mathfrak{M} \leq_\Sigma \mathbb{A}$), если существует отображение $\nu : A \twoheadrightarrow M$, для которого $\nu^{-1}(=)$, $\nu^{-1}(P_1)$, $\ldots$, $\nu^{-1}(P_k)$ являются Δ-предикатами на $\mathbb{A}$. Данное понятие является обобщением понятия вычислимой (или конструктивной) модели.

(А. С. Морозов) Будем говорить, что допустимое множество $\mathbb{A}$ $\mathbb{HYP}$-*сводится* к допустимому множеству $\mathbb{B}$ (и обозначать как $\mathbb{A} \sqsubseteq_{\mathbb{HYP}} \mathbb{B}$), если существует отображение ν, осуществляющее Σ-определимость $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$, для которого найдется бинарный Σ-предикат R на $\mathbb{B}$ такой, что $\mathrm{pr}_1^2(R) = B$ и $\langle a, b\rangle \in R \Rightarrow \nu(a) = \{\nu(z) \mid z \in b\}$ для любых $a, b \in B$. На самом деле в [1] рассматривается сводимость только на допустимых множествах специального вида, в которых достаточно ограничиться Σ-функцией вместо бинарного Σ-предиката. Данная сводимость сильнее Σ-определимости, а именно $\mathbb{A} \sqsubseteq_{\mathbb{HYP}} \mathbb{B}$ влечет $\mathbb{A} \leq_\Sigma \mathbb{B}$, причем обратное в общем случае не выполняется [1]. В [1] данная сводимость называется Σ-сводимостью, однако в этой работе под Σ-сводимостью будет пониматься некоторая сводимость, промежуточная для вышеуказанных.

Как обычно, под упорядоченной парой $\langle a, b\rangle$ будем понимать множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$; $\langle\,\rangle \leftrightharpoons \varnothing$, $\langle a_1\rangle \leftrightharpoons a_1$, $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \leftrightharpoons \langle a_1, \langle a_2, \ldots, a_n\rangle\rangle$ при $n \geq 2$; $\mathrm{pr}_i^n(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle) \leftrightharpoons a_i$, $i \leq n$.

В работе символом $\square$ обозначается конец доказательства. Рассуждения, не попавшие в доказательство, могут быть легко восстановлены читателем или аналогичны предложенным автором.

2. О допустимых множествах

Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Определим иерархию семейства определимых предикатов на $\mathbb{A}$:

- $R \in \Sigma_1^{\mathbb{A}}$, если и только если R — Σ-предикат на $\mathbb{A}$;
- $R \in \Sigma_{n+1}^{\mathbb{A}}$, если и только если $R = \{\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \mid \exists y Q(y, x_1, \ldots, x_m)\}$ для некоторых $m \geq 1$ и $Q \in \Pi_n^{\mathbb{A}}$, $n \geq 1$;
- $R \in \Pi_n^{\mathbb{A}}$, если и только если $\neg R \in \Sigma_n^{\mathbb{A}}$, $n \geq 1$;
- $\Delta_n^{\mathbb{A}} \leftrightharpoons \Sigma_n^{\mathbb{A}} \cap \Pi_n^{\mathbb{A}}$, $n \geq 1$.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Тогда между классами иерархии определимых предикатов на $\mathbb{A}$ выполняются следующие соотношения:*

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma_1^{\mathbb{A}} \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \Sigma_2^{\mathbb{A}} \;\ldots \\
\Delta_1^{\mathbb{A}} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \Delta_2^{\mathbb{A}} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & \\
 & \Pi_1^{\mathbb{A}} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \Pi_2^{\mathbb{A}} \;\ldots
\end{tikzcd}$$

Более того, все включения строгие. Кроме того, для всех $m \geq 1$ справедливы следующие условия:

1) *для всех $n \geq 1$ существует $n+1$-арный $\Sigma_m^{\mathbb{A}}$- ($\Pi_m^{\mathbb{A}}$-) предикат, универсальный для всех n-арных $\Sigma_m^{\mathbb{A}}$- ($\Pi_m^{\mathbb{A}}$-) предикатов;*

2) *для всех $n \geq 1$ не существует $n+1$-арного $\Delta_m^{\mathbb{A}}$-предиката, универсального для всех n-арных $\Delta_m^{\mathbb{A}}$-предикатов;*

3) *$\Sigma_m^{\mathbb{A}}$ замкнут относительно $\wedge$, $\vee$, $\exists x$, $\exists x \in a$ и не замкнут относительно $\neg$;*

4) *$\Pi_m^{\mathbb{A}}$ замкнут относительно $\wedge$, $\vee$, $\forall x$, $\forall x \in a$ и не замкнут относительно $\neg$;*

5) $\Delta_m^{\mathbb{A}}$ *замкнут относительно* $\wedge$, $\vee$, $\neg$;

6) $R(x_1,\dots,x_n) \in \Sigma_m^{\mathbb{A}}$, *если и только если найдется* $Q(y,y_1,\dots,y_n) \in \Delta_m^{\mathbb{A}}$, *для которого* $R = \{\langle a_1,\dots,a_n\rangle \mid \exists y\, Q(y,a_1,\dots,a_n)\}$, $n \geq 1$;

7) $R(x_1,\dots,x_n) \in \Pi_m^{\mathbb{A}}$, *если и только если найдется* $Q(y,y_1,\dots,y_n) \in \Delta_m^{\mathbb{A}}$, *для которого* $R = \{\langle a_1,\dots,a_n\rangle \mid \forall y\, Q(y,a_1,\dots,a_n)\}$, $n \geq 1$.

Будем говорить, что предикат $R \subseteq A^n$, $n \geq 1$, *определим* в $\mathbb{A}$, если $R \in \bigcup\limits_m \Sigma_m^{\mathbb{A}}$. Ниже будут приведены примеры допустимых множеств $\mathbb{A}$, для которых классы $\Sigma_m^{\mathbb{A}}$, $\Pi_m^{\mathbb{A}}$, $\Delta_m^{\mathbb{A}}$, $m \geq 1$, не замкнуты относительно ограниченных кванторов, не указанных в пп. 3–5 теоремы 2.1. Для этого определим вспомогательную иерархию семейства определимых предикатов на $\mathbb{A}$ ($n \geq 1$):

• $\mathcal{S}_n^{\mathbb{A}}$ — наименьший класс множеств, содержащий $\Sigma_n^{\mathbb{A}}$ и замкнутый относительно $\wedge$, $\vee$, $\exists x$, $\exists x \in a$, $\forall x \in a$;

• $R \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{A}}$, если и только если $\neg R \in \mathcal{S}_n^{\mathbb{A}}$;

• $\mathcal{D}_n^{\mathbb{A}} = \mathcal{S}_n^{\mathbb{A}} \cap \mathcal{P}_n^{\mathbb{A}}$.

Из принципа Σ-рефлексии вытекает

Следствие 2.1. $\mathcal{S}_1^{\mathbb{A}} = \Sigma_1^{\mathbb{A}}$, $\mathcal{P}_1^{\mathbb{A}} = \Pi_1^{\mathbb{A}}$, $\mathcal{D}_1^{\mathbb{A}} = \Delta_1^{\mathbb{A}}$ *для любого допустимого множества* $\mathbb{A}$.

