

СФЕРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ  
НА ТОРИЧЕСКИХ УЗЛАХ И ЗАЦЕПЛЕНИЯХ

А. А. Колпаков, А. Д. Медных

**Аннотация.** Исследованы два бесконечных семейства конических многообразий, наделенных сферической метрикой. Сингулярным множеством первого из них является торический узел  $t(2n+1, 2)$ , а сингулярным множеством второго — двукомпонентное зацепление  $t(2n, 2)$ . Найдены области сферичности указанных многообразий в терминах конических углов и получены аналитические формулы для их объемов.

**Ключевые слова:** сферическая геометрия, коническое многообразие, узел, зацепление.

Академику Юрию Григорьевичу Решетняку  
к его 80-летию

§ 1. Введение

*Трехмерным коническим многообразием* называется метрическое пространство, полученное из набора непересекающихся 3-симплексов в пространстве постоянной секционной кривизны  $k$  путем изометрического отождествления их граней. При этом предполагается, что образованное в результате такого отождествления топологическое пространство (пространство-носитель) является многообразием.

Такое многообразие обладает римановой метрикой постоянной секционной кривизны  $k$  на объединении клеток размерностей 2 и 3. В случае  $k = +1$  будем говорить, что соответствующее коническое многообразие *имеет* (или *допускает*) *сферическую структуру*. Аналогично определяются конические многообразия с евклидовой ( $k = 0$ ) и гиперболической структурами ( $k = -1$ ).

Метрическая структура вокруг каждой 1-клетки определяется коническим углом, который является суммой двугранных углов при ребрах, дающих после отождествления эту клетку. *Сингулярным множеством* конического многообразия назовем замыкание всех 1-клеток, конический угол вокруг которых не равен  $2\pi$ . Ниже будем предполагать, что каждая компонента связности сингулярного множества является одномерным подмногообразием (вложенной окружностью) с постоянным коническим углом.

Отметим, что частным случаем конических многообразий являются орбифолды, конические углы которых имеют вид  $2\pi/m$ , где  $m$  — некоторое целое число (подробнее см. [1]).

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00255), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ-5682.2008.1).

В данной работе рассматриваются два бесконечных семейства конических многообразий, носителем которых является трехмерная сфера. Первое состоит из многообразий с сингулярностями вдоль торических узлов  $t(2n+1, 2)$ , где  $n \geq 1$ . В рациональной номенклатуре [2] им соответствуют двумостовые узлы  $(2n+1)/1$ . Второе семейство состоит из многообразий с сингулярностями вдоль двухкомпонентных торических зацеплений  $t(2n, 2)$ , где  $n \geq 2$ . Такие зацепления также являются двумостовыми и в рациональной номенклатуре обозначаются через  $2n/1$  соответственно. Простейшими представителями этих семейств являются узел «трилистник»  $3/1$  и зацепление  $4/1$ . В таблице Рольфсена [2] им соответствуют узел  $3_1$  и зацепление  $4_1^2$ .

По теореме Терстона [3] многообразие  $\mathbb{S}^3 \setminus 3_1$  не допускает гиперболической структуры, однако допускает две других [4]:  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  и  $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ . Ранее Зейферт и Вебер [5] показали, что сферическое пространство додекаэдра (гомологическая сфера Пуанкаре) является циклическим 5-листным накрытием  $\mathbb{S}^3$ , разветвленным над  $3_1$ . Следовательно, орбифолд  $3_1(\frac{2\pi}{5})$  с сингулярным множеством узел «трилистник» и коническим углом  $\frac{2\pi}{5}$  обладает сферической структурой. По классификации Данбара [6] орбифолд  $3_1(\frac{2\pi}{n})$  является сферическим при  $n \leq 5$ , Nil-орбифолдом при  $n = 6$  и  $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ -орбифолдом при  $n \geq 7$ . Сферическая структура на коническом многообразии  $3_1(\alpha)$  подробно исследована в [7].

Простейшим торическим зацеплением с неабелевой фундаментальной группой является зацепление  $4_1^2$ . С него начнется наше рассмотрение семейства конических многообразий с сингулярностями вдоль двумостовых торических зацеплений.

Отметим, что вопрос существования сферической структуры на двумостовых узлах исследован ранее в [8–10]. Метод, предложенный в настоящей работе, позволяет установить области существования сферической структуры на двумостовых торических узлах и зацеплениях, вычислить длины компонент сингулярного множества и объемы соответствующих конических многообразий (см. теоремы 1 и 2).

## § 2. Проективная модель $\mathbb{S}_{\lambda}^3$

В этом параграфе мы построим проективную модель трехмерной сферы  $\mathbb{S}^3$ , которая будет использоваться в дальнейшем при изучении геометрических характеристик двумостовых торических узлов и зацеплений, а также при построении отображений голономии соответствующих конических многообразий. Другие проективные интерпретации однородных геометрий описаны в [11].

Будем рассматривать множество  $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$  как четырехмерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$ . Обозначим его через  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$  и оснастим эрмитовым произведением

$$\langle(z_1, z_2), (w_1, w_2)\rangle_{\text{H}} = (z_1, z_2) \mathcal{H} \overline{(w_1, w_2)}^T,$$

где  $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$  — симметрическая матрица, удовлетворяющая условию  $-1 < \lambda < +1$ .

С заданной выше эрмитовой формой естественным образом ассоциируются евклидово скалярное произведение

$$\langle(z_1, z_2), (w_1, w_2)\rangle = \text{Re} \langle(z_1, z_2), (w_1, w_2)\rangle_{\text{H}}$$

и порожденная им норма

$$\|(z_1, z_2)\| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \lambda(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2).$$

Два элемента  $(z_1, z_2)$  и  $(w_1, w_2)$  из  $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2 \setminus (0, 0)$  назовем *эквивалентными*, если существует положительное число  $\mu$  такое, что  $(z_1, z_2) = (\mu w_1, \mu w_2)$ . В этом случае будем писать  $(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2)$ .

Отождествим фактор-пространство  $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}^2 / \sim$  с трехмерной сферой

$$\mathbb{S}_{\lambda}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2 : \|(z_1, z_2)\| = 1\},$$

оснащенной римановой метрикой

$$ds_{\lambda}^2 = |dz_1|^2 + |dz_2|^2 + \lambda(dz_1 d\bar{z}_2 + d\bar{z}_1 dz_2).$$

В силу равенства

$$ds_{\lambda}^2 = \frac{1+\lambda}{2}|dz_1 + dz_2|^2 + \frac{1-\lambda}{2}|dz_1 - dz_2|^2$$

линейное преобразование

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}(z_1 + z_2), \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}(z_1 - z_2)$$

осуществляет изометрию между римановыми пространствами  $(\mathbb{S}_{\lambda}^3, ds_{\lambda}^2)$  и  $(\mathbb{S}^3, ds^2)$ , где  $ds^2 = |d\xi_1|^2 + |d\xi_2|^2$  — стандартная метрика кривизны +1 на единичной евклидовой сфере  $\mathbb{S}^3 = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2 : |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = 1\}$ .

Пусть  $P, Q$  — две точки из  $\mathbb{S}_{\lambda}^3$ . Сферическим расстоянием между  $P$  и  $Q$  будем называть вещественное число  $d_{\lambda}(P, Q)$ , однозначно определенное условиями  $0 \leq d_{\lambda}(P, Q) \leq \pi$  и  $\cos d_{\lambda}(P, Q) = \langle P, Q \rangle$ .

### § 3. Торические узлы $\mathbb{T}_n$

Пусть  $\mathbb{T}_n$ ,  $n \geq 1$ , — торический  $t(2n+1, 2)$  узел, вложенный в трехмерную сферу  $\mathbb{S}^3$ . Узел  $\mathbb{T}_n$  является двумостовым и в рациональной номенклатуре ему соответствует обозначение  $(2n+1)/1$  (рис. 1).

=2in 2.5in8

fig1pr.eps

Рис. 1. Узел  $(2n+1)/1$ . Обозначим через  $\mathbb{T}_n(\alpha)$  коническое многообразие с сингулярным множеством топологического типа  $\mathbb{T}_n$  и коническим углом  $\alpha$  вдоль него. Далее будем исследовать многообразия  $\mathbb{T}_n(\alpha)$ ,  $n \geq 1$ , с целью найти области существования на них сферической метрики и получить формулы объема.

Сначала сформулируем две леммы, которые будем использовать в дальнейшем.

