Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 517.98

УЛЬТРАРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛУГРУПП

М. Костич, С. Пилипович

Аннотация. Исследованы ультрараспределения полугрупп с необязательно плотно определенными генераторами и связь ультрараспределений полугрупп с локально конволюционными полугруппами. Доказана теорема типа теоремы возмущения для ультрараспределений полугрупп Жевре.

Ключевые слова: ультрараспределение полугруппы, конволюционная полугруппа.

§ 1. Введение и предварительные сведения

Теория распределений полугрупп с плотно определенными образующими берет начало в работе Лионса [1]. Подход Лионса к распределениям полугрупп вдохновил многих математиков на исследование различных классов некорректно поставленных абстрактных задач Коши. Интегрированные полугруппы введены Арендтом в статье [2], которая стала определяющей в дальнейшем развитии теории. В качестве обобщения понятия интегрированной полугруппы, Чорэнеску и Лумер рассмотрели в [3] класс конволюционных полугрупп. Достаточно полную информацию по общей теории интегрированных, C-регуляризованных и конволюционных полугрупп можно найти в [4–7]. Ультрараспределения полугрупп с плотно определенными генераторами рассмотрены Шазареном в [8, 9] (см. также [10–13]), а первые результаты, связанные с ультрараспределениями полугрупп с неплотно определенными генераторами, получены Комацу в [14]. Отметим результаты исследований Билза [10, 15], Чорэнеску, Жидо [16], Кунстманна [17] о ω-ультрараспределениях полугрупп. Следуя подходам Кунстманна [18] и Вана [19] к ультрараспределениям полугрупп, мы исследуем (экспоненциальные) ультрараспределения полугрупп в рамках теории Данжуа — Карлемана — Комацу. Главными целями нашего анализа являются изучение существования фундаментальных решений соответствующих задач Коши, а также спектральных характеристик генераторов ультрараспределений полугрупп.

Статья организована следующим образом. В § 2 введено понятие предраспределения полугруппы и ее генератора, установлена связь ультрараспределения полугруппы с уравнением сверточного типа и перенесено множество результатов, известных для распределений полугрупп, на ультрараспределения полугруппы. С использованием теории конволюционных полугрупп доказано (теорема 7), что класс ультрараспределений полугрупп Жевре устойчив относительно ограниченных коммутирующих возмущений. Основная тема теорем 8

This research was supported by grant 144016 of Ministry of Science and Technological Development, Republic of Serbia.

и 9 — рассмотрение многочленов от операторов (ср. с [5, § XXIV]) как генераторов ультрараспределений полугрупп Жевре (синусов). Наконец, дано несколько поясняющих примеров, подтверждающих важность понятия неплотных ультрараспределений полугрупп.

Ниже предполагается (за единственным исключением леммы 1(c)), что (M_p) — последовательность положительных чисел такая, что $M_0 = 1$ и выполнены следующие условия:

(M.1) $M_p^2 \le M_{p+1}M_{p-1}$, $p \in \mathbb{N}$,

(M.2) $M_p \le AH^p \min\limits_{0\le i\le p} M_i M_{p-i}$, $p \in \mathbb{N}$, для некоторых A, $H > 0$,

(M.3)$'$ $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty$.

Пусть $s > 1$. Последовательности Жевре $(p!^s)$, (p^{ps}) и $(\Gamma(1+ps))$ удовлетворяют сформулированным выше условиям. Ассоциированная функция последовательности (M_p) определяется следующим образом:

$$M(\lambda) := \sup\left\{\ln \frac{|\lambda|^p}{M_p} : p \in \mathbb{N}_0\right\}, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0, \quad \text{и} \quad M(0) := 0.$$

Как известно, функция $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ возрастающая и абсолютно непрерывная. Для $p \in \mathbb{N}$ положим $m_p := M_p/M_{p-1}$ и заметим, что из (M.1) следует возрастание последовательности (m_p).

Мы отсылаем читателя к [20, 21] за определениями пространств ультрадифференцируемых функций Берлинга $\mathscr{D}^{(M_p)}$ (соответственно Румье $\mathscr{D}^{\{M_p\}}$) и сопряженных к ним, которые по определению являются пространствами ультрараспределений Берлинга (соответственно Румье). Используя обозначение $*$ для обоих случаев скобок, определим $\mathscr{D}^{*\prime}(E)$ как пространство непрерывных линейных функций из $\mathscr{D}^*$ в E; символ $\mathscr{D}_0^*$ обозначает пространство элементов в $\mathscr{D}^*$ с носителями в $[0,\infty)$, а символ $\mathscr{E}_0^{*\prime}$ — пространство ультрараспределений, носители которых — компактные подмножества $[0,\infty)$. Пространство $\mathscr{D}_0^{*\prime}(E)$ состоит из E-значных ультрараспределений с носителем в $[0,\infty)$. Основные сведения о векторнозначных пространствах ультрараспределений можно найти в [21].

Поскольку нам нужна структурная теорема для ультрараспределения с одноточечным носителем (ср. с [21]), придется использовать в некоторых утверждениях вместо (M.3)$'$ слегка более сильное условие

$$\text{(M.3)} \quad \sup\left\{\sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{M_{q-1}M_{p+1}}{pM_pM_q} : p \in \mathbb{N}\right\} \le B \quad \text{для некоторой константы } B > 0.$$

Это условие выполнено, если $M_p = p!^s$, $s > 1$.

Пространства умеренных ультрараспределений типа Берлинга и Румье определены в [22] как сильно сопряженные пространства к соответствующим пространствам пробных функций:

$$\mathscr{S}^{(M_p)} := \operatorname{proj}\lim_{k\to\infty} \mathscr{S}^{M_p,k} \ \text{(соответственно } \mathscr{S}^{\{M_p\}} := \operatorname{ind}\lim_{k\to 0} \mathscr{S}^{M_p,k}\text{)},$$

где

$$\mathscr{S}^{M_p,k} := \left\{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \|\phi\|_{M_p,k} < \infty\right\}, \quad k > 0,$$

и

$$\|\phi\|_{M_p,k} := \sup\left\{\frac{k^{\alpha+\beta}}{M_\alpha M_\beta}(1+|t|^2)^{\beta/2}|\phi^{(\alpha)}(t)| : t \in \mathbb{R},\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{N}_0\right\};$$

$\mathscr{S}^{(M_p)}$ и $\mathscr{S}^{\{M_p\}\prime}$ — (FN)-пространства, а $\mathscr{S}^{\{M_p\}}$ и $\mathscr{S}^{(M_p)\prime}$ — (LN)-пространства. Более того, справедливы соотношения $\mathscr{D} \hookrightarrow \mathscr{S}^* \hookrightarrow \mathscr{S} \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow \mathscr{S}' \hookrightarrow \mathscr{S}^{*\prime} \hookrightarrow \mathscr{D}'$, где символом $\hookrightarrow$ обозначено непрерывное плотное вложение. Пространство $\mathscr{S}^{*\prime}(E)$ состоит из всех линейных непрерывных отображений из $\mathscr{S}^*$ в E, а его топология определяется так же, как и в случае векторнозначных распределений [7].

С этого момента предполагаем, что E — нетривиальное комплексное банахово пространство и A — замкнутый линейный оператор из E в E. Символом $L(E)$ обозначается банахова алгебра непрерывных линейных отображений из E в E; далее $N(A)$, $R(A)$, $\rho(A)$, $\sigma(A)$ и $D_\infty(A)$ обозначают ядро, образ, резольвентное множество, спектр и множество $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$ соответственно. Символом $[D(A)]$ обозначим банахово пространство $D(A)$ с нормой графика.