Предложение 2.1. *Если допустимое множество* $\mathbb{A}$ *удовлетворяет принципу полной выборки, то* $\mathcal{S}_n^{\mathbb{A}} = \Sigma_n^{\mathbb{A}}$, $\mathcal{P}_n^{\mathbb{A}} = \Pi_n^{\mathbb{A}}$, $\mathcal{D}_n^{\mathbb{A}} = \Delta_n^{\mathbb{A}}$ *для всех* $n \geq 1$.

Следствие 2.2. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— модель конечной сигнатуры. Тогда* $\mathcal{S}_n^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = \Sigma_n^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$, $\mathcal{P}_n^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = \Pi_n^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$, $\mathcal{D}_n^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = \Delta_n^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$ *для всех* $n \geq 1$.

Определим теперь свойства дескриптивной теории множеств на допустимых множествах. Пусть S — семейство предикатов произвольной природы, замкнутое относительно $\cap$, $\cup$, $\times$ и содержащее пустое $\varnothing$ и наибольшее по включению Un множества. Тогда будем говорить, что S удовлетворяет принципу

• *униформизации*, если для любого бинарного предиката $R \in S$ найдется частичная функция φ, $\Gamma_\varphi \in S$, такая, что $\Gamma_\varphi \subseteq R$ и $\delta\varphi = \mathrm{pr}_1^2(R)$;

• *редукции*, если для любых множеств $A_0, A_1 \in S$ найдутся непересекающиеся множества $B_0, B_1 \in S$, для которых $B_i \subseteq A_i$, $i = 0,1$, и $A_0 \cup A_1 = B_0 \cup B_1$;

• *отделимости*, если для любых непересекающихся множеств $A_0, A_1 \in S$ найдется множество $B \in S$ такое, что $Un \setminus B \in S$ и $A_0 \subseteq B$, $A_1 \subseteq Un \setminus B$;

• (*тотальной*) *продолжимости*, если для любой одноместной частичной функции φ, $\Gamma_\varphi \in S$, найдется функция ψ, $\Gamma_\psi \in S$, такая, что $\delta\psi = Un$ и $\Gamma_\varphi \subseteq \Gamma_\psi$;

• *существования универсальной функции для класса* $\mathcal{K}$ одноместных частичных функций (графики всех функций из класса $\mathcal{K}$ содержатся в S), если существует двухместная частичная функция ψ, $\Gamma_\psi \in S$, такая, что $\mathcal{K} = \{\lambda y.\, \psi(a,y) \mid a \in Un\}$.

• Допустимое множество $\mathbb{A}$ назовем Σ_n-*перечислимым* (*посредством* ω), если существует $\Sigma_n^{\mathbb{A}}$-функция f такая, что $\delta f = \omega$ и $\rho f = A$.

• Допустимое множество $\mathbb{A}$ назовем n-*квазипроецируемым* (*в* ω), если существует $\Sigma_n^{\mathbb{A}}$-функция f такая, что $\delta f \subseteq \omega$ и $\rho f = A$.

Данный список свойств будем называть *основным* (здесь будем рассматривать в качестве $\mathcal{K}$ только два класса с графиками из S: всех частичных функций и всех частичных $\{0,1\}$-значных функций).

Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество и P — одно из основных свойств (за исключением двух последних). Будем говорить, что $\mathbb{A}$ удовлетворяет принципу

n-P, если $\Sigma_n^{\mathbb{A}}$ удовлетворяет P, $n \geq 1$. Если P есть квазипроецируемость, то смысл n-P очевиден. В случае, когда P есть перечислимость, n-P означает Σ_n-перечислимость. Свойство Σ_1-перечислимости (в случае, когда вместо ω рассматривается ординал допустимого множества (recursively listed); в нашем случае, как показано ниже, ω и будет таковым) активно исследуется в [13].

Если $n = 1$, то говорят, что $\mathbb{A}$ удовлетворяет принципу P. Для фиксированного n справедливы те же соотношения между свойствами вида n-P, что и при $n = 1$.

Отметим, что если допустимое множество $\mathbb{A}$ проецируемо в ω, то $\mathbb{A}$ квазипроецируемо в ω [13].

Предложение 2.2. *Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество и $n \geq 1$. Тогда*
1) *если $\mathbb{A}$ Σ_1-перечислимо, то $\mathbb{A}$ — наследственно конечная надстройка;*
2) *если $\mathbb{A}$ Σ_n-перечислимо, то $\mathbb{A}$ будет Σ_k-перечислимым для любого $k \geq n$;*
3) *если $\mathbb{A}$ n-квазипроецируемо, то $\mathbb{A}$ Σ_{n+1}-перечислимо;*
4) *если $\mathbb{A}$ Σ_n-перечислимо и $\mathrm{Ord}(\mathbb{A}) > \omega$, то $\bigcup\limits_m \Sigma_m^{\mathbb{A}} = \mathcal{S}_n^{\mathbb{A}}$.*

Доказательство. 1. Допустим, что существует Σ_1-перечислимое допустимое множество $\mathbb{A}$, не являющееся наследственно конечной надстройкой. Тогда найдутся бесконечный элемент $a \in A$ и Σ-функции $f_0 : \omega \twoheadrightarrow A$, $f_1 : a \twoheadrightarrow \omega$. По принципу Σ-замещения для f_1 [13, теорема 4.6] будет $\omega \in A$. Вновь применяя принцип Σ-замещения к функции f_0, получим $A \in A$; противоречие.

4. Следует из того, что любая формула $\forall x \varphi$ в $\mathbb{A}$ эквивалентна
$$\forall k \in \omega \exists x ((f(k) = x) \wedge \varphi),$$
где f — $\Sigma_n^{\mathbb{A}}$-функция, перечисляющая A посредством ω, и k не входит свободно в φ. $\square$

Из предложения 5.2 и [6, теорема 3.1] вытекает, что n-P не влечет в общем случае $(n+1)$-P, где P — свойство отделимости или тотальной продолжимости.

Предложение 2.3. *Пусть $n \geq 1$ и $\mathbb{A}$ — n-квазипроецируемое допустимое множество. Тогда $\mathbb{A}$ не удовлетворяет принципу n-продолжимости.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}$ n-квазипроецируемо. Если $\mathbb{A}$ Σ_n-перечислимо, то существует универсальная $\Sigma_n^{\mathbb{A}}$-функция $f(x, y)$ и $\overline{sg}(f(x, x))$ не будет иметь тотального продолжения в классе $\Sigma_n^{\mathbb{A}}$-функций, где
$$\overline{sg}(x) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } x \neq \varnothing, \\ \{\varnothing\}, & \text{если } x = \varnothing. \end{cases}$$
Пусть теперь $\mathbb{A}$ не Σ_n-перечислимо. Тогда найдется $\Sigma_n^{\mathbb{A}}$-функция $f : R \twoheadrightarrow A$ для некоторого $R \subset \omega$, не имеющая тотального продолжения в классе $\Sigma_n^{\mathbb{A}}$-функций, в противном случае $h \restriction \omega$ была бы $\Sigma_n^{\mathbb{A}}$-функцией, перечисляющей A, где h — тотальное продолжение f. $\square$

В [13] приводится серия примеров допустимых множеств $\mathbb{A}$, проецируемых в $\omega \in \mathbb{A}$. В частности, таким допустимым множеством будет $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})$, где $\mathfrak{N}$ — стандартная модель арифметики. Для данных допустимых множеств будет выполняться условие 4 предложения 2.2.