**Лемма 1.** Для любых вещественных  $0 < \alpha < 2\pi$  и  $-1 < \lambda < +1$  линейные преобразования

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2ie^{i\frac{\alpha}{2}}\lambda \sin \frac{\alpha}{2} & e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & -2ie^{i\frac{\alpha}{2}}\lambda \sin \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются изометриями пространства  $\mathbb{S}_{\lambda}^3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Всюду ниже мы считаем, что матрицы действуют на векторы справа. Линейное преобразование  $L$  пространства  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$  сохраняет эрмитову форму, если для любых двух векторов  $P, Q \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$  выполнено

$$\langle P, Q \rangle_H = P \mathcal{H} \bar{Q}^T = PL \mathcal{H} \bar{L}^T \bar{Q}^T = \langle PL, QL \rangle_H.$$

Это условие равносильно тому, что  $\mathcal{H} = L \mathcal{H} \bar{L}^T$ . В этом случае, в частности, справедливы равенства  $\cos d_{\lambda}(P, Q) = \langle P, Q \rangle = \langle PL, QL \rangle = \cos d_{\lambda}(PL, QL)$ , т. е.  $L$  сохраняет сферическое расстояние между  $P$  и  $Q$ .

Полагая последовательно  $L = A$  и  $L = B$ , непосредственно убеждаемся, что линейные преобразования  $A$  и  $B$  сохраняют эрмитову форму на пространстве  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$ , а следовательно, и сферическое расстояние на  $\mathbb{S}_{\lambda}^3$ .  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $A$  и  $B$  те же, что и в формулировке леммы 1. Тогда при всех целых  $n \geq 1$  выполнено равенство

$$(AB)^n A - B(AB)^n = 2U_{2n}(\Lambda) e^{i\frac{(2n+1)(\pi+\alpha)}{2}} \sin \frac{\alpha}{2} M,$$

где  $M$  — ненулевая матрица размера  $2 \times 2$ , а  $U_{2n}(\Lambda)$  — полином Чебышёва второго рода степени  $2n$  от переменной  $\Lambda = \lambda \sin \alpha/2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку  $-1 < \lambda < +1$ , то  $-1 < \Lambda = \lambda \sin \alpha/2 < +1$ , следовательно, мы можем сделать подстановку  $\Lambda = \cos \theta$ , где значение  $0 < \theta < \pi$  однозначно определено. В новых обозначениях матрицы  $A$  и  $B$  примут вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2ie^{i\frac{\alpha}{2}} \cos \theta & e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & -2ie^{i\frac{\alpha}{2}} \cos \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При помощи матрицы

$$V = \begin{pmatrix} ie^{-i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\theta} & ie^{-i\frac{\alpha}{2}} e^{i\theta} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

приведем  $AB$  к диагональной форме

$$D = V^{-1}(AB)V = \begin{pmatrix} -e^{i\alpha} e^{2i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{i\alpha} e^{-2i\theta} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица  $V$  не является изометрией, однако она удобна для вычислительных целей.

Далее, последовательно вычислим выражение:

$$\begin{aligned} (AB)^n A - B(AB)^n &= (VD^n V^{-1})A - B(VD^n V^{-1}) \\ &= 2 \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} e^{i\frac{(2n+1)(\pi+\alpha)}{2}} \sin \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2U_{2n}(\cos \theta) e^{i\frac{(2n+1)(\pi+\alpha)}{2}} \sin \frac{\alpha}{2} M = 2U_{2n}(\Lambda) e^{i\frac{(2n+1)(\pi+\alpha)}{2}} \sin \frac{\alpha}{2} M, \end{aligned}$$

где матрица

$$M = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям леммы.  $\square$

Теперь мы можем сформулировать и доказать основную теорему этого параграфа.

**Теорема 1.** Коническое многообразие  $\mathbb{T}_n(\alpha)$ ,  $n \geq 1$ , имеет сферическую структуру при

$$\frac{2n-1}{2n+1}\pi < \alpha < 2\pi - \frac{2n-1}{2n+1}\pi.$$

Длина сингулярного множества конического многообразия  $\mathbb{T}_n(\alpha)$  (иначе, длина узла  $\mathbb{T}_n$ ) выражается формулой

$$l_\alpha = (2n+1)\alpha - (2n-1)\pi.$$

Объем  $\mathbb{T}_n(\alpha)$  равен

$$\text{Vol } \mathbb{T}_n(\alpha) = \frac{1}{2n+1} \left( \frac{2n+1}{2}\alpha - \frac{2n-1}{2}\pi \right)^2.$$

**Доказательство.** Фундаментальная группа дополнения к узлу  $\mathbb{T}_n$  имеет представление  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{T}_n) = \langle a, b \mid (ab)^n a = b(ab)^n \rangle$ , порождающие  $a$  и  $b$  которого соответствуют петлям, указанным на рис. 1.

Если коническое многообразие  $\mathbb{T}_n(\alpha)$  допускает сферическую структуру, то существует отображение голономии [1], представляющее собой гомоморфизм

$$h : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{T}_n) \longrightarrow \text{Isom } \mathbb{S}^3.$$

Нам нужно выбрать отображение  $h$ , согласованное с геометрическим построением рассматриваемого многообразия.

В дальнейшем мы будем проводить все вычисления, связанные с нахождением длины узла  $\mathbb{T}_n$  и объема конического многообразия  $\mathbb{T}_n(\alpha)$ , используя соответствующий фундаментальный многогранник  $\mathcal{P}_n$  (рис. 2). Алгоритм построения такого многогранника для произвольного двумостового узла подробно описан в [12].

Комбинаторно многогранник  $\mathcal{P}_n$  состоит из вершин  $P_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 4n+2\}$ , ребер  $P_i P_{i+1}$ ,  $i \in \{1, \dots, 4n+2\}$ , где  $P_{4n+3} = P_1$ ,  $P_1 P_{2n+2}$  и  $P_2 P_{2n+3}$ . Обозначим через  $N$ ,  $S$  выделенные точки (северный и южный «полюсы»  $\mathcal{P}_n$ ) на ребрах  $P_1 P_{2n+2}$  и  $P_2 P_{2n+3}$  соответственно и введем в рассмотрение ребра  $NP_i$ ,  $SP_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 4n+2\}$ .

Без ограничения общности выберем отображение голономии так, чтобы выполнялись условия  $h(a) = A$ ,  $h(b) = B$ , где  $A$  и  $B$  — матрицы из леммы 1. Тогда образы порождающих фундаментальной группы узла  $\mathbb{T}_n$  при отображении  $h$  соответствуют изометриям, отождествляющим грани  $\mathcal{P}_n$  путем поворота вокруг ребра  $P_1 P_{2n+2}$  для его верхней поверхности и вокруг ребра  $P_2 P_{2n+3}$  — для нижней (рис. 2). При таком отождествлении сами  $P_1 P_{2n+2}$  и  $P_2 P_{2n+3}$  «завязываются» в узел  $\mathbb{T}_n$  (подробнее см. [12, 13]).

= 5cm fig2poly.eps

Рис. 2. Фундаментальный многогранник  $\mathcal{P}_n$  для семейства  $\mathbb{T}_n(\alpha)$ .

Для того чтобы начать геометрическое построение многогранника  $\mathcal{P}_n$ , фиксируем его ребро  $P_1 P_2$ , полагая

$$P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 1).$$

В этом случае

$$\cos d_\lambda(P_1, P_2) = \langle P_1, P_2 \rangle = \lambda,$$

т. е. сферическое расстояние между точками  $P_1$  и  $P_2$  может принимать любые значения между 0 и  $\pi$ . Таким образом, фиксируя ребро  $P_1P_2$ , мы не ограничиваем общности нашего построения.

Заметим, что неподвижная ось изометрии  $A$  из леммы 1 содержит точку  $P_1$ , а ось  $B$  — точку  $P_2$ . Наша цель — построить многогранник  $\mathcal{P}_n$  так, чтобы ребра  $P_1P_{2n+2}$  и  $P_2P_{2n+3}$  были соответственно осями изометрий  $A$  и  $B$ , а вершины  $P_i$  получались из  $P_1$  и  $P_2$  действием отображений  $A$  и  $B$ .

Многогранник  $\mathcal{P}_n$  назовем *правильным*, если

- (a) внутренние двугранные углы при ребрах  $P_1P_{2n+2}$  и  $P_2P_{2n+3}$  равны каждый  $\alpha$ ;
- (b) следующие криволинейные грани отождествляются преобразованиями  $A$  и  $B$ :

$$A : NP_1P_2 \dots P_{2n+2} \rightarrow NP_1P_{4n+2} \dots P_{2n+3}P_{2n+2},$$

$$B : SP_2P_1P_{4n+2} \dots P_{2n+3} \rightarrow SP_2P_3 \dots P_{2n+3};$$

- (c) сумма внутренних двугранных углов  $\psi_i$  при ребрах  $P_iP_{i+1}$ ,  $i \in \{1, \dots, 4n+1\}$ , равна  $2\pi$ ;
- (d) сумма двугранных углов  $\phi_i$  составляющих его тетраэдров  $NSP_iP_{i+1}$ ,  $i \in \{1, \dots, 4n+1\}$ , при их общем ребре  $NS$  равна  $2\pi$ ;
- (e) все тетраэдры  $NSP_iP_{i+1}$ , где  $i \in \{1, \dots, 4n+2\}$ ,  $P_{4n+3} = P_1$ , невырождены и когерентно ориентированы.

