Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 512.623.4

О МНОГОЧЛЕНАХ БРАУНА

Ю. Л. Ершов

Аннотация. Установлено наследование базисным множителем важного условия, рассмотренного Брауном.

Ключевые слова: нормированное поле, многочлен Брауна.

Все необходимые сведения о нормированных полях можно найти в гл. 1 книги [1].

Пусть $\mathbb{F} = \langle F, R\rangle$ — нормированное поле, $g \in R[x]$ — унитарный многочлен (степени $k = \delta g$) такой, что его образ $\bar{g}$ в кольце многочленов $F_R[x]$ над полем вычетов F_R нормирования v_R неприводим.

Многочлен $f \in R[x]$ назовем *многочленом Брауна* (типа (g, e)) или (g, e)-*многочленом Брауна*, если $e > 0$ — натуральное число и g-разложение

$$f = \sum_{i \leq m} A_i g^i, \quad A_i \in R[x],\ \delta(A_i) < k,\ i \leq m,$$

удовлетворяет следующим условиям:

(i) $v_x A_e = 0$;

(ii) $A_0 \neq 0$, $v_x A_0 > 0$ и $e v_x A_i \geq (e - i) v_x A_0$ для $0 < i < e$.

Здесь v_x — гауссово нормирование поля $F(x)$, продолжающее v_R (для $h = \sum\limits_{i \leq \delta h} a_0 x^i \in F[x]$, $v_x h = \min\{v_R(a_i) \mid i \leq \delta h\}$).

Замечание 1. Число e в типе (e, g) многочлена Брауна однозначно определяется следующим условием: $\bar{g}^e \mid \bar{f}$ и $\bar{g}^{e+1} \nmid \bar{f}$.

Действительно,

$$\bar{f} = \sum \overline{A}_i \bar{g}^i$$

является $\bar{g}$-разложением многочлена $\bar{f}$. Далее, $v_x A_i \geq (e - i) v_x A_0 > 0$ влечет, что $v_x A_i > 0$,

$$\bar{f} = \Big(\sum_{i > e} \overline{A}_i \bar{g}^{i-e-1}\Big) \bar{g}^{e+1} + \overline{A}_e \bar{g}^e$$

и $\overline{A}_e \neq 0$. $\square$

Замечание 2. Указанные условия (i) и (ii) рассматривались в работе Брауна [2].

Пусть $f \in R[x]$ — многочлен Брауна типа (g, e), $f = f_0 \cdot f_1$. Множитель f_0 многочлена f назовем *базисным* (множителем), если $\bar{g}^e$ делит $\bar{f}_0 (\bar{g}^e \mid \bar{f}_0)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Любой базисный множитель f_0 многочлена Брауна f типа (g, e) является многочленом Брауна того же типа.*

Доказательство. Пусть $f = f_0 \cdot f_1$, $f_0, f_1 \in R[x]$,

$$f_0 = \sum_i B_i g^i, \quad f_1 = \sum_i C_i g^i$$

— g-разложения f_0 и f_1 соответственно. Так как $\bar{g}^{e+1} \nmid \bar{f}$ и $\bar{g}^e \mid \bar{f}_0$, то $\bar{g}^{e+1} \nmid \bar{f}_0$ и $\bar{g} \nmid \bar{f}_1$ и, следовательно, $\overline{B}_e \neq 0$ и $\overline{C}_0 \neq 0$. Обозначим через λ элемент $\frac{1}{e} v_x A_0$ из группы $\widetilde{\Gamma}_R$.

Отметим справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Существует нормирование w поля $F(x)$, продолжающее v_R и такое, что для любого многочлена $h \in F[x]$ и его g-разложения*

$$h = \sum_{i \leq \delta h} D_i g^i$$

верно равенство $wh = \min\{v_x D_i + i\lambda \mid i \leq \delta h\}$.

Действительно, таким нормированием является нормирование $w_{\alpha,\delta}$, определенное в начале доказательства теоремы 1.1 в [3]. $\square$

Далее w будет обозначать нормирование поля $F(x)$ из леммы 1.

Установим следующие утверждения:

1) $wf = e\lambda$,

2) $wf_1 = 0$,

3) $wf_0 = e\lambda$,

4) $v_x B_0 = e\lambda$.

Докажем утверждение 1. Имеем $v_x A_0 = e\lambda$. По определению $\lambda = \frac{1}{e} v_x A_0$ и $v_x A_e + e\lambda = e\lambda$. Если $i > e$, то $v_x A_i + i\lambda \geq i\lambda > e\lambda$, если $0 < i < e$, то $v_x A_i + i\lambda \geq (e-i)\lambda + i\lambda = e\lambda$, так как $v_x A_i \geq \frac{e-i}{e} v_x A_0 = (e-i)\lambda$. Тем самым

$$e\lambda = \min\{v_x A_i + i\lambda \mid i \leq m\} = wf.$$

Докажем утверждение 2. Поскольку $\bar{g} \nmid \bar{f}_1$, то $\bar{C}_0 \neq 0$, т. е. $v_x C_0 = 0$, но тогда $wf_1 = \min\{v_x C_i + i\lambda \mid i \leq \delta f_1\} = 0$, так как $v_x C_i \geq 0$ для всех $i (f_1 \in R[x])$ и $\lambda > 0$.