3. Σ-сводимость: понятие, основные свойства

Определение 3.1. Будем говорить, что допустимое множество $\mathbb{A}$ *Σ-сводится* к допустимому множеству $\mathbb{B}$ (и обозначать как $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$), если существует отображение $\nu : B \twoheadrightarrow A$ такое, что $\nu^{-1}(\Sigma(\mathbb{A}^2)) \subseteq \Sigma(\mathbb{B}^2)$. В этом случае будем говорить, что ν *осуществляет Σ-сводимость* и обозначать через $\nu : \mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$.

Следствие 3.1. *Отношение $\sqsubseteq_\Sigma$ на допустимых множествах рефлексивно и транзитивно.*

Будем говорить, что допустимые множества $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ *Σ-эквивалентны* (и записывать как $\mathbb{A} \equiv_\Sigma \mathbb{B}$), если $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$ и $\mathbb{B} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}$.

Из [1, лемма 1] получаем

Следствие 3.2. *Если $\mathbb{A} \sqsubseteq_{\mathbb{HYP}} \mathbb{B}$, то $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$.*

В обратную сторону утверждение этого следствия не имеет места, что вытекает из [1, предложение 1] и теоремы 3.1.

Следствие 3.3. *Если $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$, то $\mathbb{A} \leq_\Sigma \mathbb{B}$.*

В обратную сторону следствие 3.3 не выполняется. Например, $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N}) \leq_\Sigma \mathbb{HF}(\mathbb{HYP}(\mathfrak{N}))$, но $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N}) \not\sqsubseteq_\Sigma \mathbb{HF}(\mathbb{HYP}(\mathfrak{N}))$ [7].

Классическая вычислимость является наименьшей относительно введенной меры сложности.

Предложение 3.1. *Для любого допустимого множества $\mathbb{A}$ справедливо $\mathbb{HF}(\varnothing) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}$. Следовательно, класс Σ-степеней содержит наименьший элемент относительно отношения Σ-сводимости.*

Предложение 3.2. *Пусть $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ — допустимые множества. Тогда $\nu : \mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$, если и только если $\nu^{-1}(\Sigma(\mathbb{A}^n)) \subseteq \Sigma(\mathbb{B}^n)$ для любого $n < \omega$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) при $n = 2$ следует из определения, а при $n = 1$ — из того, что Σ-предикаты замкнуты относительно взятия проекций и декартовых произведений. Пусть $n > 2$ и $C \in \Sigma(\mathbb{A}^n)$. Обозначим через $C'(\in \Sigma(\mathbb{A}^2))$ предикат $\{\langle\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle \mid C(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\}$. Тогда из того, что проекция на i-ю координату $\mathrm{pr}_i^{n-1}(x)$, $1 \leq i < n$, — Σ-функция на $\mathbb{A}$, определенная на A^{n-1}, следует, что $\nu^{-1}(C) = \Bigg\{\langle y'_1, \dots, y'_{n-1}, y_2\rangle \mid \exists y_1 \Bigg(\bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} \big(\mathrm{pr}_i^{n-1}(\nu(y_1)) = \nu(y'_i)\big) \wedge (\nu(y_1) \in A^{n-1}) \wedge C'(\nu(y_1), \nu(y_2))\Bigg)\Bigg\}$ — Σ-предикат на $\mathbb{B}$. $\square$

Следующее предложение получается из предыдущего индукцией по кванторной сложности.

Предложение 3.3. *Пусть $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ — допустимые множества. Тогда $\nu : \mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$, если и только если*

$$\nu^{-1}\big(\Sigma_m^{\mathbb{A}}\big) \subseteq \Sigma_m^{\mathbb{B}}, \quad \nu^{-1}\big(\Pi_m^{\mathbb{A}}\big) \subseteq \Pi_m^{\mathbb{B}}, \quad \nu^{-1}\big(\Delta_m^{\mathbb{A}}\big) \subseteq \Delta_m^{\mathbb{B}}$$

для любого $m \geq 1$ с сохранением местности предикатов.

Лемма 3.1. *Если $\nu : \mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$, то $R_0 = \{\langle x, n\rangle \mid n \in \omega \subseteq \mathrm{Ord}(\mathbb{B}),\ \nu(x) = n\}$ — Δ-предикат на $\mathbb{B}$.*

Доказательство. Данный предикат может быть определен Σ-рекурсией:

$$\langle x, 0\rangle \in R_0 \Leftrightarrow \nu(x) = \varnothing \Leftrightarrow \neg(\nu(x) \neq \varnothing);$$

$$\langle x, n+1\rangle \in R_0 \Leftrightarrow \exists x'(\langle x', n\rangle \in R_0 \wedge \nu(x') + 1 = \nu(x));$$

$$\langle x, n+1\rangle \notin R_0 \Leftrightarrow \urcorner\mathrm{Nat}(\nu(x)) \vee (\nu(x) = \varnothing) \vee \exists x'(\langle x', n\rangle \notin R_0 \wedge (\nu(x') + 1 = \nu(x)));$$

где $\mathrm{Nat}(a) \leftrightharpoons$«$a$ — натуральный ординал». □

Следствие 3.4. *Если $\nu : \mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$, то $R_1 = \{\langle x, n\rangle \mid n \in \omega \subseteq \mathrm{Ord}(\mathbb{B}),\ \nu(x) \in A^n\}$ — Δ-предикат на $\mathbb{B}$.*

Предложение 3.4. *Если $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$, то $\mathcal{S}_\omega(\mathbb{A}) \subseteq \mathcal{S}_\omega(\mathbb{B})$. В частности, $\mathcal{I}_e(\mathbb{A}) \leq \mathcal{I}_e(\mathbb{B})$.*

Доказательство. Пусть $\varnothing \neq S \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ — вычислимое в $\mathbb{A}$ семейство и $Q \in \Sigma(\mathbb{A}^2)$ таково, что $S = \{\{n \mid Q(a, n)\} \mid a \in A\}$. Тогда $\nu^{-1}(Q) \in \Sigma(\mathbb{B}^2)$, где ν из определения Σ-сводимости. Нетрудно проверить, что

$$S = \{\{n \mid \exists y(\langle y, n\rangle \in R_0 \wedge \langle \nu(b), \nu(y)\rangle \in Q)\} \mid b \in B\},$$

где R_0 — Δ-предикат на $\mathbb{B}$ из леммы 3.1. □

Следующее утверждение непосредственно вытекает из конструкции уплощения [12], а кроме того, из доказательства предложения 1.2 в [4].