Под ориентацией тетраэдра  $NSP_iP_{i+1}$  мы понимаем знак определителя Грама  $\det(S, N, P_i, P_{i+1})$  соответствующей четверки векторов  $S, N, P_i, P_{i+1} \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$ , где  $i \in \{1, \dots, 4n+2\}$ ,  $P_{4n+3} = P_1$ . Невырожденность означает выполнение условия  $\det(S, N, P_i, P_{i+1}) \neq 0$ . Таким образом, условие (e) выполнено, если определители Грама всех тетраэдров ненулевые и имеют один и тот же знак.

В случае, когда  $\alpha = \frac{2\pi}{m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , по теореме Пуанкаре [14, теорема 13.5.3] условия (a)–(e) гарантируют, что группа, порожденная изометриями  $A$  и  $B$ , дискретна и имеет представление

$$\Gamma = \langle A, B \mid (AB)^n A = B(AB)^n, A^m = B^m = \text{id} \rangle.$$

При этом  $\mathbb{S}_{\lambda}^3/\Gamma \cong \mathbb{T}_n(\frac{2\pi}{m})$  — сферический орбифолд, а  $\mathcal{P}_n$  — его фундаментальный многогранник. Если же  $m \notin \mathbb{N}$ , то группа, порожденная  $A$  и  $B$ , не обязательно дискретна. Но поскольку отождествления граней  $\mathcal{P}_n$  происходят по той же схеме, что и в случае  $m \in \mathbb{N}$ , в результате получим коническое многообразие  $\mathbb{T}_n(\alpha)$ .

Заметим, что в силу леммы 1 и построения  $\mathcal{P}_n$  условия (a) и (b) выполнены.

Необходимым условием существования отображения голономии  $h$  является выполнение соотношения

$$h((ab)^n a) - h(b(ab)^n) = (AB)^n A - B(AB)^n = 0.$$

Из леммы следует, что оно выполнено, если и только если  $U_{2n}(\Lambda) = 0$ , где  $\Lambda = \lambda \sin \alpha / 2$ .

Таким образом, параметр  $\lambda$  метрики  $ds_{\lambda}^2$  определяется одним из корней полинома Чебышёва  $U_{2n}(\Lambda)$  и связан с коническим углом  $\alpha$  соотношением  $\lambda = \Lambda / \sin \alpha / 2$ .

Известно, что все корни полинома  $U_{2n}(\Lambda)$  вещественны и могут быть записаны в виде

$$\Lambda_k = \cos \frac{k\pi}{2n+1},$$

где  $k \in \{1, \dots, 2n\}$ .

Нам необходимо выбрать параметр  $\lambda$  для метрики  $ds_\lambda^2$  таким образом, чтобы многогранник  $\mathcal{P}_n$  являлся правильным, а сама метрика — сферической.

Отметим, что ребра  $P_i P_{i+1}$ ,  $i \in \{1, \dots, 4n+2\}$ ,  $P_{4n+3} = P_1$  эквивалентны друг другу относительно действия группы  $\Gamma = \langle A, B \rangle$ . Следовательно, выполнение соотношения  $(AB)^n A = B(AB)^n$  влечет равенство

$$\sum_{i=1}^{2(2n+1)} \psi_i = 2k\pi,$$

где  $k$  — некоторое целое число.

Покажем, что  $\lambda$  можно выбрать так, чтобы выполнялось  $k = 1$  для всех  $\alpha$  из формулировки теоремы. Для этого используем тот факт, что при  $\alpha = \pi$  всякий двумостовой узел наделен сферической орбифолдной структурой [15]. В этом случае все вершины  $P_i$  фундаментального многогранника лежат на одной окружности, а все двугранные углы  $\psi_i$  и  $\phi_i$  равны между собой [12]:

$$\phi_i = \psi_i = \frac{\pi}{2n+1}.$$

Так как  $\cos d_\lambda(N, S) = \cos d_\lambda(P_i, P_{i+1}) = \lambda$ , в случае  $\alpha = \pi$  получим

$$\lambda = \frac{\Lambda_k}{\sin \pi/2} = \cos \theta$$

для некоторого  $k \in \{1, \dots, 2n\}$  и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{2(2n+1)} \psi_i = 2(2n+1)\theta.$$

Используя формулу для корней полинома  $U_{2n}(\Lambda)$ , находим, что  $\sum_{i=1}^{2(2n+1)} \psi_i = 2k\pi$  при  $\alpha = \pi$ . Таким образом, условие (c) для многогранника  $\mathcal{P}_n$  в точке  $\alpha = \pi$  выполнено при  $k = 1$ . Учитывая, что параметр  $\alpha$  меняется непрерывно, а сумма углов  $\psi_i$  принимает только значения, кратные  $2\pi$ , получим, что  $\sum_{i=1}^{2(2n+1)} \psi_i = 2\pi$  для всякого  $\alpha$ .

Аналогичными рассуждениями можно показать, что при  $\lambda = \Lambda_1/\sin \alpha/2$  имеет место равенство  $\sum_{i=1}^{2(2n+1)} \phi_i = 2\pi$ , т. е. условие (d) также выполнено.

Убедимся теперь, что в условиях теоремы метрика  $ds_\lambda^2$  является сферической. Это требование эквивалентно неравенству  $-1 < \lambda < +1$ . Заметим, что при

$$\frac{2n-1}{2n+1}\pi < \alpha < 2\pi - \frac{2n-1}{2n+1}\pi$$

выполнено неравенство

$$\sin \frac{\alpha}{2} > \sin \frac{(2n-1)\pi}{2(2n+1)}.$$

Так как  $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$  и  $\Lambda_1 = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2(2n+1)} > 0$ , получим, что  $0 < \lambda < 1$ .

Аналогично доказательству леммы 1 можно показать, что преобразование

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

является изометрией метрики  $ds_\lambda^2$ .

Неподвижными множествами изометрий  $A$  и  $B$  в сфере  $\mathbb{S}_\lambda^3$  являются окружности

$$\text{Fix } A = \{(z_1, 0) : z_1 \in \mathbb{C}, |z_1| = 1\}, \quad \text{Fix } B = \{(0, z_2) : z_2 \in \mathbb{C}, |z_2| = 1\}$$

соответственно. Геометрический смысл изометрии  $C$  состоит в том, что она переводит одну неподвижную окружность в другую. Следовательно, справедливо соотношение  $B = CAC^{-1}$ .

Также имеем равенства

$$\begin{aligned} P_{2k+1} &= P_1(AB)^k, \quad k \in \{0, \dots, n\}, \quad P_{2k} = P_2(AB)^{k-1}, \quad k \in \{1, \dots, n+1\}, \\ P_{2k+1} &= P_1(BA)^{2n-k+1}, \quad k \in \{n+1, \dots, 2n\}, \\ P_{2k} &= P_2(BA)^{2n-k+2}, \quad k \in \{n+2, \dots, 2n+1\}, \end{aligned}$$

которые следуют из схемы отождествления ребер многогранника  $\mathcal{P}_n$ .

Введем вспомогательную функцию

$$\varepsilon(m) = \frac{m}{2}\alpha - \frac{4n-m}{2}\pi.$$

Действуя аналогично доказательству леммы 2, получим

$$(AB)^k = C(BA)^k C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(2k-1)\theta}{\sin\theta} e^{i\varepsilon(2k)} & -\frac{\sin 2k\theta}{\sin\theta} e^{i\varepsilon(2k-1)} \\ \frac{\sin 2k\theta}{\sin\theta} e^{i\varepsilon(2k+1)} & \frac{\sin(2k+1)\theta}{\sin\theta} e^{i\varepsilon(2k)} \end{pmatrix},$$

где  $\theta = \frac{\pi}{2n+1}$ .

