Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 510.53+514.146

НЕВЫЧИСЛИМОСТЬ КЛАССОВ ПАППОВЫХ И ДЕЗАРГОВЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Н. Т. Когабаев

Аннотация. Изучаются вычислимые представления проективных плоскостей. Доказывается, что класс всех папповых проективных плоскостей и класс всех дезарговых проективных плоскостей не имеют вычислимых нумераций (с точностью до вычислимого изоморфизма).

Ключевые слова: проективная плоскость, паппова проективная плоскость, дезаргова проективная плоскость, вычислимая модель, вычислимый класс моделей, вычислимый изоморфизм.

В [1] доказано, что класс свободно порожденных проективных плоскостей и класс всех проективных плоскостей не обладают вычислимыми нумерациями (с точностью до вычислимого изоморфизма). В настоящей работе изучается вопрос о существовании вычислимых нумераций для классов папповых и дезарговых проективных плоскостей.

Доказывается, что для любого вычислимого семейства дезарговых (папповых) проективных плоскостей существует такое вычислимое представление $\mathfrak{A}$ папповой проективной плоскости, определенной алгебраически замкнутым полем счетной степени трансцендентности, что $\mathfrak{A}$ не вычислимо изоморфно ни одной плоскости из семейства. Отсюда как следствие получены результаты об отсутствии вычислимых нумераций для класса всех дезарговых плоскостей и класса всех папповых плоскостей (с точностью до вычислимого изоморфизма).

В § 1 изложены необходимые определения, относящиеся к теории проективных плоскостей в общем и к теории дезарговых и папповых проективных плоскостей в частности. В § 2 приведена конструкция относительной элементарной определимости произвольного ассоциативного тела $\mathfrak{F}$ в дезарговой проективной плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$. В § 3 на основе свойства неограниченности алгебраически замкнутого поля счетной степени трансцендентности доказывается основной результат о невычислимости классов папповых и дезарговых проективных плоскостей.

§ 1. Необходимые определения и обозначения

Мы рассматриваем проективные плоскости на основе алгебраического подхода, предложенного А. И. Ширшовым в [2]. В рамках данного подхода *проективной плоскостью* называют частичную алгебраическую систему $\langle A, (A^0, {}^0A), \cdot \rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$, и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта проект 11–01–00236)), а также Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–276.2012.1).

частичной бинарной коммутативной операцией $\cdot$ (произведение), удовлетворяющей следующим условиям.

(1) Произведение $a{\cdot}b$ определено тогда и только тогда, когда a, b — различные однотипные элементы из A (элементы a, b называются *однотипными*, если $a, b \in A^0$ или $a, b \in {}^0A$).

(2) Если определено произведение $a{\cdot}b$, то элементы a и $a{\cdot}b$ неоднотипные.

(3) Для любых $a, b, c \in A$, для которых определены произведения $a{\cdot}b$, $a{\cdot}c$ и $(a{\cdot}b){\cdot}(a{\cdot}c)$, выполняется равенство $(a{\cdot}b){\cdot}(a{\cdot}c) = a$.

(4) Существуют попарно различные $a, b, c, d \in A$ такие, что определены и попарно различны произведения $a{\cdot}b$, $b{\cdot}c$, $c{\cdot}d$, $d{\cdot}a$.

Другие основные определения и результаты, разработанные в рамках указанного подхода А. И. Ширшова, могут быть найдены читателем в [3].

Будем рассматривать произвольную проективную плоскость $\langle A, (A^0, {}^0A), \cdot\rangle$ как модель $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, P^{\mathfrak{A}}\rangle$ предикатной сигнатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0A, P\rangle$ с носителем A, где A^0 и ${}^0A$ — одноместные предикатные символы, интерпретируемые в $\mathfrak{A}$ как соответствующие элементы разбиения ее носителя, а P — трехместный предикатный символ, выделяющий график частичной операции, т. е.

$$P^{\mathfrak{A}} = \{\langle a, b, c\rangle \mid a, b, c \in A,\ a{\cdot}b \text{ определено и равно } c\}.$$

Будем называть проективную плоскость $\mathfrak{A}$ *вычислимой*, если A, A^0, ${}^0A$ являются вычислимыми подмножествами ω, а отношение $P^{\mathfrak{A}}$ — вычислимым подмножеством ω^3. Переход к предикатной сигнатуре позволяет использовать методы и понятия теории вычислимых моделей [4].