Предложение 3.5. *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель конечной сигнатуры и $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Тогда $\mathfrak{M} \leq_\Sigma \mathbb{A}$, если и только если $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}$.*

Теорема 3.1. *Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Тогда существует ориентированный граф $\mathfrak{M}_\mathbb{A}$ без петель с носителем A, удовлетворяющий следующим условиям ($n \geq 1$):*

1) $\mathbb{A} \equiv_\Sigma \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathbb{A})$;

2) $\mathbb{A}$ *удовлетворяет принципу n-P, если и только если $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathbb{A})$ также удовлетворяет n-P, где P — одно из основных свойств.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, а U — Σ-предикат на $\mathbb{A}$, универсальный для класса всех унарных Σ-предикатов. В силу принципа Σ-рефлексии существует трехместный Δ_0-предикат U', для которого $\mathbb{A} \models U(x, y) \equiv \exists u U'(x, u, y)$. Обозначим через Pair и Triple множества «конечных» функций f на $\mathbb{A}$ с $\delta f = \mathbf{2}$ и $= \mathbf{3}$ соответственно. Определим предикат V следующим образом:

$$V(a, b) \leftrightharpoons \begin{cases} \mathrm{Pair}(b), & \text{если } a = \mathbf{0}, \\ \mathrm{Triple}(b) \wedge (b(\mathbf{0}) = \mathbf{0}), & \text{если } a = \mathbf{1}, \\ \mathrm{Triple}(b) \wedge (b(\mathbf{0}) = \mathbf{1}), & \text{если } a = \mathbf{2}, \\ \mathrm{Triple}(b) \wedge (b(\mathbf{1}) = a(\mathbf{0}))\wedge & \\ \qquad (b(\mathbf{2}) = a(\mathbf{1})), & \text{если } \mathrm{Pair}(a), \\ a(\mathbf{1}) = b, & \text{если } \mathrm{Triple}(a) \wedge (a(\mathbf{0}) = \mathbf{0}), \\ a(\mathbf{2}) = b, & \text{если } \mathrm{Triple}(a) \wedge (a(\mathbf{0}) = \mathbf{1}), \\ U'(a(\mathbf{1}), a(\mathbf{2}), b), & \text{если } \mathrm{Triple}(a) \wedge \mathrm{Pair}(a(\mathbf{0}))\wedge \\ & \qquad (a(\mathbf{0})(\mathbf{0}) = b). \end{cases}$$

Теперь определим модель $\mathfrak{M}_\mathbb{A}$ как $\langle A, V\rangle$. Очевидно, что $\mathfrak{M}_\mathbb{A}$ будет ориентированным графом без петель.

Покажем, что данная модель удовлетворяет и остальным утверждениям теоремы.

1. Нетрудно понять, что V будет Δ-предикатом на $\mathbb{A}$, а следовательно, $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}} \leq_\Sigma \mathbb{A}$. По предложению 3.5 $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}$. Для того чтобы убедиться в обратной сводимости, достаточно показать, что Σ-предикат U будет Σ-предикатом на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})$, а также Σ-функции $a(\mathbf{0})$, $a(\mathbf{1})$ на $\mathbb{A}$, определенные на Pair, будут Σ-функциями на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})$:

$$a(\mathbf{0}) = b \Leftrightarrow (V(\mathbf{0}, a) \wedge \exists x(V(a, x) \wedge (V(\mathbf{1}, x) \wedge V(x, b)))),$$

$$a(\mathbf{1}) = b \Leftrightarrow (V(\mathbf{0}, a) \wedge \exists x(V(a, x) \wedge (V(\mathbf{2}, x) \wedge V(x, b)))),$$

$$U(x, y) \Leftrightarrow \exists u \exists z(V(\mathbf{0}, z) \wedge ((z(\mathbf{0}) = x) \wedge ((z(\mathbf{1}) = u) \wedge \\ \exists a(V(z, a) \wedge (\neg V(\mathbf{1}, a) \wedge (\neg V(\mathbf{2}, a) \wedge V(a, y))))))).$$

2. Если $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})$ удовлетворяет n-P, где $n \geq 1$, а P — свойство редукции, униформизации, отделимости или тотальной продолжимости, то из представления Σ-сводимости $\mathbb{A}$ к $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})$ следует, что $\mathbb{A}$ также удовлетворяет принципу n-P. В обратную сторону для вышеприведенных свойств рассмотрим только принцип отделимости. Сначала приведем вспомогательную конструкцию.

Лемма 3.2. *Существует вложение $\imath : HF(A) \hookrightarrow A$, являющееся Σ-функцией на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})$, такое, что $\imath(HF(A)) \in \Delta(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}))$.*

Доказательство леммы 3.2. Из доказательства теоремы 1 в [14] следует существование частичной Σ-функции $\mathrm{Term} : \mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})) \times A^{<\omega} \twoheadrightarrow HF(A)$, область определения которой является Δ-предикатом, а прообраз каждого элемента относительно данной функции конечен. К тому же эта функция действует взаимно однозначно по первой координате. Кроме того, если $\mathrm{Term}(n, a) = x$, то $\mathrm{sp}(a) = \mathrm{sp}(x)$ и координаты кортежа a попарно различны. Более точно, существует сильно вычислимая последовательность конечных групп $\{S_n\}_{n<\omega}$ такая, что $\mathrm{Term}(n, a) = \mathrm{Term}(n, b)$, если и только если найдется перестановка $\pi \in S_n$, для которой $\pi(a) = b$. Определим $\imath$ по следующему правилу: пусть x, n, $a \in HF(A)$ таковы, что $x = \mathrm{Term}(n, a)$; тогда положим $\imath(x) = \langle n, \{\pi(a) \mid \pi \in S_n\}\rangle \in A$. Нетрудно убедиться в том, что $\imath$ — Σ-функция на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})$ с желаемыми свойствами. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 3.1. Пусть допустимое множество $\mathbb{A}$ удовлетворяет принципу n-отделимости. Докажем, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})$ также удовлетворяет этому принципу. Возьмем непересекающиеся $\Sigma_n^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})}$-подмножества A_0 и A_1. Тогда для $\imath(A_0)$ и $\imath(A_1)$ найдется $\Delta_n^{\mathbb{A}}$-подмножество B, для которого $\imath(A_0) \subseteq B \subseteq \overline{\imath(A_1)}$. Осталось убедиться в том, что $\imath^{-1}(B)$ — $\Delta_n^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})}$-подмножество и $A_0 \subseteq \imath^{-1}(B) \subseteq \overline{A_1}$.

Пусть $\varphi(x, y)$ — универсальная $\Sigma_n^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})}$-функция. Тогда

$$\psi(x, y) \leftrightharpoons \begin{cases} \varphi(\imath^{-1}(x), y), & \text{если } y \in A,\ \varphi(\imath^{-1}(x), y) \downarrow \in A, \\ \uparrow & \text{в противном случае} \end{cases}$$

будет универсальной $\Sigma_n^{\mathbb{A}}$-функцией. Далее, если $f(x, y)$ — универсальная $\Sigma_n^{\mathbb{A}}$-функция, то $g(x, y) \leftrightharpoons \imath^{-1}(f(x, \imath(y)))$ будет универсальной $\Sigma_n^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})}$-функцией.