Положим, что вершины  $N$  и  $S$  — середины ребер  $P_1P_{2n+2}$  и  $P_2P_{2n+3}$  соответственно. Тогда  $N = (e^{i\frac{\varepsilon(2n+1)}{2}}, 0)$ ,  $S = (0, e^{i\frac{\varepsilon(2n+1)}{2}})$ . Следовательно, для длины сингулярной компоненты  $l_\alpha$  справедливы равенства

$$\cos \frac{l_\alpha}{4} = \langle P_1, N \rangle = \langle P_1 C, NC \rangle = \langle P_2, S \rangle.$$

Таким образом, находим, что

$$\cos \frac{l_\alpha}{4} = \cos \frac{(2n+1)\alpha - (2n-1)\pi}{4}.$$

Поскольку по построению многогранника  $\mathcal{P}_n$  выполнено неравенство  $0 < l_\alpha < 4\pi$  и в условиях теоремы аргумент косинуса в правой части формулы положителен и не превосходит  $\pi$ , получим равенство

$$l_\alpha = (2n+1)\alpha - (2n-1)\pi.$$

Зная координаты вершин  $P_i$ , а также «полюсов»  $N$  и  $S$  многогранника  $\mathcal{P}_n$ , мы можем проверить условие (e).

Для любых четырех точек  $A, B, C, D \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$ , где

$$A = (A_1, A_2), \quad B = (B_1, B_2), \quad C = (C_1, C_2), \quad D = (D_1, D_2),$$

их определителем Грама является функция

$$\det(A, B, C, D) := \det \begin{pmatrix} \operatorname{Re} A_1 & \operatorname{Im} A_1 & \operatorname{Re} A_2 & \operatorname{Im} A_2 \\ \operatorname{Re} B_1 & \operatorname{Im} B_1 & \operatorname{Re} B_2 & \operatorname{Im} B_2 \\ \operatorname{Re} C_1 & \operatorname{Im} C_1 & \operatorname{Re} C_2 & \operatorname{Im} C_2 \\ \operatorname{Re} D_1 & \operatorname{Im} D_1 & \operatorname{Re} D_2 & \operatorname{Im} D_2 \end{pmatrix}.$$

Каждый тетраэдр  $NSP_iP_{i+1}$  с  $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$  изометричен тетраэдру  $NSP_{2n+i+1}P_{2n+i+2}$ ,  $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$ ,  $P_{4n+3} = P_1$  при помощи введенной ранее изометрии  $C$ . Поэтому рассмотрим только тетраэдры  $NSP_iP_{i+1}$  с  $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$ . В дальнейшем нам будет удобно разбить их на две группы: тетраэдры  $NSP_{2k+1}P_{2k+2}$  с  $k \in \{0, \dots, n\}$  и тетраэдры  $NSP_{2k}P_{2k+1}$  с  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

Применяя подстановку  $\alpha = \beta + \pi$ , непосредственными вычислениями получим

$$\begin{aligned}\Delta_k^{(1)}(\beta) &= \det(S, N, P_{2k+1}, P_{2k+2}) = \cos^2 \frac{L_1 \beta}{4} - U_{2k-1}^2(\cos \theta) \sin^2 \frac{\beta}{2} \\ &= T_{L_1}^2 \left( \cos \frac{\beta}{4} \right) - U_{2k-1}^2(\cos \theta) \sin^2 \frac{\beta}{2},\end{aligned}$$

где  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $L_1 = |2n - 4k + 1|$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2n+1}$ ,  $\beta \in [-2\theta, 2\theta]$ ;

$$\begin{aligned}\Delta_k^{(2)}(\beta) &= \det(S, N, P_{2k}, P_{2k+1}) \\ &= \cos^2 \frac{L_2 \beta}{4} - U_{2k-2}^2(\cos \theta) \sin^2 \frac{\beta}{2} = T_{L_2}^2 \left( \cos \frac{\beta}{4} \right) - U_{2k-1}^2(\cos \theta) \sin^2 \frac{\beta}{2},\end{aligned}$$

где  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $L_2 = |2n - 4k + 3|$ ,  $\theta$  и  $\beta$  те же, что и выше. Через  $T_k$  обозначим многочлен Чебышева первого рода степени  $k \geq 0$ . Также для удобства полагаем в нашей записи  $U_{-1}(\cos \theta) = 0$ ,  $U_0(\cos \theta) = 1$ .

Поскольку функции  $\Delta_k^{(j)}(\beta)$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , четны на промежутке  $[-2\theta, 2\theta]$ , достаточно рассмотреть их на  $[0, 2\theta]$ . Заметим, что многочлен  $T_{L_j}^2(\cos \beta)$  монотонно убывает, а функция  $\sin^2 \frac{\beta}{2}$  монотонно возрастает при  $\beta \in [0, 2\theta]$ . При этом  $T_{L_j}^2(\cos 0) = T_{L_j}^2(1) = 1$ . Таким образом, приходим к выводу, что  $\Delta_k^{(j)}(\beta) > 0$  при  $\beta \in (-2\theta, 2\theta)$ . Кроме того, на концах интервала выполнено равенство  $\Delta_k^{(j)}(\pm 2\theta) = 0$ .

Следовательно, при всех  $\beta \in (-2\theta, 2\theta)$  (т. е. при всех  $\alpha$  из формулировки теоремы) имеем

$$\det(S, N, P_i, P_{i+1}) > 0,$$

где  $i \in \{1, \dots, 4n+2\}$ ,  $P_{4n+3} = P_1$ , т. е. условие (е) для многогранника  $\mathcal{P}_n$  выполнено.

Для нахождения объема конического многообразия  $\mathbb{T}_n(\alpha)$  применим формулу Шлефли [16]. Получим

$$d \text{Vol } \mathbb{T}_n(\alpha) = \frac{l_\alpha}{2} d\alpha = \frac{(2n+1)\alpha - (2n-1)\pi}{2} d\alpha.$$

Заметим, что  $\text{Vol } \mathbb{T}_n(\alpha) \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow \frac{2n-1}{2n+1}\pi$ . Действительно, в этом случае  $d_\lambda(P_i, P_{i+1}) \rightarrow 0$ , где  $i \in \{1, \dots, 4n+2\}$ ,  $P_{4n+3} = P_1$ . Отсюда

$$\text{Vol } \mathbb{T}_n(\alpha) = \frac{1}{2n+1} \left( \frac{2n+1}{2}\alpha - \frac{2n-1}{2}\pi \right)^2. \quad \square$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Область существования сферической метрики из формулировки теоремы 1 указана ранее в [10, предложение 2.1].

#### § 4. Торические зацепления $\mathbb{L}_n$

Пусть  $\mathbb{L}_n$ ,  $n \geq 2$ , — двукомпонентное торическое зацепление  $t(2n, 2)$ . В рациональной номенклатуре ему соответствует двумостовое зацепление  $2n/1$  (рис. 3).

$=2\text{in } 2.3\text{in}8$

fig3pr.eps

Рис. 3. Зацепление

$2n/1$ . Фундаментальная группа дополнения к  $\mathbb{L}_n$  в трехмерной сфере имеет представление  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{L}_n) = \langle a, b \mid (ab)^n = (ba)^n \rangle$ . Обозначим через  $\mathbb{L}_n(\alpha, \beta)$  коническое многообразие с сингулярным множеством  $\mathbb{L}_n$  и коническими углами  $\alpha$  и  $\beta$  вдоль его компонент. При исследовании семейства  $\mathbb{L}_n(\alpha, \beta)$ ,  $n \geq 2$ , будем использовать метод, аналогичный изложенному в предыдущем параграфе.

Для любых вещественных  $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$  и  $\lambda \in (-1, +1)$  положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2ie^{i\frac{\alpha}{2}}\lambda \sin \frac{\alpha}{2} & e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e^{i\beta} & -2ie^{i\frac{\beta}{2}}\lambda \sin \frac{\beta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По лемме 1 линейные преобразования  $A$  и  $B$  являются изометриями пространства  $\mathbb{S}_{\lambda}^3$ .

**Лемма 3.** Для всех целых  $n \geq 2$  справедливо равенство

$$(AB)^n - (BA)^n = 4U_{n-1}(\Lambda)\lambda e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2} + \pi)n} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} M,$$

где  $M$  — ненулевая матрица размера  $2 \times 2$ , а  $U_{n-1}(\Lambda)$  — полином Чебышёва второго рода степени  $n-1$  от переменной

$$\Lambda = (1 - \lambda^2) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \lambda^2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Будем действовать аналогично доказательству леммы 2. Поскольку для переменной  $\Lambda$  справедливы неравенства

$$-1 < \Lambda = (1 - \lambda^2) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \lambda^2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} < +1,$$

можно сделать замену  $\Lambda = \cos \theta$ , при которой значение  $0 < \theta < \pi$  определено однозначно. Она понадобится ниже, при диагонализации матриц изометрий  $AB$  и  $BA$ . Будем использовать также прежнюю переменную  $\lambda$  там, где это необходимо.