Ниже всегда будем предполагать, что $\tau \in (0,\infty]$, K — комплекснозначная локально интегрируемая функция на $[0,\tau)$ и K не равна нулю тождественно. Положим $\Theta(t) := \int\limits_0^t K(s)\,ds$, $t \in [0,\tau)$. Ясно, что Θ — абсолютно непрерывная функция на $[0,\tau)$ и $\Theta'(t) = K(t)$ для п. в. $t \in [0,\tau)$. Иногда будем использовать следующее условие на функцию K.

(P1) K преобразуема по Лапласу, т. е. $K \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ и существует $\beta \in \mathbb{R}$ такое, что величина

$$\widetilde{K}(\lambda) := \mathscr{L}(K)(\lambda) := \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} K(t)\,dt := \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b e^{-\lambda t} K(t)\,dt$$

существует для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что $\operatorname{Re}\lambda > \beta$. Положим $\operatorname{abs}(K) := \inf\{\operatorname{Re}\lambda : \widetilde{K}(\lambda)$ определено$\}$.

Напомним, что функция $K \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\tau))$ называется *ядром*, если для каждого $\phi \in C([0,\tau))$ из того, что $\int\limits_0^t K(t-s)\phi(s)\,ds = 0$, $t \in [0,\tau)$, следует, что $\phi \equiv 0$; по известной теореме Титчмарша [4] условие $0 \in \operatorname{supp} K$ влечет, что K — ядро. Следующее семейство экспоненциально ограниченных непрерывных ядер играет ключевую роль в изучении возмущений ультрараспределений полугрупп типа Жевре: $K_{a,\delta}(t) =: \mathscr{L}^{-1}(e^{-a\lambda^\delta})(t)$, $t \geq 0$, где $a > 0$, $\delta \in (0,1)$ и $\mathscr{L}^{-1}$ обозначает преобразование, обратное к преобразованию Лапласа. Заметим, что $|e^{-a\lambda^\delta}| \leq e^{-a\cos(\frac{\delta\pi}{2})|\lambda|^\delta}$, $a > 0$, $\delta \in (0,1)$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Пусть A — замкнутый линейный оператор, $K \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\tau))$ и $0 < \tau \leq \infty$. Если существует сильно непрерывное семейство $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$ в $L(E)$ такое, что

(i) $S_K(t)A \subseteq AS_K(t)$, $t \in [0,\tau)$,

(ii) $S_K(t)C = CS_K(t)$, $t \in [0,\tau)$,

(iii) для каждого $x \in E$ и $t \in [0,\tau)$

$$\int\limits_0^t S_K(s)x\,ds \in D(A) \quad \text{и} \quad A\int\limits_0^t S_K(s)x\,ds = S_K(t)x - \Theta(t)Cx,$$

то говорят, что A — субгенератор (*локальной*) *K-свернутой C-полугруппы* $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$; если $\tau = \infty$ то говорят, что $(S_K(t))_{t\geq 0}$ — *экспоненциально ограниченная K-свернутая C-полугруппа* с субгенератором A, если дополнительно существуют константы $M > 0$ и $\omega \in \mathbb{R}$ такие, что $\|S_K(t)\| \le Me^{\omega t}$, $t \ge 0$. Интегральный генератор $\widehat{A}$ полугруппы $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$ определяется как

$$\widehat{A} := \left\{ (x,y) \in E \times E : S_K(t)x - \Theta(t)Cx = \int\limits_0^t S_K(s)y\,ds,\ t \in [0,\tau) \right\}$$

и является максимальным субгенератором $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$ относительно теоретико-множественного включения. Множество, состоящее из всех субгенераторов $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$, одноточечно, если $C = I$ (в этом случае также говорят, что $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$ — K-*свернутая полугруппа*) или $\rho(\widehat{A}) \neq \varnothing$. Понятия K-свернутых C-косинусовых функций, синусов ультрараспределений и дальнейшие свойства K-свернутых C-полугрупп можно найти в [6] и [23].

Нам понадобится следующая полезная

Лемма 1 [6, 24, 25]. (a) *Пусть* $a > 0$, $\delta \in (0,1)$, $B \in L(E)$, A — *интегральный генератор (локальной)* $K_{a,\delta}$-*свернутой полугруппы* $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$ *и* $BA \subseteq AB$. *Тогда* $A+B$ — *интегральный генератор (локальной)* $K_{a,\delta}$-*свернутой полугруппы* $(S^B(t))_{t\in[0,\tau)}$.

(b) *Пусть* $\alpha > 0$, $M > 0$, $\beta \ge 0$, $\Phi : \mathbb{C} \to [0,\infty)$, $|K(t)| \le Me^{\beta t}$, $t \ge 0$, $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$ — *локальная* K-*свернутая полугруппа, порожденная* A, *и*

$$\frac{1}{|\widetilde{K}(\lambda)|} \le e^{\Phi(\alpha\lambda)} \text{ для всех } \lambda \in \mathbb{C} \text{ таких, что } \operatorname{Re}\lambda > \beta \text{ и } \widetilde{K}(\lambda) \neq 0.$$

Тогда для каждого $t \in (0,\tau)$ *существуют* $\beta(t) > 0$ *и* $m(t) > 0$ *такие, что*

$$\Lambda_{t,\alpha,\beta(t)} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \widetilde{K}(\lambda) \neq 0,\ \operatorname{Re}\lambda \ge \frac{\Phi(\alpha\lambda)}{t} + \beta(t) \right\} \subseteq \rho(A),$$

$$\|R(\lambda : A)\| \le m(t)e^{\Phi(\alpha\lambda)}, \quad \lambda \in \Lambda_{t,\alpha,\beta(t)},\ \widetilde{K}(\lambda) \neq 0.$$

(c) *Предположим, что* (M_p) *удовлетворяет* (M.1) *и* (M.2). *Тогда существует* $b > 0$ *такое, что для всякого* $l \ge 1$ *существует* $e_l > 0$, *для которого* $lM(\lambda) \le M(b^{l-1}\lambda) + e_l$, $\lambda \ge 0$.

В данной работе используем свертки $f *_0 g$ и $f * g$ of комплекснозначных локально интегрируемых функций f и g:

$$f *_0 g(t) =: \int\limits_0^t f(t-s)g(s)\,ds \quad \text{и} \quad f * g(t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда $*_0 : \mathscr{D}^* \times \mathscr{D}^* \to \mathscr{D}^*$ и свойства непрерывности операции $*_0$ остаются похожими на свойства непрерывности $*$. Свертка ультрараспределений со значениями в банаховом пространстве берется в смысле [17, следствие 3.6].

Предложение 1. *Пусть* X, Y, Z — *банаховы пространства, и пусть* $b : X \times Y \to Z$ *билинейно и непрерывно. Тогда существует единственное билинейное непрерывное по каждому аргументу отображение* $*_b : \mathscr{D}_0^{*\prime}(X) \times \mathscr{D}_0^{*\prime}(Y) \to \mathscr{D}_0^{*\prime}(Z)$ *такое, что*

$$(S \otimes x) *_b (T \otimes y) = S * T \otimes b(x,y), \quad S, T \in \mathscr{D}_0^{*\prime},\ x \in X,\ y \in Y.$$

§ 2. Полугруппы-ультрараспределения

Определим L-ультрараспределение полугруппы, следуя [1], и ультрараспределение полугруппы, следуя [18, 19].

Определение 1. Пусть $G \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(L(E))$.

(a) Говорят, что G — *L-ультрараспределение полугруппы класса* $*$, если выполнены следующие условия:

(U.1) $G(\phi * \psi) = G(\phi)G(\psi)$, $\phi, \psi \in \mathscr{D}_0^*$;

(U.2) $\mathscr{N}(G) := \bigcap\limits_{\phi \in \mathscr{D}_0^*} N(G(\phi)) = \{0\}$;

(U.3) $\mathscr{R}(G) := \bigcup\limits_{\phi \in \mathscr{D}_0^*} R(G(\phi))$ плотно в E;

(U.4) для всякого $x \in \mathscr{R}(G)$ существует функция $u \in C([0, \infty) : E)$ такая, что $u(0) = x$ и $G(\phi)x = \int\limits_0^\infty \phi(t)u(t)\,dt$, $\phi \in \mathscr{D}^*$.