Если $\mathbb{A}$ Σ_n-перечислимо, то существует $\Sigma_n^{\mathbb{A}}$-функция $f : \omega \twoheadrightarrow A$. С помощью лемм 3.2 и 3.1 нетрудно построить $\Sigma_n^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})}$-функцию, перечисляющую $HF(A)$. $\square$

Замечание 3.1. Модель $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}$ из доказательства теоремы 3.1 не зависит от выбора универсального предиката U. А именно, если U_1, U_2 — универсальные Σ-предикаты для семейства всех бинарных Σ-предикатов, то $\mathrm{id} : \mathbb{HF}(\langle A, V_1\rangle) \equiv_\Sigma \mathbb{HF}(\langle A, V_2\rangle)$, где V_i построена по предикату U_i, как в доказательстве теоремы 3.1 при $i = 0, 1$ (также независимо от выбора Δ_0-предиката U'_i, $i = 0, 1$).

Отметим, что улучшить сигнатурную оценку в условии теоремы 3.1 для модели $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}$ не удастся, поскольку все модели сигнатуры, состоящей из конечного числа одноместных предикатных символов, будут локально конструктивизируемыми.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ — допустимые множества. Тогда $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$, если и только если $\mathfrak{M} \leq_\Sigma \mathbb{A}$ влечет $\mathfrak{M} \leq_\Sigma \mathbb{B}$ для любой модели $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$ и $\mathfrak{M} \leq_\Sigma \mathbb{A}$, то по предложению 3.5 $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}$, а по транзитивности $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$. Вновь по предложению 3.5 $\mathfrak{M} \leq_\Sigma \mathbb{B}$. ($\Leftarrow$) По теореме 3.1 и предложению 3.5 $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}} \leq_\Sigma \mathbb{A}$. Следовательно, $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}} \leq_\Sigma \mathbb{B}$. Вновь воспользовавшись теоремой 3.1, предложением 3.5 и транзитивностью Σ-сводимости, получаем $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$. $\square$

4. Σ-скачок: определение, основные свойства

Определим теперь Σ-*скачок* произвольного допустимого множества $\mathbb{A}$. Через $\mathcal{J}(\mathbb{A})$ обозначим $\mathbb{HF}(\langle A, U\rangle)$, где $U \subseteq A^3$ — Σ-предикат на $\mathbb{A}$, универсальный для класса всех бинарных Σ-предикатов. Допустимое множество $\mathcal{J}(\mathbb{A})$ назовем Σ-*скачком* допустимого множества $\mathbb{A}$.

Замечание 4.1. Операция Σ-скачка задана корректно. А именно, если U_1, U_2 — Σ-предикаты на $\mathbb{A}$, универсальные для семейства всех бинарных Σ-предикатов на $\mathbb{A}$, то $\mathrm{id} : \mathbb{HF}(\langle A, U_1\rangle) \equiv_\Sigma \mathbb{HF}(\langle A, U_2\rangle)$.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, а $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}$ — модель, построенная для доказательства теоремы* 3.1. *Тогда $\Sigma_{n+1}^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})} = \Sigma_n^{\mathcal{J}(\mathbb{A})}$ для любого $n < \omega$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}} = \langle A, V\rangle$, $\mathcal{J}(\mathbb{A}) = \mathbb{HF}(\langle A, U\rangle)$ — модели из условия. Ввиду замечаний 3.1, 4.1 можно считать, что $U = \{\langle a, b(\mathbf{0}), b(\mathbf{1})\rangle \mid \mathbb{A} \models \exists u V(\{\langle \mathbf{0}, \{\langle \mathbf{0}, b\rangle, \langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle\}\rangle, \langle \mathbf{1}, a\rangle, \langle \mathbf{2}, u\rangle\}, b) \wedge \mathrm{Pair}(b)\}$.

Докажем сначала при $n = 1$. Пусть $B \subseteq A^k$ определимо Σ-формулой $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ в $\mathcal{J}(\mathbb{A})$, $k \geq 1$. Можно считать, что все отрицания встречаются в ней только при атомарных формулах, а импликативные связки отсутствуют. Тогда по принципу полной выборки для $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})$ формула $[\Phi]^U_\Psi$ эквивалентна некоторой Σ_2-формуле в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})$, где Ψ — Σ-формула сигнатуры $\{V\}$, для которой $\mathcal{J}(\mathbb{A}) \models U(x, y, z) \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}) \models \Psi(x, y, z)$. Обратно, пусть C — Σ_2-подмножество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})$. Тогда $\imath(C) \subseteq A$ будет также Σ_2-подмножеством $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})$ (операция $\imath$ определена в лемме 3.2), поэтому найдется Σ-формула $\Theta(x, y)$, для которой $\imath(C) = \{a \mid \mathbb{A} \models \exists u \neg\Theta(u, a)\}$, по предложению 3.3. Ввиду универсальности предиката U, найдется $a_0 \in A$ такой, что $\mathbb{A} \models \Theta(u, a) \equiv U(a_0, u, a)$, следовательно, $\imath(C) \in \Sigma(\mathcal{J}(\mathbb{A}))$, а вместе с ним и $C = \imath^{-1}(\imath(C)) \in \Sigma(\mathcal{J}(\mathbb{A}))$. Случай остальных Σ_2-предикатов сводится к рассмотренному, поскольку функции проекций являются Σ-функциями как на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}})$, так и на $\mathcal{J}(\mathbb{A})$.

Для завершения доказательства осталось применить индукцию. $\square$

Из леммы 4.1 и транзитивности отношения Σ-сводимости следует

Теорема 4.1. *Пусть $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ — допустимые множества. Тогда справедливы следующие условия:*

1) $\mathbb{B} \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{J}(\mathbb{A})$, если и только если найдется $\nu_0 : A \twoheadrightarrow B$ такое, что $\nu_0^{-1}(\Sigma_1^{\mathbb{B}}) \subseteq \Sigma_2^{\mathbb{A}}$ с учетом местности;

2) $\mathcal{J}(\mathbb{A}) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$, если и только если найдется $\nu_1 : B \twoheadrightarrow A$ такое, что $\nu_1^{-1}(\Sigma_2^{\mathbb{A}}) \subseteq \Sigma_1^{\mathbb{B}}$ с учетом местности.

Из леммы 4.1 и теоремы 3.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Тогда $\mathbb{A}$ удовлетворяет $(n+1)$-P, если и только если $\mathcal{J}(\mathbb{A})$ удовлетворяет n-P, где P — одно из основных свойств, а $n \geq 1$.*

Как и в классическом случае, для операции Σ-скачка справедливы следующие условия:

1) $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{J}(\mathbb{A})$;

2) $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B} \Rightarrow \mathcal{J}(\mathbb{A}) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{J}(\mathbb{B})$.

Определим допустимое множество $\mathcal{J}^n(\mathbb{A})$ индукцией по $n < \omega$ следующим образом: $\mathcal{J}^0(\mathbb{A}) \leftrightharpoons \mathbb{A}$, $\mathcal{J}^{n+1}(\mathbb{A}) \leftrightharpoons \mathcal{J}(\mathcal{J}^n(\mathbb{A}))$.