В случае, когда  $\alpha \neq \beta$ , матрицы  $A$  и  $B$  (аналогично  $AB$  и  $BA$ ) уже не сопрягаются при помощи изометрии  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Однако  $AB$  и  $BA$  по-прежнему можно привести к одинаковой диагональной форме  $D$ .

Положим

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+e^{\frac{i}{2}(\alpha-\beta-2\theta)}}{\lambda(1-e^{i\alpha})} & \frac{1+e^{\frac{i}{2}(\alpha-\beta+2\theta)}}{\lambda(1-e^{i\alpha})} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1+e^{\frac{i}{2}(\beta-\alpha+2\theta)}}{\lambda(1-e^{-i\alpha})} & \frac{1+e^{\frac{i}{2}(\beta-\alpha-2\theta)}}{\lambda(1-e^{-i\alpha})} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда при  $\lambda \neq 0$  получим, что

$$D = V_1^{-1}(AB)V_1 = V_2^{-1}(BA)V_2 = \begin{pmatrix} -e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Последовательно преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} (AB)^n - (BA)^n &= V_1 D^n V_1^{-1} - V_2 D^n V_2^{-1} \\ &= 4 \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \lambda e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2} + \pi)n} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= 4U_{n-1}(\cos \theta) \lambda e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2} + \pi)n} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} M = 4U_{n-1}(\Lambda) \lambda e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2} + \pi)n} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} M, \end{aligned}$$

где матрица  $M = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$  удовлетворяет условиям леммы.

В случае  $\lambda = 0$  все вычисления легко проделать непосредственно, так как матрицы  $A$  и  $B$  становятся диагональными и коммутируют.  $\square$

**Теорема 2.** Коническое многообразие  $\mathbb{L}_n(\alpha, \beta)$ ,  $n \geq 2$ , имеет сферическую структуру, если выполнены условия

$$-2\pi(1 - 1/n) < \alpha - \beta < 2\pi(1 - 1/n), \quad 2\pi(1 - 1/n) < \alpha + \beta < 2\pi(1 + 1/n).$$

Длины сингулярных компонент  $l_\alpha$  и  $l_\beta$  (длины компонент зацепления  $\mathbb{L}_n$ ) равны между собой и выражаются формулой

$$l_\alpha = l_\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} n - \pi(n - 1).$$

Объем конического многообразия  $\mathbb{L}_n(\alpha, \beta)$  равен

$$\text{Vol } \mathbb{L}_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{2n} \left( \frac{\alpha + \beta}{2} n - (n - 1)\pi \right)^2.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Будем действовать аналогично доказательству теоремы 1. Как и выше, предположим, что на коническом многообразии  $\mathbb{L}_n(\alpha, \beta)$  существует сферическая структура. Тогда существует отображение голономии [1]:

$$h : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{L}_n) \longmapsto \text{Isom } \mathbb{S}_\lambda^3, \quad h(a) = A, \quad h(b) = B.$$

*= 5cm fig4poly.eps*

Рис. 4. Фундаментальный многогранник  $\mathcal{F}_n$  для семейства  $\mathbb{L}_n(\alpha, \beta)$ .

При этом  $h((ab)^n) - h((ba)^n) = (AB)^n - (BA)^n = 0$ . В силу леммы 3 указанное выше равенство выполняется либо в случае  $\lambda = 0$ , либо если

$$\Lambda = (1 - \lambda^2) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \lambda^2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

является корнем уравнения  $U_{n-1}(\Lambda) = 0$ .

В случае  $\lambda = 0$  в образе отображения голономии  $h$  выполняется дополнительное соотношение  $AB = BA$ . При  $n \geq 2$  это соответствует геометрически вырожденному случаю. Поэтому необходимо выбрать подходящий параметр  $\lambda$  для метрики  $ds_\lambda^2$ , используя корни полинома Чебышёва  $U_{n-1}(\Lambda)$ .

Фундаментальный многогранник  $\mathcal{F}_n$  для конического многообразия  $\mathbb{L}_n(\alpha, \beta)$  изображен на рис. 4. Его вершинам  $P_1$  и  $P_2$  присваиваем координаты  $P_1 = (1, 0)$ ,  $P_2 = (0, 1)$ . Оси изометрий  $A$  и  $B$  соответствуют линиям  $P_1 P_{2n+1}$  и  $P_2 P_{2n+2}$ .

Точки  $N$  и  $S$  соответствуют серединам ребер  $P_1P_{2n+1}$  и  $P_2P_{2n+2}$ , т. е. «северному» и «южному» полюсам многогранника.

Многогранник  $\mathcal{F}_n$  будем называть *правильным*, если

- (а) внутренние двугранные углы при ребрах  $P_1P_{2n+1}$  и  $P_2P_{2n+2}$  равны  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно;
- (б) следующие криволинейные грани отождествляются преобразованиями  $A$  и  $B$ :

$$A : NP_1P_2 \dots P_{2n+1} \rightarrow NP_1P_{4n} \dots P_{2n+2}P_{2n+1},$$

$$B : SP_2P_1P_{4n} \dots P_{2n+2} \rightarrow SP_2P_3 \dots P_{2n+2};$$

(с) сумма внутренних двугранных углов  $\psi_i$  при ребрах  $P_iP_{i+1}$ ,  $i \in \{1, \dots, 4n-1\}$ , равна  $2\pi$ ;

(д) сумма двугранных углов  $\phi_i$  составляющих его тетраэдров  $NSP_iP_{i+1}$ ,  $i \in \{1, \dots, 4n-1\}$ , при их общем ребре  $NS$  равна  $2\pi$ ;

(е) все тетраэдры  $NSP_iP_{i+1}$ , где  $i \in \{1, \dots, 4n\}$ ,  $P_{4n+1} = P_1$ , невырожденны и когерентно ориентированы.

Для того чтобы выбрать параметр  $\lambda$  для введенной нами метрики, рассмотрим соответствующий фундаментальный многогранник  $\mathcal{F}_n$  в случае  $\alpha = \beta = \pi$ . Тогда все его вершины лежат на одной окружности и все двугранные углы  $\psi_i$  составляющих его тетраэдров  $NSP_iP_{i+1}$  при ребрах  $P_iP_{i+1}$  одинаковы и равны каждый  $\psi = \frac{\pi}{2n}$  [12]. Аналогично все двугранные углы  $\phi_i$  тетраэдров  $NSP_iP_{i+1}$  при общем ребре  $NS$  совпадают:  $\phi_i = \phi = \pi/2n$ . В этом случае  $\lambda = \langle P_1, P_2 \rangle = \cos \phi$  и

$$\Lambda = -\cos 2\phi = \cos \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Поскольку все корни многочлена  $U_{n-1}(\Lambda)$  задаются формулой

$$\Lambda_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n-1\},$$

нам нужен корень  $\Lambda_k$  с  $k = n-1$ . Тогда, как и в теореме 1, получим, что равенства

$$\sum_{i=1}^{4n} \psi_i = 2\pi, \quad \sum_{i=1}^{4n} \phi_i = 2\pi$$

выполнены в точке  $\alpha = \beta = \pi$  из области

$$\mathcal{D} = \{(\alpha, \beta) : |\alpha - \beta| < 2\pi(1 - 1/n), |\alpha + \beta - 2\pi| < 2\pi/n\},$$

изображенной на рис. 5.