Для произвольного ассоциативного тела $\mathfrak{F}$ через $V_{\mathfrak{F}}$ будем обозначать трехмерное левое векторное пространство над $\mathfrak{F}$, элементы которого будем представлять как вектор-строки (a, b, c) или вектор-столбцы $(a, b, c)^\top$, где a, b и c — произвольные элементы тела.

Произвольная *дезаргова проективная плоскость* определяется некоторым ассоциативным телом $\mathfrak{F}$ как алгебраическая система $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} = \langle A, (A^0, {}^0A), \cdot\rangle$, в которой A^0 состоит из всех одномерных подпространств $V_{\mathfrak{F}}$, ${}^0A$ состоит из всех двумерных подпространств $V_{\mathfrak{F}}$, носитель A является объединением A^0 и ${}^0A$, произведением двух различных одномерных подпространств будет единственное двумерное подпространство, содержащее их, а произведение двух различных двумерных подпространств определяется как единственное одномерное подпространство, являющееся их пересечением. Используя общую терминологию теории проективных плоскостей, будем называть элементы A^0 *точками*, а элементы ${}^0A$ — *прямыми*.

В коммутативном случае, т. е. когда тело $\mathfrak{F}$ является полем, определенная выше дезаргова проективная плоскость $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ называется *папповой*.

Следуя [5], каждое одномерное подпространство вида $\{(ka, kb, kc) \mid k \in \mathfrak{F}\}$, где (a, b, c) — ненулевой вектор, будем обозначать через $\langle (a, b, c)\rangle$, а каждое двумерное подпространство вида $\{(x, y, z) \mid xa + yb + zc = 0\}$, где (a, b, c) — ненулевой вектор, — через $\langle (a, b, c)^\top\rangle$. Заметим, что $\langle (a_1, b_1, c_1)\rangle = \langle (a_2, b_2, c_2)\rangle$ и $\langle (a_1, b_1, c_1)^\top\rangle = \langle (a_2, b_2, c_2)^\top\rangle$, если и только если векторы (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) коллинеарны.

Инцидентность точки $\langle (a_1, b_1, c_1)\rangle$ и прямой $\langle (a_2, b_2, c_2)^\top\rangle$ определяется соотношением $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$. Таким образом, произведением двух различных точек $\langle (a_1, b_1, c_1)\rangle$ и $\langle (a_2, b_2, c_2)\rangle$ является прямая $\langle (a_3, b_3, c_3)^\top\rangle$ с условием $a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = 0$ и $a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0$. Аналогичным образом находится координатное представление для произведения двух различных прямых.

Если дезаргова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ определена ассоциативным телом $\mathfrak{F}$, то будем называть $\mathfrak{F}$ *координатным телом плоскости* $\mathfrak{A}$.

Остовом в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ называется упорядоченный набор из четырех точек такой, что никакие три из них не инцидентны одной прямой. Известно, что четверка точек a_1, a_2, a_3, a_4 является остовом тогда и только тогда, когда $a_1 = \langle e_1 \rangle$, $a_2 = \langle e_2 \rangle$, $a_3 = \langle e_3 \rangle$ и $a_4 = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ для некоторого базиса e_1, e_2, e_3 пространства $V_{\mathfrak{F}}$.

Множество натуральных чисел будем обозначать через ω. Через $c^3(x, y, z)$ и $c^4(x, y, z, t)$ обозначены канторовские нумерации троек и четверок натуральных чисел соответственно.

§ 2. Интерпретация тел в дезарговых плоскостях

В данном параграфе изложена конструкция интерпретации координатного тела в плоскости, основанная на естественной идее координатизации дезарговых плоскостей (см. [5]). Зафиксируем базис e_1, e_2, e_3 левого векторного пространства $V_{\mathfrak{F}}$. Тогда произвольную точку проективной плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ можно представлять в виде $\langle xe_1 + ye_2 + ze_3 \rangle$, где x, y, z — элементы ассоциативного тела. Следующие леммы необходимы для интерпретации тела $\mathfrak{F}$ в плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$.