Будем говорить, что модель $\mathfrak{M} = \langle M, Q_1, \ldots, Q_s\rangle$, $s \in \omega$, *определима* в допустимом множестве $\mathbb{A}$, если существует $\nu : A \twoheadrightarrow M$, для которого $\nu^{-1}(=)$, $\nu^{-1}(Q_1)$, $\ldots$, $\nu^{-1}(Q_s)$ будут определимыми предикатами на $\mathbb{A}$. Данное понятие также было введено Ю. Л. Ершовым. Заметим, что на допустимых множествах отношение определимости будет рефлексивным и транзитивным. Заметим также, что отношение определимости слабее отношения Σ-определимости.

Введем в рассмотрение еще одно понятие определимости моделей в допустимых множествах — определимость ограниченными по сложности формулами. Пусть $m \geq 1$. Будем говорить, что модель $\mathfrak{M} = \langle M, Q_1, \ldots, Q_s\rangle$, $s \in \omega$, *Σ_m-определима* в допустимом множестве $\mathbb{A}$, если существует $\nu : A \twoheadrightarrow M$, для которого $\nu^{-1}(=)$, $\nu^{-1}(Q_1)$, $\ldots$, $\nu^{-1}(Q_s)$ будут принадлежать $\Delta_m^{\mathbb{A}}$. Отметим, что Σ_1-определимость совпадает с Σ-определимостью.

Применяя подходящее число раз лемму 4.1, получаем следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, $m \in \omega$ и $\mathfrak{M}$ — модель конечной сигнатуры. Тогда $\mathfrak{M}$ Σ_{m+1}-определима в $\mathbb{A}$, если и только если $\mathfrak{M}$ Σ-определима в $\mathcal{J}^m(\mathbb{A})$.*

Теорема 4.4. *Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, а $\mathfrak{M}$ — модель конечной сигнатуры. Тогда $\mathfrak{M}$ определима в $\mathbb{A}$, если и только если $\mathfrak{M}$ Σ-определима в $\mathcal{J}^n(\mathbb{A})$ для некоторого $n < \omega$.*

5. О моделях, имеющих e-степень

Пусть $A \subseteq \omega$. Определим модель $\mathfrak{N}_A$ сигнатуры $\{F^2, 0^1, s^2\}$ с носителем N_A по следующему правилу:

$N_A \leftrightharpoons \omega \uplus \{z_n \mid n \in A\}$, причем $z_n \neq z_{n'}$, если $n \neq n'$; $0^{\mathfrak{N}_A} \leftrightharpoons \{0\} \subseteq \omega$;

$s^{\mathfrak{N}_A} \leftrightharpoons \{\langle n, n+1\rangle \mid n \in \omega\}$; $F^{\mathfrak{N}_A} \leftrightharpoons \{\langle x, y\rangle \mid x \in A,\ y = z_x\}$.

Данные модели имеют e-степени. Понятие моделей, имеющих e-степени, можно найти в [9]. Фактически оно изучалось и ранее [15]. Здесь определение, базирующееся на понятии представления натуральными числами, приводить не будем. Отметим лишь, что счетная модель (конечной сигнатуры) $\mathfrak{M}$ имеет e-степень, если и только если $\mathcal{I}_e(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ является главным идеалом, а $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$

обладает свойством минимальности для $\mathcal{I}_e(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ (а именно, если допустимое множество $\mathbb{A}$ таково, что $\mathcal{I}_e(\mathbb{A}) = \mathcal{I}_e(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$, то $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}$). Свойства таких моделей активно изучались в [6].

Предложение 5.1. *Пусть $A, B \subseteq \omega$. Тогда $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_A) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{HF}(\mathfrak{N}_B)$, если и только если $A \leq_e B$.*

Доказательство непосредственно следует из [6, теорема 3.1] и предложения 3.4. $\square$

Следующая теорема характеризует допустимые множества, которые вычислимым образом перечисляются с помощью натуральных чисел. Примерами таких структур являются $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})$, где $\mathfrak{N}$ — стандартная модель арифметики, а также $\mathbb{L}_\alpha$ для проецируемого в ω допустимого ординала α [13].

Теорема 5.1. *Пусть $\mathbb{A}$ — квазипроецируемое допустимое множество. Тогда выполняются следующие условия:*

1) *$\mathcal{I}_e(\mathbb{A})$ — главный идеал;*

2) *если $C \subseteq \omega$ таково, что $\mathcal{I}_e(\mathbb{A}) = \widehat{d_e(C)}$, то $\mathbb{A} \equiv_\Sigma \mathbb{HF}(\mathfrak{N}_C)$;*

3) *$\mathbb{A}$ не удовлетворяет принципу продолжимости.*

Доказательство. Пусть $h : R \twoheadrightarrow A$ — Σ-функция из определения квазипроецируемого допустимого множества, где $R \subseteq \omega$.

1. Рассмотрим Σ-предикат $U_\omega \subseteq A \times \omega$ на $\mathbb{A}$, универсальный для семейства всех Σ-подмножеств ω. Тогда $d_e(\{\langle\!\langle m, n\rangle\!\rangle \mid m \in R,\ \langle h(m), n\rangle \in U_\omega\}) \in \mathcal{I}_e(\mathbb{A})$ и, следовательно, $\mathcal{I}_e(\mathbb{A})$ — главный идеал.

2. Соотношение $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_C) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}$ следует из доказательства теоремы 3.1 в [6] ($\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_C)$ обладает свойством минимальности). Покажем теперь, что $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{HF}(\mathfrak{N}_C)$. Положим $C' \leftrightharpoons R \oplus \{\langle\!\langle m, n\rangle\!\rangle \mid m \in \Phi_n(C)\}$. Очевидно, $C' \equiv_e C$, а отображение

$$\nu(x) \leftrightharpoons \begin{cases} h(n), & \text{если } x = \langle 2 \cdot n, z_{2\cdot n}\rangle \text{ для некоторого } n \in R, \\ \varnothing & \text{в противном случае} \end{cases}$$

осуществляет Σ-сводимость $\mathbb{A}$ к $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_{C'})$ и в силу транзитивности отношения Σ-сводимости и предложения 5.1 получаем требуемое. $\square$

Предложение 5.2. *Для любого $C \subseteq \omega$ имеет место соотношение*

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_{J(C)}) \equiv_\Sigma \mathcal{J}(\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_C)).$$

Доказательство. Возьмем $C \subseteq \omega$. Тогда $J(C) \in \Sigma(\mathcal{J}(\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_{\mathcal{C}})))$ и, следовательно, $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_{J(C)}) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{J}(\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_C))$.

Для доказательства обратной сводимости заметим сначала, что $\mathcal{J}(\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_C))$ будет Σ-перечислимым, а в силу теоремы 5.1 достаточно доказать, что

$$\mathcal{I}_e(\mathcal{J}(\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_C))) \leq \widehat{d_e(J(C))}.$$

Пусть $A \in \Sigma_2^{\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_C)} \cap \mathcal{P}(\omega)$. Тогда найдется Σ-формула $\Phi(x_0, x_1)$ без параметров (в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_C)$ параметры можно элиминировать) такая, что $n \in A \Leftrightarrow \exists x_0 \neg\Phi(x_0, n) \Leftrightarrow \exists m(m \in R \wedge \neg\Phi(h(m), n))$, где $h : R \twoheadrightarrow HF(N_C)$ — Σ-функция на $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_C)$, $R \subseteq \omega$. Получили формулу, эквивалентную Σ-формуле в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}, K(C))$, где $\mathfrak{N}$ — стандартная модель арифметики. $\square$

6. Σ-сводимость: алгебраические свойства

В данном разделе рассмотрим некоторые алгебраические свойства допустимых множеств относительно Σ-сводимости.