=1.6in 2.2in14

<img alt="Рисунок 5: График области D в координатах (alpha, beta). Ось alpha и beta обе в диапазоне от 0 до 2pi. Ось alpha имеет деления на 2pi/4n. Ось beta имеет деления на 2pi/n. Красная линия соединяет точки (0, 2pi), (pi, 2pi), (2pi, pi), (3pi, 0), (4pi, 0), (5pi, pi), (6pi, 2pi), (7pi, 3pi), (8pi, 2pi), (9pi, pi), (10pi, 0), (11pi, 0), (12pi, pi), (13pi, 2pi), (14pi, 3pi), (15pi, 2pi), (16pi, pi), (17pi, 0), (18pi, 0), (19pi, pi), (20pi, 2pi), (21pi, 3pi), (22pi, 2pi), (23pi, pi), (24pi, 0), (25pi, 0), (26pi, pi), (27pi, 2pi), (28pi, 3pi), (29pi, 2pi), (30pi, pi), (31pi, 0), (32pi, 0), (33pi, pi), (34pi, 2pi), (35pi, 3pi), (36pi, 2pi), (37pi, pi), (38pi, 0), (39pi, 0), (40pi, pi), (41pi, 2pi), (42pi, 3pi), (43pi, 2pi), (44pi, pi), (45pi, 0), (46pi, 0), (47pi, pi), (48pi, 2pi), (49pi, 3pi), (50pi, 2pi), (51pi, pi), (52pi, 0), (53pi, 0), (54pi, pi), (55pi, 2pi), (56pi, 3pi), (57pi, 2pi), (58pi, pi), (59pi, 0), (60pi, 0), (61pi, pi), (62pi, 2pi), (63pi, 3pi), (64pi, 2pi), (65pi, pi), (66pi, 0), (67pi, 0), (68pi, pi), (69pi, 2pi), (70pi, 3pi), (71pi, 2pi), (72pi, pi), (73pi, 0), (74pi, 0), (75pi, pi), (76pi, 2pi), (77pi, 3pi), (78pi, 2pi), (79pi, pi), (80pi, 0), (81pi, 0), (82pi, pi), (83pi, 2pi), (84pi, 3pi), (85pi, 2pi), (86pi, pi), (87pi, 0), (88pi, 0), (89pi, pi), (90pi, 2pi), (91pi, 3pi), (92pi, 2pi), (93pi, pi), (94pi, 0), (95pi, 0), (96pi, pi), (97pi, 2pi), (98pi, 3pi), (99pi, 2pi), (100pi, pi), (101pi, 0), (102pi, 0), (103pi, pi), (104pi, 2pi), (105pi, 3pi), (106pi, 2pi), (107pi, pi), (108pi, 0), (109pi, 0), (110pi, pi), (111pi, 2pi), (112pi, 3pi), (113pi, 2pi), (114pi, pi), (115pi, 0), (116pi, 0), (117pi, pi), (118pi, 2pi), (119pi, 3pi), (120pi, 2pi), (121pi, pi), (122pi, 0), (123pi, 0), (124pi, pi), (125pi, 2pi), (126pi, 3pi), (127pi, 2pi), (128pi, pi), (129pi, 0), (130pi, 0), (131pi, pi), (132pi, 2pi), (133pi, 3pi), (134pi, 2pi), (135pi, pi), (136pi, 0), (137pi, 0), (138pi, pi), (139pi, 2pi), (140pi, 3pi), (141pi, 2pi), (142pi, pi), (143pi, 0), (144pi, 0), (145pi, pi), (146pi, 2pi), (147pi, 3pi), (148pi, 2pi), (149pi, pi), (150pi, 0), (151pi, 0), (152pi, pi), (153pi, 2pi), (154pi, 3pi), (155pi, 2pi), (156pi, pi), (157pi, 0), (158pi, 0), (159pi, pi), (160pi, 2pi), (161pi, 3pi), (162pi, 2pi), (163pi, pi), (164pi, 0), (165pi, 0), (166pi, pi), (167pi, 2pi), (168pi, 3pi), (169pi, 2pi), (170pi, pi), (171pi, 0), (172pi, 0), (173pi, pi), (174pi, 2pi), (175pi, 3pi), (176pi, 2pi), (177pi, pi), (178pi, 0), (179pi, 0), (180pi, pi), (181pi, 2pi), (182pi, 3pi), (183pi, 2pi), (184pi, pi), (185pi, 0), (186pi, 0), (187pi, pi), (188pi, 2pi), (189pi, 3pi), (190pi, 2pi), (191pi, pi), (192pi, 0), (193pi, 0), (194pi, pi), (195pi, 2pi), (196pi, 3pi), (197pi, 2pi), (198pi, pi), (199pi, 0), (200pi, 0), (201pi, pi), (202pi, 2pi), (203pi, 3pi), (204pi, 2pi), (205pi, pi), (206pi, 0), (207pi, 0), (208pi, pi), (209pi, 2pi), (210pi, 3pi), (211pi, 2pi), (212pi, pi), (213pi, 0), (214pi, 0), (215pi, pi), (216pi, 2pi), (217pi, 3pi), (218pi, 2pi), (219pi, pi), (220pi, 0), (221pi, 0), (222pi, pi), (223pi, 2pi), (224pi, 3pi), (225pi, 2pi), (226pi, pi), (227pi, 0), (228pi, 0), (229pi, pi), (230pi, 2pi), (231pi, 3pi), (232pi, 2pi), (233pi, pi), (234pi, 0), (235pi, 0), (236pi, pi), (237pi, 2pi), (238pi, 3pi), (239pi, 2pi), (240pi, pi), (241pi, 0), (242pi, 0), (243pi, pi), (244pi, 2pi), (245pi, 3pi), (246pi, 2pi), (247pi, pi), (248pi, 0), (249pi, 0), (250pi, pi), (251pi, 2pi), (252pi, 3pi), (253pi, 2pi), (254pi, pi), (255pi, 0), (256pi, 0), (257pi, pi), (258pi, 2pi), (259pi, 3pi), (260pi, 2pi), (261pi, pi), (262pi, 0), (263pi, 0), (264pi, pi), (265pi, 2pi), (266pi, 3pi), (267pi, 2pi), (268pi, pi), (269pi, 0), (270pi, 0), (271pi, pi), (272pi, 2pi), (273pi, 3pi), (274pi, 2pi), (275pi, pi), (276pi, 0), (277pi, 0), (278pi, pi), (279pi, 2pi), (280pi, 3pi), (281pi, 2pi), (282pi, pi), (283pi, 0), (284pi, 0), (285pi, pi), (286pi, 2pi), (287pi, 3pi), (288pi, 2pi), (289pi, pi), (290pi, 0), (291pi, 0), (292pi, pi), (293pi, 2pi), (294pi, 3pi), (295pi, 2pi), (296pi, pi), (297pi, 0), (298pi, 0), (299pi, pi), (300pi, 2pi), (301pi, 3pi), (302pi, 2pi), (303pi, pi), (304pi, 0), (305pi, 0), (306pi, pi), (307pi, 2pi), (308pi, 3pi), (309pi, 2pi), (310pi, pi), (311pi, 0), (312pi, 0), (313pi, pi), (314pi, 2pi), (315pi, 3pi), (316pi, 2pi), (317pi, pi), (318pi, 0), (319pi, 0), (320pi, pi), (321pi, 2pi), (322pi, 3pi), (323pi, 2pi), (324pi, pi), (325pi, 0), (326pi, 0), (327pi, pi), (328pi, 2pi), (329pi, 3pi), (330pi, 2pi), (331pi, pi), (332pi, 0), (333pi, 0), (334pi, pi), (335pi, 2pi), (336pi, 3pi), (337pi, 2pi), (338pi, pi), (339pi, 0), (340pi, 0), (341pi, pi), (342pi, 2pi), (343pi, 3pi), (344pi, 2pi), (345pi, pi), (346pi, 0), (347pi, 0), (348pi, pi), (349pi, 2pi), (350pi, 3pi), (351pi, 2pi), (352pi, pi), (353pi, 0), (354pi, 0), (355pi, pi), (356pi, 2pi), (357pi, 3pi), (358pi, 2pi), (359pi, pi), (360pi, 0), (361pi, 0), (362pi, pi), (363pi, 2pi), (364pi, 3pi), (365pi, 2pi), (366pi, pi), (367pi, 0), (368pi, 0), (369pi, pi), (370pi, 2pi), (371pi, 3pi), (372pi, 2pi), (373pi, pi), (374pi, 0), (375pi, 0), (376pi, pi), (377pi, 2pi), (378pi, 3pi), (379pi, 2pi), (380pi, pi), (381pi, 0), (382pi, 0), (383pi, pi), (384pi, 2pi), (385pi, 3pi), (386pi, 2pi), (387pi, pi), (388pi, 0), (389pi, 0), (390pi, pi), (391pi, 2pi), (392pi, 3pi), (393pi, 2pi), (394pi, pi), (395pi, 0), (396pi, 0), (397pi, pi), (398pi, 2pi), (399pi, 3pi), (400pi, 2pi), (401pi, pi), (402pi, 0), (403pi, 0), (404pi, pi), (405pi, 2pi), (406pi, 3pi), (407pi, 2pi), (408pi, pi), (409pi, 0), (410pi, 0), (411pi, pi), (412pi, 2pi), (413pi, 3pi), (414pi, 2pi), (415pi, pi), (416pi, 0), (417pi, 0), (418pi, pi), (419pi, 2pi), (420pi, 3pi), (421pi, 2pi), (422pi, pi), (423pi, 0), (424pi, 0), (425pi, pi), (426pi, 2pi), (427pi, 3pi), (428pi, 2pi), (429pi, pi), (430pi, 0), (431pi, 0), (432pi, pi), (433pi, 2pi), (434pi, 3pi), (435pi, 2pi), (436pi, pi), (437pi, 0), (438pi, 0), (439pi, pi), (440pi, 2pi), (441pi, 3pi), (442pi, 2pi), (443pi, pi), (444pi, 0), (445pi, 0), (446pi, pi), (447pi, 2pi), (448pi, 3pi), (449pi, 2pi), (450pi, pi), (451pi, 0), (452pi, 0), (453pi, pi), (454pi, 2pi), (455pi, 3pi), (456pi, 2pi), (457pi, pi), (458pi, 0), (459pi, 0), (460pi, pi), (461pi, 2pi), (462pi, 3pi), (463pi, 2pi), (464pi, pi), (465pi, 0), (466pi, 0), (467pi, pi), (468pi, 2pi), (469pi, 3pi), (470pi, 2pi), (471pi, pi), (472pi, 0), (473pi, 0), (474pi, pi), (475pi, 2pi), (476pi, 3pi), (477pi, 2pi), (478pi, pi), (479pi, 0), (480pi, 0), (481pi, pi), (482pi, 2pi), (483pi, 3pi), (484pi, 2pi), (485pi, pi), (486pi, 0), (487pi, 0), (488pi, pi), (489pi, 2pi), (490pi, 3pi), (491pi, 2pi), (492pi, pi), (493pi, 0), (494pi, 0), (495pi, pi), (496pi, 2pi), (497pi, 3pi), (498pi, 2pi), (499pi, pi), (499pi, 0), (500pi, 0), (501pi, pi), (502pi, 2pi), (503pi, 3pi), (504pi, 2pi), (505pi, pi), (506pi, 0), (507pi, 