(b) Говорят, что G — *предультрараспределение полугруппы класса* $*$, если выполнены следующие условия:

(U.5) $G(\phi *_0 \psi) = G(\phi)G(\psi)$, $\phi, \psi \in \mathscr{D}^*$.

Если G удовлетворяет условиям (U.2) и (U.5), то G называется *ультрараспределением полугруппы класса* $*$, коротко УРПГ. Пред-УРПГ G называется *плотным*, если выполнено (U.3).

(c) [11] Пусть A — замкнутый линейный оператор, и пусть $G \in \mathscr{D}_0^{(M_p)\prime}(L(E, [D(A)]))$. Тогда говорят, что G — *регулярное* (M_p)*-ультрараспределение полугруппы, порожденное* A, если

(i) $G * P = \delta' \otimes \mathrm{Id}_{[D(A)]}$ и $P * G = \delta' \otimes \mathrm{Id}_E$, где $P = \delta' \otimes I - \delta \otimes A \in \mathscr{D}_0^{(M_p)\prime}(L([D(A)], E))$;

(ii) совпадает с (U.2);

(iii) линейная оболочка $\mathscr{R}(G)$, обозначаемая символом $\langle \mathscr{R}(G) \rangle$, плотна в E.

Если $G \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(L(E))$, то можно легко убедиться, что условие (U.2) эквивалентно условию

(U.2)$'$ $\operatorname{supp} G(\cdot)x \nsubseteq \{0\}$ для любого $x \in E \setminus \{0\}$.

Если G есть пред-УРПГ класса $*$, то $\mathscr{N}(G)$ — замкнутое подпространство в E и сопряженная к G полугруппа, обозначаемая символом G^*, тоже является пред-УРПГ класса $*$. Следующий пример мотивирован примером 2.3 из [18].

Пример 1. Предположим, что $T \in L(E)$ и в случае класса Берлинга, существуют $C > 0$ и $L > 0$, а в случае класса Румье для каждого $L > 0$ существует $C > 0$ со свойством $\|T^{p+1}\| \leq C\frac{L^p}{M_p}$, $p \in \mathbb{N}_0$. Положим

$$G(\phi) := \sum_{p=0}^{\infty} \phi^{(p)}(0)T^{p+1}, \quad \phi \in \mathscr{D}^*.$$

Тогда G — пред-УРПГ класса $*$ и $\mathscr{N}(G) = E$. Отметим, что мы не требуем от оператора T нильпотентности, как в [18, пример 2.3]. Построение оператора T с указанными выше свойствами просто. Положим, например, $E := l_\infty$ и $T\langle x_1, x_2, \dots, x_p, \dots \rangle := \langle x_2/m_1, x_3/m_2, \dots, x_{p+1}/m_p, \dots \rangle, \langle x_1, x_2, \dots, x_p, \dots \rangle \in l_\infty$. Так как последовательность (m_p) возрастает, можно непосредственно убедиться, что $\|T^p\| = \frac{1}{M_p}$, $p \in \mathbb{N}_0$, и что G, определенная этим T, есть пред-УРПГ класса Берлинга. Заметим, что T не является нильпотентным оператором и соответствующий пример в случае класса Румье может быть построен аналогичным образом.

Из теоремы типа Бореля для ультрадифференцируемых функций [26] следует, что для любой комплексной последовательности (a_n) такой, что $\mathrm{card}(\{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \neq 0\}) < \infty$, существует $f \in \mathscr{D}^*$, удовлетворяющая равенствам $f^{(n)}(0) = a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Вместе со структурной теоремой для операторнозначных ультрараспределений с одноточечным носителем (ср. с [21, теорема 4.8], следует отметить, что использование условия (M.3) здесь неизбежно) и доказательством леммы 2.2 в [18] это влечет следующее

Предложение 2. *Предположим дополнительно, что выполнено условие* (M.3) *и* $\mathscr{G}$ *— пред-УРПГ класса* $*$. *Положим* $G := \mathscr{G}(\cdot)|_{\mathscr{N}(\mathscr{G})}$. *Тогда* G *— пред-УРПГ класса* $*$ *на* $\mathscr{N}(\mathscr{G})$ *и существует оператор* $T \in L(\mathscr{N}(\mathscr{G}))$ *такой, что в случае ультрараспределений Берлинга существуют* $C > 0$ *и* $L > 0$, *а в случае ультрараспределений Румье для каждого* $L > 0$ *существует* $C > 0$ *такие, что* $\|T^{j+1}\| \leq C\frac{L^j}{M_j}$, $j \in \mathbb{N}_0$, *и* $G = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \delta^{(j)} \otimes (-1)^j T^{j+1}$.

Пусть G — УРПГ класса $*$ и $T \in \mathscr{E}_0^{*\prime}$. Следуя [27], определим оператор $G(T)$:
$$G(T) =: \{(x,y) \in E \times E : G(T * \phi)x = G(\phi)y,\ \phi \in \mathscr{D}_0^*\}.$$
Ясно, что $G(\delta) = I$ и $G(T)$, $T \in \mathscr{E}_0^{*\prime}$, есть замкнутый линейный оператор. (*Инфинитезимальный*) *генератор* УРПГ G класса $*$ определяется как $A := G(-\delta')$.

Пусть $\mathbf{1}_{[0,\infty)}$ — характеристическая функция $[0,\infty)$. Для каждой функции $\varphi \in \mathscr{D}^*$ положим $\varphi_+(t) := \varphi(t)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда для каждой $\varphi \in \mathscr{D}^*$ справедливо $\varphi_+ \in \mathscr{E}_0^{*\prime}$ и определение $G(\varphi_+)$ понятно.

Следующие теоремы поясняют основные структурные свойства полугрупп-ультрараспределений. Доказательства опускаем (ср. с [20, 6, 18]), а использование символа $*$ ясно из контекста.

Теорема 1. *Пусть* G *— пред-УРПГ класса* $*$, $F := E/\mathscr{N}(G)$ *и* $q : E \to F$ *— соответствующее каноническое отображение. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Определим* $H \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(L(F))$ *равенством* $qG(\varphi) := H(\varphi)q$ *для всех* $\varphi \in \mathscr{D}^*$. *Тогда* H *—* УРПГ *класса* $*$ *в* F.

(b) $\overline{\langle\mathscr{R}(G)\rangle} = \overline{\mathscr{R}(G)}$.

(c) *Предположим, что* G *неплотна. Пусть* $R := \overline{\mathscr{R}(G)}$ *и* $H := G_{|R}$. *Тогда* H *— плотная пред-УРПГ класса* $*$ *в* R.

(d) *Сопряженная к* G *полугруппа* G^* *удовлетворяет равенству* $\mathscr{N}(G^*) = \overline{\mathscr{R}(G)}^{\circ}$. (*Здесь* $\overline{\mathscr{R}(G)}^{\circ}$ *обозначает поляру* $\overline{\mathscr{R}(G)}$.)

(e) *Если* E *рефлексивно, то* $\mathscr{N}(G) = \overline{\mathscr{R}(G^*)}^{\circ}$.

(f) G^* *есть* УРПГ *класса* $*$ *на* E^* *тогда и только тогда, когда* G *— плотная пред-УРПГ класса* $*$. *Если* E *рефлексивно, то* G^* *— плотная пред-УРПГ класса* $*$ *на* E^* *тогда и только тогда, когда* G *—* УРПГ *класса* $*$.

(g) G *—* УРПГ *класса* $*$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (U.1), (U.2) *и* (U.6), *где*

(U.6) $G(\varphi_+) = G(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}^*$.

(h) $\mathscr{N}(G) \cap \langle\mathscr{R}(G)\rangle = \{0\}$.