Следствие 6.1. *Для любых допустимых множеств* $\mathbb{A}_0$ *и* $\mathbb{A}_1$ *существует допустимое множество* $\mathbb{A}_0 \sqcup \mathbb{A}_1$ *такое, что*

$$\mathbb{A}_0 \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}_0 \sqcup \mathbb{A}_1,\ \mathbb{A}_1 \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}_0 \sqcup \mathbb{A}_1 \quad \text{и} \quad \mathbb{A}_0 \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B},\ \mathbb{A}_1 \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A}_0 \sqcup \mathbb{A}_1 \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}.$$

Более того, $\mathcal{I}_e(\mathbb{A} \sqcup \mathbb{B}) = \mathcal{I}_e(\mathbb{A}) \sqcup \mathcal{I}_e(\mathbb{B})$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}_0})$, $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathbb{A}_1})$ — наследственно конечные надстройки, как и в теореме 3.1. Определим наследственно конечную надстройку $\mathbb{A}_0 \sqcup \mathbb{A}_1$ над моделью $\mathfrak{M}$ сигнатуры $\{P^1, Q^2\}$ по следующему правилу:

$$M \leftrightharpoons M_{\mathbb{A}_0} \uplus M_{\mathbb{A}_1}; \quad P^{\mathfrak{M}} \leftrightharpoons M_{\mathbb{A}_0}; \quad Q^{\mathfrak{M}} \leftrightharpoons Q^{\mathfrak{M}_{\mathbb{A}_0}} \cup Q^{\mathfrak{M}_{\mathbb{A}_1}}.$$

Нетрудно установить, что $\mathbb{A}_0 \sqcup \mathbb{A}_1$ — искомое допустимое множество.

Последнее условие непосредственно следует из [5, предложение 3.1]. □

Класс допустимых множеств, содержащий $\mathbb{A}$, обозначим через $[\mathbb{A}]_\Sigma$, а ассоциированное с $\sqsubseteq_\Sigma$ отношение частичного порядка на классах — через $\sqsubseteq$. Введем в рассмотрение следующие частично упорядоченные множества:

- $\mathcal{L}_\alpha \leftrightharpoons \langle \{[\mathbb{A}]_\Sigma \mid \mathbb{A} \text{ допустимое, } \mathrm{card}(\mathbb{A}) = \alpha\}, \sqsubseteq\rangle$, где α — бесконечный кардинал;
- $\mathcal{L}_{\le\alpha} \leftrightharpoons \langle \{[\mathbb{A}]_\Sigma \mid \mathbb{A} \text{ допустимое, } \mathrm{card}(\mathbb{A}) \le \alpha\}, \sqsubseteq\rangle$, где α — бесконечный кардинал;
- $\mathcal{L}_{\alpha,\mathrm{I}} \leftrightharpoons \langle \{[\mathbb{A}]_\Sigma \mid \mathbb{A} \text{ допустимое, } \mathrm{card}(\mathbb{A}) = \alpha, \mathcal{I}_e(\mathbb{A}) = \mathrm{I}\}, \sqsubseteq\rangle$, где α — бесконечный кардинал, а I — e-идеал, $\mathrm{card}(\mathrm{I}) \le \alpha$;
- $\mathcal{L}_{\le\alpha,\mathrm{I}} \leftrightharpoons \langle \{[\mathbb{A}]_\Sigma \mid \mathbb{A} \text{ допустимое, } \mathrm{card}(\mathbb{A}) \le \alpha, \mathcal{I}_e(\mathbb{A}) = \mathrm{I}\}, \sqsubseteq\rangle$, где α — бесконечный кардинал, а I — e-идеал, $\mathrm{card}(\mathrm{I}) \le \alpha$.

Отметим ряд простейших свойств данных частично упорядоченных множеств:

1) все они являются верхними полурешетками;

2) $\mathcal{L}_\alpha$, $\mathcal{L}_{\le\alpha}$ замкнуты относительно операции скачка для любого бесконечного α, однако $\mathcal{L}_{\alpha,\mathrm{I}}$, $\mathcal{L}_{\le\alpha,\mathrm{I}}$ замкнуты относительно скачка только при $\mathrm{I} = \mathrm{L}_e$ и $\alpha \ge 2^\omega$ (следствие результатов из [16]);

3) $\mathcal{L}_\alpha$, $\mathcal{L}_{\le\alpha}$, $\mathcal{L}_{\alpha,\mathrm{I}}$ имеют наименьший элемент для любых бесконечного кардинала α и e-идеала I с $\mathrm{card}(\mathrm{I}) \le \alpha$ (следствие из теоремы 3.9 в [5]);

4) $\mathcal{L}_{\le\alpha,\widehat{\mathbf{a}}}$ имеет наименьший элемент для любых бесконечного кардинала α и e-степени $\mathbf{a}$ (следствие из теоремы 3.1 в [6]);

5) если кардинал α и неглавный e-идеал I таковы, что $\mathrm{card}(\mathrm{I}) < \alpha$, то $\mathcal{L}_{\le\alpha,\mathrm{I}}$ имеет $\mathrm{card}(\{\mathrm{card}(\beta) \mid \mathrm{card}(\mathrm{I}) \le \beta \le \alpha\})$ минимальных элементов и, следовательно, не является решеткой;

6) $\mathrm{card}(\mathcal{L}_\alpha) = 2^\alpha$ (следствие теоремы 3.1 из [6]).

Мы не будем приводить всевозможные тождественные вложения данных структур. Ниже строится преобразование допустимого множества в допустимое множество большей мощности, сохраняющее ряд параметров. В частности, оно сохраняет такие вычислимые инварианты, как идеал допустимого множества и класс вычислимых семейств подмножеств ω. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество мощности β, а S — множество без структуры мощности $\alpha \ge \beta$. Тогда через $\mathbb{A}_\alpha$ обозначим наследственно конечную надстройку над моделью $\mathfrak{M} = \langle M_{\mathbb{A}} \uplus S, Q^{\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}}, S\rangle$, где $\mathfrak{M}_{\mathbb{A}} = \langle M_{\mathbb{A}}, Q^{\mathfrak{M}_{\mathbb{A}}}\rangle$ — модель из условия теоремы 3.1. Тогда справедлива

Теорема 6.1. *Пусть* $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ *— допустимые множества мощности, не превосходящей* α, *и* $\mathrm{card}(\mathbb{A}) \le \mathrm{card}(\mathbb{B})$. *Тогда*

1) $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$, *если и только если* $\mathbb{A}_\alpha \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}_\alpha$;

2) $(\mathbb{A} \sqcup \mathbb{B})_\alpha = \mathbb{A}_\alpha \sqcup \mathbb{B}_\alpha$;

3) $\mathcal{J}(\mathbb{A}_\alpha) \equiv_\Sigma \mathcal{J}(\mathbb{A})_\alpha$;

4) $I(\mathbb{A}) = I(\mathbb{A}_\alpha)$.