Утверждение 3 сразу следует из предыдущих: $e\lambda = wf = w(f_0 \cdot f_1) = wf_0 + wf_1 = w(f_0)$.

Докажем утверждение 4. Так как $e\lambda = wf_0 = \min\{v_x B_i + i\lambda \mid i < \delta f_0\}$, имеем $e\lambda \leq v_x B_0$. Рассмотрим g-разложение $D_0 g + D_1$ многочлена $B_0 C_0$. Нетрудно видеть, что $D_1 = A_0$. Тогда

$$w(B_0) = w(B_0 C_0) = \min\{v_x D_0 + \lambda, v_x D_1\} \leq v_x D_1 = v_x A_0 = e\lambda.$$

Итак, $e\lambda \leq v_x B_0$ и $v_x B_0 \leq e\lambda$, поэтому $v_x(B_0) = e\lambda$.

Из утверждений 3 и 4 следует заключение теоремы. Действительно,

$$e\lambda = wf_0 = \min\{v_x B_i + i\lambda \mid i \leq \delta f_1\},$$

следовательно, $e\lambda \leq v_x B_i + i\lambda$ для всех $i \leq \delta f_0$. Тогда для $0 < i < e$

$$v_x B_i \geq e\lambda - i\lambda = (e-i)\lambda = \frac{e-i}{e} v_x B_0.$$

Остается установить, что $v_x B_e = 0$. Имеем $v_x B_e \geq 0$ и если $v_x B_e > 0$, то $\overline{B}_e = 0$. Вместе с $v_x B_i \geq (e-i)\lambda > 0$ $(0 < i < e)$ и $v_x B_0 = e\lambda > 0$ получим $\overline{B}_i = 0$ для $i \leq e$ и

$$\bar{f}_0 = \sum_i \overline{B}_i \bar{g}^i = \sum_{i>e} \overline{B}_i \bar{g}^i,$$

т. е. $\bar{g}^{e+1}$ делит $\bar{f}_0$, что невозможно. $\square$.

Базисный множитель f_0 многочлена f Брауна типа (e,g) назовем *главным*, если f_0 унитарный и $\delta f_0 = e\delta g$.

Лемма 2. *Если $\mathbb{F}$ — гензелево нормированное поле, f — многочлен Брауна типа (e,g), то f имеет главный множитель.*

Сначала рассмотрим случай, когда f унитарный. Имеем разложение

$$\bar{f} = \bar{g}^e \cdot h, \quad h \in F_R[x]$$

и $\bar{g} \nmid h$. Тогда $\bar{g}^e$ и h взаимно просты.

По предложению 1.3.4 из [1] существуют унитарные многочлены $f_0, f_1 \in R[x]$ такие, что $\bar{f}_0 = \bar{g}^e$, $\bar{f}_1 = h$. Так как f_0 унитарный, то $\delta f_0 = \delta \bar{f}_0$; следовательно, f_0 главный (поскольку $\bar{g}^e \mid \bar{f}_0$).

Пусть f не обязательно унитарный. По предложению 1.3.6 из [1] существуют унитарный многочлен h_0 и многочлен $h_1 \in R[x]$ такие, что $f = h_0 \cdot h_1$ и $\bar{h}_1 \in F_R \setminus \{0\}$. Тогда h_0 — базисный унитарный множитель для f и его главный множитель будет главным и для f. $\square$

Из леммы 2, теоремы и следствия 3 в [4] сразу вытекает теорема 1.1 из [3].

Настоящая работа возникла из попыток автора исправить ошибочное доказательство предложения 1 из [5]. Это предложение остается недоказанным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Кратно нормированные поля. Новосибирск: Научная книга, 2000.
2. *Brown R.* Roots of generalized Schönemann polynomials in Henselian extension fields // Indian J. Pure Appl. Math. 2008. V. 39, N 5. P. 403–410.
3. *Khanduja S. K., Khasa R.* A generalization of Eisenstein Schönemann irreducibility criterion // Manuscr. Math. 2011. V. 134. P. 215–224.
4. *Ершов Ю. Л.* Об одной статье Р. Брауна // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 292–296.
5. *Ершов Ю. Л.* Сепаранты некоторых многочленов // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1053–1057.

Статья поступила 1 марта 2012 г.

Ершов Юрий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
ershov@math.nsc.ru