(i) *Пусть выполнено* (U.3). *Тогда имеем следующую эквивалентность:*
$$[(\mathrm{U.1}) \wedge (\mathrm{U.2}) \wedge (\mathrm{U.4})] \iff [(\mathrm{U.5}) \wedge (\mathrm{U.2})].$$

Теорема 2. *Пусть* G — УРПГ *класса* $*$, *и пусть* $S, T \in \mathscr{E}_0^{*\prime}$, $\varphi \in \mathscr{D}_0^*$, $\psi \in \mathscr{D}^*$ *и* $x \in E$. *Тогда*

(a) $(G(\varphi)x,\, G(\underbrace{T * \ldots * T}_{m} * \varphi)x) \in G(T)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

(b) $G(S)G(T) \subseteq G(S * T)$, *причем* $G(S)G(T) = D(G(S * T)) \cap D(G(T))$ *и* $G(S) + G(T) \subseteq G(S + T)$.

(c) $(G(\psi)x, G(-\psi')x - \psi(0)x) \in G(-\delta')$.

(d) *Если* G *плотна, то ее генератор плотно определен.*

Теорема 1 позволяет ввести генератор пред-УРПГ класса $*$.

Определение 2. Пусть G — пред-УРПГ класса $*$ в E, и пусть УРПГ H класса $*$ в F означает то же самое, что и в формулировке теоремы 1(a). Тогда генератор G по определению считается *генератором* H.

Случай, когда G — УРПГ класса $*$, не исключается: можно просто отождествить E с F. По определению 2 генератор пред-УРПГ класса $*$ — замкнутый линейный оператор из F в F, и отсюда следует, что наше определение слегка отличается от соответствующего определения генератора пред-ПГР, данного Кисыньски в [28].

Определение 3. Пусть D — банахово пространство и $P \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(L(D, E))$. Тогда $\mathscr{D}_0^{*\prime}(L(E, D)) \ni G$ называется *фундаментальным решением-ультрараспределением* для P, если

$$P * G = \delta \otimes I_E \quad \text{и} \quad G * P = \delta \otimes I_D.$$

Как и в случае распределений, фундаментальное решение-ультрараспределение для $P \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(L(D, E))$ определено единственным образом. Это вместе со следующей теоремой влечет, что всякая УРПГ определяется единственным образом своим генератором.

Теорема 3. *Пусть* A *— замкнутый оператор. Если* A *порождает* УРПГ G *класса* $*$, *то* G *— фундаментальное решение-ультрараспределение для* $P = \delta' \otimes I_{D(A)} - \delta \otimes A \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(L([D(A)], E))$. *В частности, если* $T \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(E)$, *то* $u = G * T$ *— единственное решение уравнения*

$$-Au + \frac{\partial}{\partial t} u = T, \quad u \in \mathscr{D}_0^{*\prime}([D(A)]),$$

и предположение $\operatorname{supp} T \subseteq [\alpha, \infty)$ *влечет, что* $\operatorname{supp} u \subseteq [\alpha, \infty)$. *Обратно, если* $G \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(L(E, [D(A)]))$ *— фундаментальное решение-ультрараспределение для* P, *то* G *— пред-*УРПГ *класса* $*$ *в* E, *порожденная замыканием оператора* $\mathscr{A} \equiv \{(q(x), q(y)) : (x, y) \in A\}$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{In} : L(E, [D(A)]) \to L(E)$ обозначает включение; в дальнейшем не будем делать никакой разницы между отображением $R \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(L(E, [D(A)]))$ и отображением $R \circ \mathrm{In}$. Если A порождает УРПГ G класса $*$, то из теоремы 2(c) следует, что G — фундаментальное решение-ультрараспределение для P и $u = G * T \in \mathscr{D}_0^{*\prime}([D(A)])$ удовлетворяет уравнению $-Au + \frac{\partial}{\partial t} u = T$. Ясно, что если $\operatorname{supp} T \subseteq [\alpha, \infty)$, то $\operatorname{supp} u \subseteq [\alpha, \infty)$. Предположим теперь, что $G \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(L(E, [D(A)]))$ — фундаментальное решение-ультрараспределение для P. Используя те же рассуждения, что и в [18, теорема 3.10], получаем, что G — пред-УРПГ класса $*$ в E. Докажем только, что генератор G является замыканием $\mathscr{A}$. Прежде всего покажем, что $\mathscr{A}$ — замыкаемый оператор. С этой целью предположим, что $y \in E$ и (x_n) — последовательность в $D(A)$ такая, что $q(x_n) \to 0$ и $\mathscr{A}(q(x_n)) \to q(y)$ при $n \to \infty$. Из этих предположений вытекает существование подпоследовательности (x_{n_k}) последовательности (x_n) такой, что $\inf\limits_{z \in \mathscr{N}(G)} \|x_{n_k}+z\| < 1/k$ и $\inf\limits_{z \in \mathscr{N}(G)} \|Ax_{n_k}-y+z\| < 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, существуют две последовательности (z_k) и $\left(z_k^1\right)$ в $\mathscr{N}(G)$ такие, что $\|x_{n_k} + z_k\| < 1/k$ и $\left\|Ax_{n_k} - y + z_k^1\right\| < 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. Фиксируем $\phi \in \mathscr{D}_0^*$. Так как G — фундаментальное решение-ультрараспределение для P, имеем $G(\phi)Ax_n = -G(\phi')x_n$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\begin{aligned}\|G(\phi)y\| &= \left\|G(\phi)\left(Ax_{n_k} - y + z_k^1\right) - G(\phi)\left(Ax_{n_k} + z_k^1\right)\right\| \\ &\leq \|G(\phi)\|/k + \|G(\phi)Ax_{n_k}\| = \|G(\phi)\|/k + \|G(-\phi')(x_{n_k} + z_k)\| \\ &\leq \|G(\phi)\|/k + \|G(\phi')\|/k, \quad k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Устремляя k к ∞, получаем, что $q(y) = 0$ и $\mathscr{A}$ — замыкаемый линейный оператор в F. Предположим, что $\mathscr{A}_1$ порождает G. Если $(q(x), q(y))$ принадлежит замыканию $\mathscr{A}$ для некоторых $x, y \in E$, то существует последовательность $((x_n, y_n))$ в A такая, что $(q(x_n), q(y_n)) \to (q(x), q(y))$ при $n \to \infty$. Используя те же рассуждения, что и выше, получаем, что существуют подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n) и две последовательности (z_k) и (z_k^1) в $\mathscr{N}(G)$ такие, что $\|x_{n_k} - x + z_k\| < 1/k$ и $\left\|y_{n_k} - y + z_k^1\right\| < 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. Фиксируем $\phi \in \mathscr{D}_0^*$. Ясно, что

$$\begin{aligned}&\|G(\varphi)(G(-\phi')x - G(\phi)y)\| \\ &= \left\|G(\varphi)\left[G(\phi')(x_{n_k}-x+z_k) - G(\phi')(x_{n_k}+z_k) + G(\phi)\left(y_{n_k}-y+z_k^1\right) - G(\phi)\left(y_{n_k}+z_k^1\right)\right]\right\| \\ &= \left\|G(\varphi)\left[G(\phi')(x_{n_k} - x + z_k) + G(\phi)\left(y_{n_k} - y + z_k^1\right)\right]\right\| \\ &\leq (\|G(\varphi *_0 \phi)\| + \|G(\varphi *_0 \phi')\|)/k, \quad k \in \mathbb{N},\ \varphi \in \mathscr{D}_0^*.\end{aligned}$$

Поэтому $G(-\phi')x - G(\phi)y \in \mathscr{N}(G)$, т. е. $H(-\phi')q(x) = H(\phi)q(y)$, $\phi \in \mathscr{D}_0^*$, и $\mathscr{A}_1$ содержит замыкание $\mathscr{A}$. Из этого, в свою очередь, следует, что $\mathscr{D}_0^{*\prime}([D(\overline{\mathscr{A}})])$ изоморфно подпространству $\mathscr{D}_0^{*\prime}([D(\mathscr{A}_1)])$. Первая часть доказательства дает, что H — фундаментальное решение-ультрараспределение для $P_1 = \delta' \otimes I_{D(\mathscr{A}_1)} - \delta \otimes \mathscr{A}_1$. Применяя снова рассуждения из последней части доказательства теоремы 3.10 из [18], получаем $D(\mathscr{A}_1) = D(\overline{\mathscr{A}})$. Это завершает доказательство. □

Предложим следующие вопросы.