Доказательство. 1. Пусть $\mathbb{A}_\alpha$ — наследственно конечная надстройка над моделью $\mathfrak{A}$. По предложению 3.5 $\mathfrak{A} \le_\Sigma \mathbb{B}_\alpha$. Пусть $X \subseteq \nu^{-1}(M_\mathbb{A})$ — некоторое множество, для которого $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(M_\mathbb{A})$ и $\nu(X) = M_\mathbb{A}$, где ν — отображение, участвующее в Σ-определении $\mathcal{A}$ в $\mathbb{B}_\alpha$. Пусть теперь Y — множество мощности $\mathrm{card}(\mathbb{B})$, содержащее X, а также подмножество S мощности $\mathrm{card}(\mathbb{B})$, включая все параметры, участвующие в Σ-определении $\mathfrak{A}$ в $\mathbb{B}_\alpha$. По теореме Левенгейма — Сколема существует $\mathbb{B}_0 \preccurlyeq \mathbb{B}_\alpha$ мощности $\mathrm{card}(\mathbb{B})$ такая, что $M_\mathbb{B} \cup \bigcup\{\mathrm{sp}(y) \mid y \in Y\} \subseteq B_0$. Заметим, что $\mathbb{B}_0 \equiv_\Sigma \mathbb{B}$. Определим в $\mathbb{B}_0$ модель $\mathfrak{A}_0$ теми же формулами, что и $\mathfrak{A}$ в $\mathbb{B}$. Тогда $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{HF}(\mathfrak{A}_0)$, $\mathfrak{A}_0 \le_\Sigma \mathbb{B}_0$ и, следовательно, $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$.

3. Легко проверяется включение ${}_\Sigma \sqsupseteq$. Покажем обратное включение. Нетрудно построить $\nu : \langle M_\mathbb{A} \uplus S_0, Q^{\mathfrak{M}_\mathbb{A}}, S_0\rangle \le_\Sigma \mathbb{A}$, где $S_0 \subseteq S$ имеет мощность ω, а элементы из S_0 занумерованы с помощью ν натуральными числами.

Заметим также, что $\mathbb{HF}(\langle M_\mathbb{A} \uplus S_0, Q^{\mathfrak{M}_\mathbb{A}}, S_0\rangle) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\langle M_\mathbb{A} \uplus S, Q^{\mathfrak{M}_\mathbb{A}}, S\rangle)$, к тому же типы, реализующиеся в последней структуре, те же самые, что и в первой. Остальное следует из существования $\nu^* : \mathcal{J}(\mathbb{HF}(\langle M_\mathbb{A} \uplus S_0, Q^{\mathfrak{M}_\mathbb{A}}, S_0\rangle)) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{J}(\mathbb{A})$, «продолжающего» ν (в том смысле, что ν^* строится по ν способом, предложенным, к примеру, в [4]). $\square$

В качестве следствий данной теоремы укажем серию вложений рассматриваемых полурешеток для кардиналов $\beta \le \alpha$ и e-идеала I:

1) $\langle \mathcal{L}_\beta, \mathcal{J}\rangle \hookrightarrow \langle \mathcal{L}_\alpha, \mathcal{J}\rangle$;

2) $\langle \mathcal{L}_{\le\beta}, \mathcal{J}\rangle \hookrightarrow \langle \mathcal{L}_\alpha, \mathcal{J}\rangle$;

3) $\mathcal{L}_{\beta,\mathrm{I}} \hookrightarrow \mathcal{L}_{\alpha,\mathrm{I}}$;

4) $\mathcal{L}_{\le\beta,\mathrm{I}} \hookrightarrow \mathcal{L}_{\alpha,\mathrm{I}}$;

5) в частности, $\mathcal{L}_\beta$ не будет дистрибутивной верхней полурешеткой, поскольку в нее вкладывается верхняя полурешетка $\mathcal{L}_e$ степеней по перечислимости (предложение 5.1), которая, как известно, не является таковой;

6) $\langle \mathcal{L}_e, ' \rangle \hookrightarrow \langle \mathcal{L}_\omega, \mathcal{J}\rangle$ (следствие предложений 5.1, 5.2).

7. Открытые проблемы

1. Будут ли Σ-степени счетных допустимых множеств образовывать решетку?

2. Описать теоретико-решеточные свойства Σ-степеней счетных локально конструктивизируемых допустимых множеств.

3. Существует ли вычислимое допустимое множество, не Σ-эквивалентное $\mathbb{HF}(\varnothing)$?

4. Действует ли нетривиально операция Σ-скачка на Σ-степенях допустимых множеств?

5. Описать образ операции Σ-скачка.

6. Существует ли вложение $\imath$ решетки $\mathcal{J}(\mathcal{L}_e)$ в $\mathcal{L}_{2^\omega}$, как верхней полурешетки такое, что $\mathcal{I}_e(\imath(I)) = I$ для любого e-идеала I?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов А. С.* Об отношении Σ-сводимости между допустимыми множествами // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 634–652.
2. *Пузаренко В. Г.* Допустимые множества: элементарное описание и вычислимость // Материалы III конф. молодых ученых СО РАН, посвященной М. А. Лаврентьеву. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2003. С. 39–44.
3. *Пузаренко В. Г.* Допустимые множества: элементарное описание и вычислимость. Ч. 2 // Материалы IV конф. молодых ученых СО РАН, посвященной М. А. Лаврентьеву. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2004. С. 34–36.
4. *Пузаренко В. Г.* Обобщенные нумерации и определимость поля $\mathbb{R}$ в допустимых множествах // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2003. Т. 3, № 2. С. 107–117.
5. *Морозов А. С., Пузаренко В. Г.* О Σ-подмножествах натуральных чисел // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 291–320.
6. *Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г.* О принципах вычислимости на допустимых множествах // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 2. С. 35–71.
7. *Пузаренко В. Г.* К вычислимости на специальных моделях // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 185–208.
8. *Хисамиев А. Н.* О верхней полурешетке Ершова $\mathfrak{L}_E$ // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 1. С. 211–228.
9. *Стукачев А. И.* О степенях представимостей моделей. I // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 763–788.
10. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
11. *Soare R. I.* Recursively enumerable sets and degrees: A study of computable functions and computably generated sets. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1987.
12. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. М.; Новосибирск: Научная книга; Экономика, 2000.
13. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1975.
14. *Пузаренко В. Г.* О вычислимости над моделями разрешимых теорий // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 2. С. 170–197.
15. *Sorbi A.* Open problems in the enumeration degrees // Computability theory and its applications. Current trends and open problems. Proc. 1999 AMS-IMS-SIAM joint summer research conference, Boulder, CO. 2000. P. 309–320.
16. *Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г.* О сводимости на семействах // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 1.

Статья поступила 1 сентября 2007 г.

Пузаренко Вадим Григорьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vagrig@math.nsc.ru