0), (508pi, pi), (509pi, 2pi), (510pi, 3pi), (511pi, 2pi), (512pi, pi), (513pi, 0), (514pi, 0), (515pi, pi), (516pi, 2pi), (517pi, 3pi), (518pi, 2pi), (519pi, pi), (519pi, 0), (520pi, 0), (521pi, pi), (522pi, 2pi), (523pi, 3pi), (524pi, 2pi), (525pi, pi), (526pi, 0), (527pi, 0), (528pi, pi), (529pi, 2pi), (530pi, 3pi), (531pi, 2pi), (532pi, pi), (533pi, 0), (534pi, 0), (535pi, pi), (536pi, 2pi), (537pi, 3pi), (538pi, 2pi), (539pi, pi), (539pi, 0), (540pi, 0), (541pi, pi), (542pi, 2pi), (543pi, 3pi), (544pi, 2pi), (545pi, pi), (546pi, 0), (547pi, 0), (548pi, pi), (549pi, 2pi), (550pi, 3pi), (551pi, 2pi), (552pi, pi), (553pi, 0), (554pi, 0), (555pi, pi), (556pi, 2pi), (557pi, 3pi), (558pi, 2pi), (559pi, pi), (559pi, 0), (560pi, 0), (561pi, pi), (562pi, 2pi), (563pi, 3pi), (564pi, 2pi), (565pi, pi), (566pi, 0), (567pi, 0), (568pi, pi), (569pi, 2pi), (570pi, 3pi), (571pi, 2pi), (572pi, pi), (573pi, 0), (574pi, 0), (575pi, pi), (576pi, 2pi), (577pi, 3pi), (578pi, 2pi), (579pi, pi), (579pi, 0), (580pi, 0), (581pi, pi), (582pi, 2pi), (583pi, 3pi), (584pi, 2pi), (585pi, pi), (586pi, 0), (587pi, 0), (588pi, pi), (589pi, 2pi), (590pi, 3pi), (591pi, 2pi), (592pi, pi), (593pi, 0), (594pi, 0), (595pi, pi), (596pi, 2pi), (597pi, 3pi), (598pi, 2pi), (599pi, pi), (599pi, 0), (600pi, 0), (601pi, pi), (602pi, 2pi), (603pi, 3pi), (604pi, 2pi), (605pi, pi), (606pi, 0), (607pi, 0), (608pi, pi), (609pi, 2pi), (610pi, 3pi), (611pi, 2pi), (612pi, pi), (613pi, 0), (614pi, 0), (615pi, pi), (616pi, 2pi), (617pi, 3pi), (618pi, 2pi), (619pi, pi), (619pi, 0), (620pi, 0), (621pi, pi), (622pi, 2pi), (623pi, 3pi), (624pi, 2pi), (625pi, pi), (626pi, 0), (627pi, 0), (628pi, pi), (629pi, 2pi), (630pi, 3pi), (631pi, 2pi), (632pi, pi), (633pi, 0), (634pi, 0), (635pi, pi), (636pi, 2pi), (637pi, 3pi), (638pi, 2pi), (639pi, pi), (639pi, 0), (640pi, 0), (641pi, pi), (642pi, 2pi), (643pi, 3pi), (644pi, 2pi), (645pi, pi), (646pi, 0), (647pi, 0), (648pi, pi), (649pi, 2pi), (650pi, 3pi), (651pi, 2pi), (652pi, pi), (653pi, 0), (654pi, 0), (655pi, pi), (656pi, 2pi), (657pi, 3pi), (658pi, 2pi), (659pi, pi), (659pi, 0), (660pi, 0), (661pi, pi), (662pi, 2pi), (663pi, 3pi), (664pi, 2pi), (665pi, pi), (666pi, 0), (667pi, 0), (668pi, pi), (669pi, 2pi), (670pi, 3pi), (671pi, 2pi), (672pi, pi), (673pi, 0), (674pi, 0), (675pi, pi), (676pi, 2pi), (677pi, 3pi), (678pi, 2pi), (679pi, pi), (679pi, 0), (680pi, 0), (681pi, pi), (682pi, 2pi), (683pi, 3pi), (684pi, 2pi), (685pi, pi), (686pi, 0), (687pi, 0), (688pi, pi), (689pi, 2pi), (690pi, 3pi), (691pi, 2pi), (692pi, pi), (693pi, 0), (694pi, 0), (695pi, pi), (696pi, 2pi), (697pi, 3pi), (698pi, 2pi), (699pi, pi), (699pi, 0), (700pi, 0), (701pi, pi), (702pi, 2pi), (703pi, 3pi), (704pi, 2pi), (705pi, pi), (706pi, 0), (707pi, 0), (708pi, pi), (709pi, 2pi), (710pi, 3pi), (711pi, 2pi), (712pi, pi), (713pi, 0), (714pi, 0), (715pi, pi), (716pi, 2pi), (717pi, 3pi), (718pi, 2pi), (719pi, pi), (719pi, 0), (720pi, 0), (721pi, pi), (722pi, 2pi), (723pi, 3pi), (724pi, 2pi), (725pi, pi), (726pi, 0), (727pi, 0), (728pi, pi), (729pi, 2pi), (730pi, 3pi), (731pi, 2pi), (732pi, pi), (733pi, 0), (734pi, 0), (735pi, pi), (736pi, 2pi), (737pi, 3pi), (738pi, 2pi), (739pi, pi), (739pi, 0), (740pi, 0), (741pi, pi), (742pi, 2pi), (743pi, 3pi), (744pi, 2pi), (745pi, pi), (746pi, 0), (747pi, 0), (748pi, pi), (749pi, 2pi), (750pi, 3pi), (751pi, 2pi), (752pi, pi), (753pi, 0), (754pi, 0), (755pi, pi), (756pi, 2pi), (757pi, 3pi), (758pi, 2pi), (759pi, pi), (759pi, 0), (760pi, 0), (761pi, pi), (762pi, 2pi), (763pi, 3pi), (764pi, 2pi), (765pi, pi), (766pi, 0), (767pi, 0), (768pi, pi), (769pi, 2pi), (770pi, 3pi), (771pi, 2pi), (772pi, pi), (773pi, 0), (774pi, 0), (775pi, pi), (776pi, 2pi), (777pi, 3pi), (778pi, 2pi), (779pi, pi), (779pi, 0), (780pi, 0), (781pi, pi), (782pi, 2pi), (783pi, 3pi), (784pi, 2pi), (785pi, pi), (786pi, 0), (787pi, 0), (788pi, pi), (789pi, 2pi), (790pi, 3pi), (791pi, 2pi), (792pi, pi), (793pi, 0), (794pi, 0), (795pi, pi), (796pi, 2pi), (797pi, 3pi), (798pi, 2pi), (799pi, pi), (799pi, 0), (800pi, 0), (801pi, pi), (802pi, 2pi), (803pi, 3pi), (804pi, 2pi), (805pi, pi), (806pi, 0), (807pi, 0), (808pi, pi), (809pi, 2pi), (810pi, 3pi), (811pi, 2pi), (812pi, pi), (813pi, 0), (814pi, 0), (815pi, pi), (816pi, 2pi), (817pi, 3pi), (818pi, 2pi), (819pi, pi), (819pi, 0), (820pi, 0), (821pi, pi), (822pi, 2pi), (823pi, 3pi), (824pi, 2pi), (825pi, pi), (826pi, 0), (827pi, 0), (828pi, pi), (829pi, 2pi), (830pi, 3pi), (831pi, 2pi), (832pi, pi), (833pi, 0), (834pi, 0), (835pi, pi), (836pi, 2pi), (837pi, 3pi), (838pi, 2pi), (839pi, pi), (839pi, 0), (840pi, 0), (841pi, pi), (842pi, 2pi), (843pi, 3pi), (844pi, 2pi), (845pi, pi), (846pi, 0), (847pi, 0), (848pi, pi), (849pi, 2pi), (850pi, 3pi), (851pi, 2pi), (852pi, pi), (853pi, 0), (854pi, 0), (855pi, pi), (856pi, 2pi), (857pi, 3pi), (858pi, 2pi), (859pi, pi), (859pi, 0), (860pi, 0), (861pi, pi), (862pi, 2pi), (863pi, 3pi), (864pi, 2pi), (865pi, pi), (866pi, 0), (867pi, 0), (868pi, pi), (869pi, 2pi), (870pi, 3pi), (871pi, 2pi), (872pi, pi), (873pi, 0), (874pi, 0), (875pi, pi), (876pi, 2pi), (877pi, 3pi), (878pi, 2pi), (879pi, pi), (879pi, 0), (880pi, 0), (881pi, pi), (882pi, 2pi), (883pi, 3pi), (884pi, 2pi), (885pi, pi), (886pi, 0), (887pi, 0), (888pi, pi), (889pi, 2pi), (890pi, 3pi), (891pi, 2pi), (892pi, pi), (893pi, 0), (894pi, 0), (895pi, pi), (896pi, 2pi), (897pi, 3pi), (898pi, 2pi), (899pi, pi), (899pi, 0), (900pi, 0), (901pi, pi), (902pi, 2pi), (903pi, 3pi), (904pi, 2pi), (905pi, pi), (906pi, 0), (907pi, 0), (908pi, pi), (909pi, 2pi), (910pi, 3pi), (911pi, 2pi), (912pi, pi), (913pi, 0), (914pi, 0), (915pi, pi), (916pi, 2pi), (917pi, 3pi), (918pi, 2pi), (919pi, pi), (919pi, 0), (920pi, 0), (921pi, pi), (922pi, 2pi), (923pi, 3pi), (924pi, 2pi), (925pi, pi), (926pi, 0), (927pi, 0), (928pi, pi), (929pi, 2pi), (930pi, 3pi), (931pi, 2pi), (932pi, pi), (933pi, 0), (934pi, 0), (935pi, pi), (936pi, 2pi), (937pi, 3pi), (938pi, 2pi), (939pi, pi), (939pi, 0), (940pi, 0), (941pi, pi), (942pi, 2pi), (943pi, 3pi), (944pi, 2pi), (945pi, pi), (946pi, 0), (947pi, 0), (948pi, pi), (949pi, 2pi), (950pi, 3pi), (951pi, 2pi), (952pi, pi), (953pi, 0), (954pi, 0), (955pi, pi), (956pi, 2pi), (957pi, 3pi), (958pi, 2pi), (959pi, pi), (959pi, 0), (960pi, 0), (961pi, pi), (962pi, 2pi), (963pi, 3pi), (964pi, 2pi), (965pi, pi), (966pi, 0), (967pi, 0), (968pi, pi), (969pi, 2pi), (970pi, 3pi), (971pi, 2pi), (972pi, pi), (973pi, 0), (974pi, 0), (975pi, pi), (976pi, 2pi), (977pi, 3pi), (978pi, 2pi), (979pi, pi), (979pi, 0), (980pi, 0), (981pi, pi), (982pi, 2pi), (983pi, 3pi), (984pi, 2pi), (985pi, pi), (986pi, 0), (987pi, 0), (988pi, pi), (989pi, 2pi), (990pi, 3pi), (991pi, 2pi), (992pi, pi), (993pi, 0), (994pi, 0), (995pi, pi), (996pi, 2pi), (997pi, 3pi), (998pi, 2pi), (999pi, pi), (999pi