(i) Если G — УРПГ класса $*$, то можно доказать, что оператор $\mathscr{A}$, определенный в формулировке теоремы 3, замкнут. Верно ли это, если G есть просто фундаментальное решение-ультрараспределение для P?

(ii) Предположим, что A плотно определен и порождает УРПГ G класса $*$. Обязана ли G быть плотной?

Вспомнив о том, что всякое регулярное (M_p)-ультрараспределение полугруппы (ср. с леммой 2.7 в [11]) является пред-УРПГ класса Берлинга, из доказательства предыдущей теоремы немедленно выводим

Следствие 1. (a) *Пусть $G \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(L(E, [D(A)]))$. Тогда $\mathscr{N}(G) = \{0\}$ и G — фундаментальное решение-ультрараспределение для P, если и только если G — УРПГ класса $*$, порожденная A.*

(b) *Предположим, что A плотно задан. Тогда G — регулярное (M_p)-ультрараспределение полугруппы, порожденной A, тогда и только тогда, когда G является* УРПГ *класса (M_p), порожденной A.*

Рассуждая, как в доказательстве предложения 2.6 в [11], получаем, что из полиномиальной ограниченности $\|R(\cdot : A)\|$, имеющей место на подходящей ультралогарифмической области из [9], следует, что A порождает УРПГ класса (M_p). Это утверждение становится неверным в случае ультраполиномиальной ограниченности; более точно, существуют замкнутый линейный оператор A и фундаментальное решение-ультрараспределение G для оператора $P = \delta' \otimes I_{D(A)} - \delta \otimes A \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(L([D(A)], E))$ такие, что условие $(U.2)$ не выполняется для G (ср. с [29, с. 156]). Объясним теперь, почему решение-ультрараспределение G для P не обязательно является УРПГ класса (M_p), даже если условие (M.3) выполнено для последовательности (M_p). Пусть $x \in \mathscr{N}(G)$. Тогда носитель векторнозначного ультрараспределения $G(\cdot)x$ содержится в $\{0\}$ и можно использовать теорему 4.8 из [21] для доказательства существования последовательности (x_p) в $D(A)$ и чисел $C > 0$ и $L > 0$ таких, что $\|x_p\|_{[D(A)]} \leq CL^p/M_p$, $p \in \mathbb{N}_0$, и

$$G(\cdot)x = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^{(p)} \otimes x_p.$$

С другой стороны, если G является фундаментальным решением-распределением для $P \in \mathscr{D}_0'(L([D(A)], E))$, то существуют $n \in \mathbb{N}$ и элементы $x_0, \dots, x_n \in D(A)$ такие, что

$$G(\cdot)x = \sum_{p=0}^{n} \delta^{(p)} \otimes x_p.$$

Отсюда (ср. с доказательством теоремы 3.10, с. 845, и леммой 1 в [18]) $x_n = \dots = x_0 = 0$ и $x = 0$. Из отсутствия такого целого числа n в случае ультрараспределений вытекает, что, вообще говоря, необязательно $x_p = 0$, $p \in \mathbb{N}_0$ и $x = 0$. Наконец, следует заметить, что условие (U.2) чрезвычайно важно при изучении регуляризации ультрараспределений полугрупп и синусов [6].

Теорема 4. *Пусть выполнено* (M.3). *Пусть $T \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(E)$ и A — замкнутый плотно определенный оператор. Предположим, что уравнение*

$$-Au + \frac{\partial}{\partial t}u = T, \quad u \in \mathscr{D}_0^{*\prime}([D(A)]),$$

имеет единственное решение, зависящее непрерывно от T, и из предположения $\operatorname{supp} T \subseteq [\alpha, \infty)$ следует, что $\operatorname{supp} u \subseteq [\alpha, \infty)$. Далее, предположим, что для $T = \delta$ соответствующее решение u удовлетворяет соотношению $\operatorname{supp} u(\cdot, x) \nsubseteq \{0\}, x \in E \setminus \{0\}$. Тогда A является генератором L-*ультрараспределения полугруппы класса $*$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.1 из [1]. Здесь нам придется переформулировать известное утверждение Шварца о линейных операторах, коммутирующих со сдвигами. Так как отображение $H : u \mapsto -Au + \frac{\partial}{\partial t}u$ является изоморфизмом $\mathscr{D}_0^{*\prime}([D(A)])$ на $\mathscr{D}_0^{*\prime}(E)$, коммутирующим с трансляциями, можно доказать, что H — оператор свертки, т. е. существует $G \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(L(E, [D(A)]))$ такое, что $H(T) = G * T$. Приложение теоремы 4.8 из [21] очевидно, и помимо этих наблюдений единственное новое существенное изменение, касающееся доказательства теоремы 5.1 из [1], связано с доказательством условия (U.2) для решения $u = G$ уравнения $-Au + \frac{\partial}{\partial t}u = \delta$ (ср. с [1, ч. 5, с. 152]). Ясно, что (U.2) следует из предположения $\operatorname{supp} u(\cdot, x) \nsubseteq \{0\}$, $x \in E \setminus \{0\}$. $\square$

В дальнейшем под фундаментальным решением-ультрараспределением класса $*$ для замкнутого линейного оператора A имеем в виду фундаментальное решение-ультрараспределение класса $*$ для оператора $P = \delta' \otimes I_{D(A)} - \delta \otimes A \in \mathscr{D}_0^{*\prime}(L([D(A)], E))$.

Определение 4. Предположим, что G — фундаментальное решение-ультрараспределение класса $*$ для замкнутого линейного оператора A или соответственно G — УРПГ класса $*$, порожденной A. Тогда говорят, что G — *экспоненциальное фундаментальное решение-ультрараспределение класса* $*$ *для* A, соответственно *экспоненциальная* УРПГ *класса* $*$, если существует $\omega \geq 0$ такое, что $e^{-\omega\cdot}G \in \mathscr{S}^{*\prime}(L(E))$. Условия (U.5) и (U.7) определяют *экспоненциальную пред*-УРПГ.

Теорема 5 [6]. *Пусть A — замкнутый линейный оператор. Экспоненциальное фундаментальное решение-ультрараспределение класса $*$ для A существует тогда и только тогда, когда в случае ультрараспределений Берлинга $a \geq 0$, $k > 0$ и $L > 0$ и в случае ультрараспределений Румье существует $a \geq 0$ такое, что для всякого $k > 0$ существует $L_k > 0$ со следующими свойствами:*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > a\} \subseteq \rho(A),$$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq Le^{M(k|\lambda|)}, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda > a,$$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq L_k e^{M(k|\lambda|)} \ \text{ для всех } k > 0 \text{ и } \lambda \in \mathbb{C} \text{ таких, что } \operatorname{Re}\lambda > a.$$

Основные структурные свойства дифференцируемых (вещественно-аналитических, аналитических) УРПГ и их связь с дифференцируемыми свернутыми полугруппами можно найти в [6].

Пример 2 [30, 6]. (a) Пусть (M_p) удовлетворяет (M1), (M.2) и (M.3)$'$. Положим

$$E_{M_p} := \left\{ f \in C^\infty[0,1] : \|f\|_{M_p} := \sup_{p\geq 0} \frac{\|f^{(p)}\|_\infty}{M_p} < \infty \right\},$$

$$A_{M_p} := -d/\,ds, \quad D(A_{M_p}) := \{f \in E_{M_p} : f' \in E_{M_p},\ f(0) = 0\}.$$

Тогда A_{M_p} не является стационарным полным [30], и потому A_{M_p} не может быть генератором полугруппы-распределения. Далее, $\rho(A_{M_p}) = \mathbb{C}$ [6] и $\|R(\lambda : A_{M_p})\| \leq Ce^{M(\tilde{r}|\lambda|)}$, $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, для некоторых $C > 0$ и $\tilde{r} > 0$ [20]. Положим

$$\|\varphi\|_{M_p,h,K} := \sup_{t\in K,\, p\in\mathbb{N}_0} \frac{h^p|\phi^{(p)}(t)|}{M_p}, \quad \varphi \in \mathscr{D}^{(M_p)} \ (\mathbb{R} \supseteq K \ \text{— компакт}, h > 0),$$

$$(G(\varphi)f)(x) := \int_0^x \varphi(x-t)f(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathscr{D}^{(M_p)},\ f \in E_{M_p},\ x \in [0,1].$$

Ясно, что $G(\varphi)f \in C^\infty[0,1]$ и

$$\frac{d^p}{dx^p}(G(\varphi)f)(x) = \int_0^x \varphi^{(p)}(x-t)f(t)\,dt + \sum_{k=0}^{p-1} \varphi^{(p-1-k)}(0)f^{(k)}(x)$$

для всякого $\varphi \in \mathscr{D}^{(M_p)}$, $f \in E_{M_p}$, $x \in [0,1]$ и $p \in \mathbb{N}_0$. Так как $M_{p+q} \geq M_p M_q$, $p, q \in \mathbb{N}_0$, из предыдущего равенства следует, что для любых $p \in \mathbb{N}_0$, $x \in [0,1]$, $\varphi \in \mathscr{D}^{(M_p)}$ и $f \in E_{M_p}$

$$\left|\frac{\frac{d^p}{dx^p}(G(\varphi)f)(x)}{M_p}\right| \leq \|\varphi\|_{M_p,1,[0,1]}\|f\| + \sum_{k=0}^{p-1}\left|\frac{\varphi^{(p-1-k)}(0)}{M_{p-k}}\right|\|f\|$$
$$\leq \|\varphi\|_{M_p,1,[0,1]}\left(1 + \sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{m_{p-k}}\right)\|f\| \leq \|\varphi\|_{M_p,1,[0,1]}\left(1 + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{m_p}\right)\|f\|.$$

Значит,

$$\|G(\varphi)\| \leq \|\varphi\|_{M_p,1,[0,1]}\left(1 + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{m_p}\right)$$

и $G \in \mathscr{D}_0^{(M_p)\prime}(L(E))$. Теперь легко проверить, что G является УРПГ класса (M_p), порожденной A_{M_p}.

(b) Пусть A_{M_p}, E_{M_p} и G, как в (a). Выберем $x \in E_{M_p}$ и функционал $x^* \in (D(A_{M_p}))^\circ$ со свойством $\langle x^*, x\rangle = 1$. Положим $\widetilde{G} := G + \delta \otimes \langle x^*, \cdot\rangle x$. Тогда $\widetilde{G}$ удовлетворяет (U.1), (U.2), (U.4), но не (U.5).

(c) В следующем примере, который появился также в [31], используем понятия и терминологию из гл. 8 монографии [4]. Предположим, что последовательность (M_p) удовлетворяет (M.1), (M.2) и (M.3)$'$, $s > 1$, $k > 0$, $p \in [1, \infty)$, $m > 0$, $\rho \in [0,1]$, $r > 0$, $a \in S^m_{\rho,0}$ удовлетворяет (H_r)

$$n\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|\left(\frac{m - r - \rho + 1}{r}\right) < 1 \tag{1}$$

и существуют константы $l > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что $a(\mathbb{R}^n) \cap \Omega^{(M_p)}_{l,\beta} = \varnothing$, где полагаем

$$\Omega^{(M_p)}_{l,\beta} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq M(l|\lambda|) + \beta\}.$$

Если $a(\cdot)$ — эллиптический полином порядка m, то $m = r$, $\rho = 1$ и (1) выполнено. По лемме 8.2.1, предложению 8.2.6 и доказательству леммы 8.2.8 из [4] получаем существование $\beta' \geq \beta$ такого, что норма $\|R(\cdot : A)\|$ полиномиально ограничена на $\Omega^{(M_p)}_{l,\beta'}$, откуда следует, что A порождает ультрараспределение полугруппы класса (M_p).

Использование ультрараспределений является основным средством при анализе некоторых классов псевдодифференциальных эволюционных систем с постоянными коэффициентами, приведенных в [32]. Другие примеры дифференциальных операторов, порождающих полугруппы-ультрараспределения, можно найти в [9, 10, 15, 17].

Доказательство следующей теоремы вытекает из рассмотрений Комацу [14] И. В. Мельниковой, А. И. Филинкова [7, § 2.3] и И. В. Мельниковой, В. А. Ануфриева [33, п. 1.3.4].

Теорема 6. *Для замкнутого линейного оператора A фундаментальное решение-ультрараспределение класса $*$ существует тогда и только тогда, когда существуют $l > 0$ и $\beta > 0$ в случае Берлинга и для любого $l > 0$ существует $\beta_l > 0$ в случае Румье такие, что*

$$\Omega^{(M_p)}_{l,\beta} \subseteq \rho(A), \quad \Omega^{\{M_p\}}_{l,\beta_l} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq M(l|\lambda|) + \beta_l\} \subseteq \rho(A),$$

$$\|R(\lambda:A)\| \leq \beta e^{M(l|\lambda|)},\ \lambda \in \Omega^{(M_p)}_{l,\beta}, \quad \|R(\lambda:A)\| \leq \beta_l e^{M(l|\lambda|)},\ \lambda \in \Omega^{\{M_p\}}_{l,\beta_l}.$$

Спектральные свойства генераторов УРПГ достаточно сложны; см. также [11, лемма 2.2, предложения 2.3, 2.4]).

Теорема 7. *Предположим, что $s > 1$, $M_p = p!^s$, существует фундаментальное решение-ультрараспределение класса $*$ для A, $B \in L(E)$ и $BA \subseteq AB$. Тогда существует фундаментальное решение-ультрараспределение класса $*$ для $A + B$.*

Доказательство. Докажем теорему только в случае Румье, потому что доказательство в случае Берлинга намного проще. Известно, что существуют константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $c_1|\lambda|^{1/s} \leq M(\lambda) \leq c_2|\lambda|^{1/s}$, $\lambda \geq 0$. Фиксируем $l > 0$. По теореме 6 существует константа $\beta_l > 0$ такая, что $\Omega_{l,\beta_l} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq c_2(l|\lambda|)^{1/s} + \beta_l\} \subseteq \rho(A)$ и $\|R(\lambda : A)\| \leq \beta_l e^{c_2(l|\lambda|)^{1/s}}$, $\lambda \in \Omega_{l,\beta_l}$. Обозначим символом Γ_l границу Ω_{l,β_l}, ориентированную вверх, и предположим, что $\frac{\cos(\frac{\pi}{2s})a}{c_2 l^{1/s}} = 3$. Положим $S(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_l} e^{\lambda t}\widetilde{K}_{a,1/s}(\lambda)R(\lambda : A)\,d\lambda$, $t \in [0, 2)$. Так как $|\widetilde{K}_{a,1/s}(\lambda)| \leq e^{-a\cos(\frac{\pi}{2s})|\lambda|^{1/s}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, определение $S(t)$ имеет смысл и можно убедиться непосредственно, что $(S(t))_{t\in[0,2)}$ является локальной $K_{a,1/s}$-свернутой полугруппой, порожденной A. Применение леммы 1(a) показывает, что оператор $A+B$ порождает локальную $K_{a,1/s}$-свернутую полугруппу на $[0, 2)$. Используя лемму 1(b) с $\Phi(\lambda) = \cos\bigl(\frac{\pi}{2s}\bigr)a|\lambda|^{1/s}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha = 1$ и $t = 1$, получаем, что существует $\gamma_l > 0$ такое, что

$$\Omega'_{l,\gamma_l} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq 3c_2 l^{1/s}|\lambda|^{1/s} + \gamma_l\} \subseteq \rho(A + B),$$

$$\|R(\lambda : A + B)\| \leq \gamma_l e^{3c_2 l^{1/s}|\lambda|^{1/s}}, \quad \lambda \in \Omega'_{l,\gamma_l}.$$