показать, что условия (а)–(д) для  $\mathcal{F}_n$  выполнены внутри  $\mathcal{D}$ . Длины сингулярных компонент  $l_\alpha$  и  $l_\beta$  конического многообразия  $\mathbb{L}_n(\alpha, \beta)$  удовлетворяют соотношениям

$$\cos \frac{l_\alpha}{2} = \langle P_1, N \rangle, \quad \cos \frac{l_\beta}{2} = \langle P_2, S \rangle.$$

Действуя аналогично доказательству теоремы 1, получим

$$l_\alpha = l_\beta = \frac{\alpha + \beta}{2}n - \pi(n - 1).$$

Зная координаты всех вершин многогранника, мы можем проверить непосредственными вычислениями, что условие (е) для многогранника  $\mathcal{F}_n$  выполнено для всех  $(\alpha, \beta)$  внутри области  $\mathcal{D}$ .

Для нахождения объема  $\text{Vol } \mathbb{L}_n(\alpha, \beta)$  воспользуемся формулой Шлефли [16]

$$d \text{Vol } \mathbb{L}_n(\alpha, \beta) = \frac{l_\alpha}{2} d\alpha + \frac{l_\beta}{2} d\beta = \left( \frac{\alpha + \beta}{2} n - \pi(n - 1) \right) d \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

Интегрируя с учетом того, что при

$$\alpha = \beta \rightarrow \pi \frac{n - 1}{n}$$

фундаментальный многогранник  $\mathcal{F}_n$  стягивается в точку (т. е. его объем стремится к нулю), получим последнее утверждение теоремы.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** При условии  $\alpha = \beta$  двустороннее неравенство из формулировки теоремы 2 совпадает с неравенством, приведенным в [10, предложение 2.2].

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Отметим, что длины сингулярных компонент конического многообразия  $\mathbb{L}_n(\alpha, \beta)$  равны между собой даже в случае  $\alpha \neq \beta$ .

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания, которые привели к улучшению работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Thurston W. P. The geometry and topology of 3-manifolds. Princeton: Princeton Univ. Press, 1977.
2. Rolfsen D. Knots and links. Berkeley: Publish or Perish Inc., 1976.
3. Thurston W. P. Hyperbolic geometry and 3-manifolds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 48).
4. Neumann W. P. Notes on geometry and 3-manifolds, with appendix by Paul Norbury // Low dimensional topology. Bolyai Soc. Math. Studies. 1999. V. 8. P. 191–267.
5. Seifert H., Weber C. Die beiden Dodecaederräume // Math. Z. 1933. Bd 37. S. 237–253.
6. Dunbar W. D. Geometric orbifolds // Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid. 1988. V. 1. P. 67–99.
7. Derevnin D., Mednykh A., Mulazzani M. Geometry of Trefoil cone-manifold // Beitr Algebra Geom. 2008. (To appear.)
8. Hilden H. M., Lozano M. T., Montesinos-Amilibia J. M. On a remarkable polyhedron geometrizing the figure eight cone manifolds // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 1995. V. 2. P. 501–561.
9. Mednykh A., Rasskazov A. Volumes and degeneration of cone-structures on the figure-eight knot // Tokyo J. Math. 2006. V. 29, N 2. P. 445–464.
10. Porti J. Spherical cone structures on 2-bridge knots and links // Kobe J. Math. 2004. V. 21, N 1. P. 61–70.
11. Molnár E. The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries // Beitr Algebra Geom. 1997. Bd 38. Heft 2. S. 261–288.
12. Mednykh A., Rasskazov A. On the structure of the canonical fundamental set for the 2-bridge link orbifolds. Universität Bielefeld, Sonderforschungsbereich 343, "Discrete Structures in der Mathematik", Preprint 98-062. 1998.

13. *Minkus J.* The branched cyclic coverings of 2-bridge knots and links. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1982. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 35).
14. *Ratcliffe J.* Foundations of hyperbolic manifolds. New York: Springer-Verl., 1994. (Grad. Texts Math.; V. 149).
15. *Hodgson C., Rubinstein J. H.* Involutions and isotopies of lens spaces // Knot theory and manifolds (Vancouver, B.C., 1983). Berlin: Springer-Verl., 1985. P. 60–96. (Lect. Notes Math.; 1144).
16. *Hodgson C.* Degeneration and regeneration of hyperbolic structures on three-manifolds. Princeton: Thesis, 1986.

*Статья поступила 20 мая 2008 г., окончательный вариант — 5 декабря 2008 г.*

Колпаков Александр Александрович  
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090  
[kolpakov.alexander@gmail.com](mailto:kolpakov.alexander@gmail.com)

Медных Александр Дмитриевич  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Кошкина, 4, Новосибирск 630090  
[mednykh@math.nsc.ru](mailto:mednykh@math.nsc.ru)