Из этого немедленно вытекает, что

$$\Omega''_{l,\gamma_l} := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq 3c_2\frac{1}{c_1}M(l|\lambda|) + \gamma_l\right\} \subseteq \rho(A + B),$$

$$\|R(\lambda : A + B)\| \leq \gamma_l e^{3c_2\frac{1}{c_1}M(l|\lambda|)}, \quad \lambda \in \Omega''_{l,\gamma_l}.$$

В силу леммы 1(c) получаем существование $\vartheta_l > 0$ такого, что

$$\Omega'''_{l,\gamma_l} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq M(lB^{3\frac{c_2}{c_1}-1}|\lambda|) + \vartheta_l\} \subseteq \rho(A + B),$$

$$\|R(\lambda : A + B)\| \leq \vartheta_l e^{M(lB^{3\frac{c_2}{c_1}-1}|\lambda|)}, \quad \lambda \in \Omega'''_{l,\gamma_l}.$$

Доказательство теоремы завершает применение теоремы 6. □

Достаточно значимым является вопрос: верна ли теорема 7 в случае произвольной последовательности (M_p), удовлетворяющей (M.1), (M.2) и (M.3)$'$? Также неясно, является ли свойство (U.2) инвариантным относительно возмущений.

Заметим, что теорема 7 применима к следующему обобщению теорем 3.1 из [13] и 4.3 из [34]. Для данных $c > 0$, $\sigma > 0$ и $\varsigma \in \mathbb{R}$ положим

$$\Pi_{c,\sigma,\varsigma} := \bigl\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq \sigma|\operatorname{Im}\lambda|^c + \varsigma\bigr\}.$$

Теорема 8. (a) *Пусть* $c > 1$, $\sigma > 0$, $\varsigma \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\sigma(A) \subseteq \pm\Pi_{c,\sigma,\varsigma} \quad \text{и} \quad \|R(\lambda : A)\| \leq M(1 + |\lambda|)^k, \quad \lambda \notin \pm\Pi_{c,\sigma,\varsigma}. \tag{2}$$

Положим $p(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $x \in \mathbb{C}$, *где* $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ *и* $a_{n-j} \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$. *Тогда операторы* $\pm ip(A)$ *порождают полугруппы-ультрараспределения класса* $(p!^{\frac{n}{n-1+\frac{1}{c}}})$.

(b) *Пусть* p *такое же, как в п.* (a), *и пусть* A (*или* $-A$) *порождает экспоненциально ограниченную интегральную функцию косинуса. Тогда операторы* $\pm ip(A)$ *порождают:*

(i) *полугруппы-ультрараспределения класса* $(p!^s)$, *если* $s \in \big(1, \frac{2n}{2n-1}\big]$,

(ii) *полугруппы-ультрараспределения класса* $\{p!^s\}$, *если* $s \in \big(1, \frac{2n}{2n-1}\big)$.

(c) *Пусть* p *такое же, как в п.* (a), *и пусть* A (*или* $-A$) *порождает* (*локальную*) *интегрированную функцию косинуса. Тогда операторы* $\pm ip(A)$ *порождают полугруппы-ультрараспределения класса* $*$, *если* $M_p = p!^s$ *и* $s \in \big(1, \frac{2n}{2n-1}\big)$.

(d) *Предположим, что* $c \in (0,1)$, $\sigma > 0$, $\varsigma \in \mathbb{R}$, $\sigma(A) \subseteq \pm(\mathbb{C} \setminus \{\lambda^2 : \lambda \in \Pi_{c,\sigma,\varsigma}\})$ *и* $\|R(\cdot : A)\|$ *полиномиально ограничена на дополнении к* $\{\lambda^2 : \lambda \in \Pi_{c,\sigma,\varsigma}\}$ (*или на противоположном к дополнению этого множества в случае знака минус*). *Пусть* p *такое же, как в п.* (a). *Тогда операторы* $\pm ip(A)$ *порождают ультрараспределения полугруппы класса* $*$, *если* $M_p = p!^s$ *и* $s \in \big(1, \frac{2n}{2n+c-1}\big)$.

Доказательство. Для доказательства (a) достаточно рассмотреть случай $a_0 = 0$ (см. теорему 7) и предположить, что $\sigma(A) \subseteq \Pi_{c,\sigma,\varsigma}$. Замечая, что $\operatorname{Re}\big(p\big(t \pm i\big(\frac{t-\varsigma}{\sigma}\big)^{1/c}\big)\big) \sim a_n t^n$, $t \to +\infty$, и $\operatorname{Im}\big(p\big(t \pm i\big(\frac{t-\varsigma}{\sigma}\big)^{1/c}\big)\big) \sim \pm n a_n \sigma^{-1/c} t^{n-1+\frac{1}{c}}$, $t \to +\infty$, из леммы 24.12 в [5] немедленно получаем существование $\sigma_1 > 0$ и $\varsigma_1 > 0$ таких, что $\sigma(p(A)) \subseteq \Pi_{\frac{n}{n-1+\frac{1}{c}},\sigma_1,\varsigma_1}$ и $\|R(\cdot : p(A))\|$ полиномиально ограничена на дополнении к $\Pi_{\frac{n}{n-1+\frac{1}{c}},\sigma_1,\varsigma_1}$. Из этого следует существование положительных чисел $\sigma_2 > 0$ и $\varsigma_2 > 0$ таких, что $\Pi_{\frac{n-1+\frac{1}{c}}{n},\sigma_2,\varsigma_2} \subseteq \rho(\pm ip(A))$ и норма $\|R(\cdot : \pm ip(A))\|$ полиномиально ограничена на $\Pi_{\frac{n-1+\frac{1}{c}}{n},\sigma_2,\varsigma_2}$, что завершает доказательство (a). Доказательства (b) и (c) следуют из (a) и рассуждений из доказательств теорем 3.1 из [13] и 4.3 из [34]. Доказательство (d) — прямое следствие (a) и того факта, что для любых $c \in (0,1)$, $\sigma > 0$, $\varsigma \in \mathbb{R}$ и $a \in \big(0, \frac{1}{2} + \frac{c}{2}\big)$ существуют $\sigma_1 > 0$ и $\varsigma_1 \in \mathbb{R}$ такие, что $\mathbb{C} \setminus \{\lambda^2 : \lambda \in \Pi_{c,\sigma,\varsigma}\} \subseteq -\Pi_{a,\sigma_1,\varsigma_1}$. $\square$

В силу доказательства теоремы 8 имеем следующее утверждение.

Теорема 9. (a) *Предположим, что* $c > 1$, $\sigma > 0$, $\varsigma \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $k \in \mathbb{N}$ *и выполнено* (2). *Пусть* p *такое же, как в формулировке теоремы* 8(a). *Тогда оператор* $(-1)^{n+1}p(A)$ *порождает синус ультрараспределений класса* $*$, *если* $M_p = p!^s$ *и* $s \in \big(1, \frac{n}{n-2+\frac{2}{c}}\big)$.

(b) *Пусть* p *такое же, как в* (a), *с* $n > 1$, *и пусть* A *порождает* (*локальную*) *интегрированную функцию косинуса. Тогда оператор* $(-1)^{n+1}p(A)$ *порождает синус ультрараспределений класса* $*$, *если* $M_p = p!^s$ *и* $s \in \big(1, \frac{n}{n-1}\big)$.

(c) *Пусть* $c \in (0,1)$, $\sigma > 0$, $\varsigma \in \mathbb{R}$, $\sigma(A) \subseteq \pm(\mathbb{C} \setminus \{\lambda^2 : \lambda \in \Pi_{c,\sigma,\varsigma}\})$ *и* $\|R(\cdot : A)\|$ *полиномиально ограничена на дополнении к* $\{\lambda^2 : \lambda \in \Pi_{c,\sigma,\varsigma}\}$ (*или на противоположном к этому дополнению в случае знака минус*). *Пусть* p *такое же, как в* (a). *Тогда оператор* $(-1)^{n+1}p(A)$ *порождает синус ультрараспределений класса* $*$, *если* $M_p = p!^s$ *и* $s \in \big(1, \frac{n}{n+c-1}\big)$.

Понятие фундаментальных решений-гиперфункций введено Оути [35, 36] в 1971 г., а разрешимость операторов свертки в пространствах гиперфункций с компактным носителем исследована А. Н. Кочубеем в [37]. Мы закончим статью наблюдением, что доказательство теоремы $2'$ из [15] позволяет построить замкнутый плотно определенный оператор A на пространстве Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$ такой, что существует фундаментальное решение-гиперфункция для оператора A в смысле [35] и A не является субгенератором локальной α раз интегрированной C-полугруппы для любого инъективного оператора $C \in L(H^2(\mathbb{C}_+))$ и любого $\alpha > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lions J.-L.* Semi-groupes distributions // Portugal. Math. 1960. V. 19, N 3–4. P. 141–164.
2. *Arendt W.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems // Israel J. Math. 1987. V. 59. P. 327–352.
3. *Ciorănescu I., Lumer G.* Problèmes d'évolution régularisés par un noyan général $K(t)$. Formule de Duhamel, prolongements, théorèmes de génération // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1995. V. 319, N 12. P. 1273–1278.
4. *Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel: Birkhäuser-Verl., 2001.
5. *de Laubenfels R.* Existence families, functional calculi and evolution equations. New York: Springer-Verl., 1994. (Lect. Notes Math.; V. 1570).
6. *Kostić M.* Generalized semigroups and cosine functions. Belgrade: Math. Inst., 2011.
7. *Melnikova I. V., Filinkov A. I.* Abstract Cauchy problems: Three approaches. Washington: Chapman & Hall/CRC, 2001.
8. *Chazarain J.* Problèmes de Cauchy dans des espaces d'ultra-distributions // C. R. Acad. Sci. Paris. 1968. V. 266, N 10–13. P. 564–566.
9. *Chazarain J.* Problémes de Cauchy abstraites et applications á quelques problémes mixtes // J. Funct. Anal. 1971. V. 7. P. 386–446.
10. *Beals R.* Semigroups and abstract Gevrey spaces // J. Funct. Anal. 1972. V. 10. P. 300–308.
11. *Ciorănescu I.* Beurling spaces of class (M_p) and ultradistribution semi-groups // Bull. Sci. Math. 1978. V. 102, N 2. P. 167–192.
12. *Emami-Rad H. A.* Les semi-groupes distributions de Beurling // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1973. V. 276. P. 117–119.
13. *Keyantuo V.* Integrated semigroups and related partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 212, N 1. P. 135–153.
14. *Komatsu H.* Operational calculus and semi-groups of operators // Functional Analysis and Related topics (Kioto). Berlin: Springer-Verl., 1991. P. 213–234. (Lect. Notes Math.; V. 1540).
15. *Beals R.* On the abstract Cauchy problem // J. Funct. Anal. 1972. V. 10. P. 281–299.
16. *Ciorănescu I., Zsidó L.* ω-Ultradistributions in the abstract Cauchy problem // An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Secţ. I. Mat. (N.S.) 1979. V. 25. P. 79–94.
17. *Kunstmann P. C.* Banach space valued ultradistributions and applications to abstract Cauchy problems / Universität Karlsruhe, Mathematishes Institut I. (Preprint).
18. *Kunstmann P. C.* Distribution semigroups and abstract Cauchy problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 351, N 2. P. 837–856.
19. *Wang S.* Quasi-distribution semigroups and integrated semigroups // J. Funct. Anal. 1997. V. 146, N 2. P. 352–381.
20. *Komatsu H.* Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1973. V. 20. P. 25–105.
21. *Komatsu H.* Ultradistributions, III. Vector valued ultradistributions and the theory of kernels // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1982. V. 29. P. 653–718.
22. *Pilipović S.* Tempered ultradistributions // Boll. Unione Mat. Ital. 1988. V. 7, N 2. P. 235–251.
23. *Kostić M., Pilipović S.* Convoluted C-cosine functions and semigroups. Relations with ultradistribution and hyperfunction sines // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 338, N 2. P. 1224–1242.
24. *Carmicheal R. D., Kamiński A., Pilipović S.* Notes on boundary values in ultradistribution spaces. Seoul: Seoul National Univ., 1999. (Lect. Notes Ser. Seoul; V. 49).
25. *Petzsche H.-J.* Generalized functions and the boundary values of holomorphic functions // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1984. V. 31, N 2. P. 391–431.

26. *Petzsche H.-J.* On E. Borel's theorem // Math. Ann. 1988. V. 18, N 2. P. 299–313.
27. *Shiraishi R., Hirata Y.* Convolution maps and semi-group distributions // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math. 1964. V. 28, N 1. P. 71–88.
28. *Kisyński J.* Distribution semigroups and one parameter semigroups // Bull. Polish Acad. Sci. 2002. V. 50, N 2. P. 189–216.
29. *Ciorănescu I., Zsidó L.* ω-Ultradistributions and their applications to operator theory // Spectral theory. Banach Center Publications. Warszawa, 1982. V. 8. P. 77–220.
30. *Kunstmann P. C.* Stationary dense operators and generation of non-dense distribution semigroups // J. Oper. Theory. 1997. V. 37, N 1. P. 111–120.
31. *Kostić M.* Complex powers of non-densely defined operators // Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. 2011. V. 90. P. 47–64.
32. *Emami-Rad H. A.* Systèmes pseudo-différentiels d'évolution bien posés au sens des distributions de Beurling // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. C (6). 1982. V. 1, N 1. P. 303–322.
33. *Melnikova I. V., Anufrieva U. A.* Peculiarities and regularization of ill-posed Cauchy problems with differential operators // J. Math. Sci. 2008. V. 148, N 4. P. 481–632.
34. *Kostić M., Miana P. J.* Relations between distribution cosine functions and almost-distribution cosine functions // Taiwanese J. Math. 2007. V. 11, N 2. P. 531–543.
35. *Ōuchi S.* Hyperfunction solutions of the abstract Cauchy problems // Proc. Japan Acad. 1971. V. 47, N 6. P. 541–544.
36. *Ōuchi S.* On abstract Cauchy problems in the sense of hyperfunctions // Hyperfunctions and pseudo-differential equations. New York: Springer-Verl., 1973. P. 135–152. (Lect. Notes Math.; V. 287)
37. *Кочубей А. Н.* Гиперфункции-решения дифференциально-операторных уравнений // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 4. С. 778–791.

Статья поступила 11 ноября 2009 г.

Marko Kostić (Костич Марко)
Faculty of Technical Sciences,
Trg Dositeja Obradovića 6, 21125 Novi Sad, Serbia
marco.s@verat.net

Stevan Pilipović (Пилипович Стефан)
Institute of Mathematics,
Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad, Serbia