Лемма 1. *Для любых $x, y, z, t \in \mathfrak{F}$ в плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ справедливы следующие утверждения.*

(а) *Точка $\langle xe_1 + ye_2 + e_3 \rangle$ инцидентна прямой $\langle ze_1 + e_2 \rangle \cdot \langle te_1 + e_3 \rangle$ тогда и только тогда, когда $x = yz + t$.*

(б) *Точка $\langle xe_1 + ye_2 + e_3 \rangle$ инцидентна прямой $\langle e_1 + e_2 \rangle \cdot \langle ze_1 + e_3 \rangle$ тогда и только тогда, когда $x = y + z$.*

(в) *Точка $\langle xe_1 + ye_2 + e_3 \rangle$ инцидентна прямой $\langle ze_1 + e_2 \rangle \cdot \langle e_3 \rangle$ тогда и только тогда, когда $x = yz$.*

(г) *Точка $\langle e_3 - e_2 \rangle$ инцидентна прямой $\langle xe_1 + e_2 \rangle \cdot \langle ye_1 + e_3 \rangle$ тогда и только тогда, когда $x = y$.*

(д) *Точка $\langle xe_1 + e_3 \rangle$ инцидентна прямой $\langle e_2 - e_1 \rangle \cdot \langle ye_2 + e_3 \rangle$ тогда и только тогда, когда $x = y$.*

(е) $(\langle xe_1 + ye_2 + e_3 \rangle \cdot \langle e_2 \rangle) \cdot (\langle e_1 \rangle \cdot \langle e_3 \rangle) = \langle xe_1 + e_3 \rangle$.

(ж) $(\langle xe_1 + ye_2 + e_3 \rangle \cdot \langle e_1 \rangle) \cdot (\langle e_2 \rangle \cdot \langle e_3 \rangle) = \langle ye_2 + e_3 \rangle$.

Доказательство. Для доказательства утверждения (а) заметим, что точка $\langle xe_1 + ye_2 + e_3 \rangle$ инцидентна прямой $\langle ze_1 + e_2 \rangle \cdot \langle te_1 + e_3 \rangle$ тогда и только тогда, когда вектор $xe_1 + ye_2 + e_3$ является линейной комбинацией векторов $ze_1 + e_2$ и $te_1 + e_3$. Если $xe_1 + ye_2 + e_3 = \alpha(ze_1 + e_2) + \beta(te_1 + e_3)$, то $\alpha = y$, $\beta = 1$ и $x = yz + t$. Обратно, если $x = yz + t$, то $xe_1 + ye_2 + e_3 = y(ze_1 + e_2) + (te_1 + e_3)$ и, значит, $\langle xe_1 + ye_2 + e_3 \rangle$ инцидентна прямой $\langle ze_1 + e_2 \rangle \cdot \langle te_1 + e_3 \rangle$.

Утверждения (б)–(г) следуют из (а). Утверждение (д) доказывается аналогично (а). Справедливость (е) проверяется непосредственным вычислением произведения в левой части. П. (ж) получается из (е) заменой e_1 на e_2, и наоборот.

Введем серию отношений, определимых в модели $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ формулами сигнатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0A, P \rangle$, каждая из которых будет эквивалентна в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ некоторой $\exists$-формуле и некоторой $\forall$-формуле.

Определим формулу

$$Fr(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1 \in A^0)\&(v_2 \in A^0)\&(v_3 \in A^0)\&(v_4 \in A^0)\& \bigwedge_{i<j}(v_i \neq v_j)$$
$$\& \bigwedge_{i<j<k} \exists v_5 \exists v_6((v_5 \neq v_6)\&P(v_i, v_j, v_5)\&P(v_i, v_k, v_6)),$$

которая выделяет в модели $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ наборы $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$, являющиеся остовами плоскости, и эквивалентна в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ следующей $\forall$-формуле:

$$(v_1 \in A^0)\&(v_2 \in A^0)\&(v_3 \in A^0)\&(v_4 \in A^0)\& \bigwedge_{i<j}(v_i \neq v_j)$$
$$\& \bigwedge_{i<j<k} \forall v_5 \forall v_6((P(v_i, v_j, v_5)\&P(v_i, v_k, v_6)) \longrightarrow v_5 \neq v_6).$$

Определим формулу

$$I(u, v, w) = (u \in A^0)\&(v \in A^0)\&(w \in A^0)\&(u \neq v)\&(v \neq w)$$
$$\&\exists s(P(u, v, s)\&P(v, w, s)),$$

эквивалентную в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ следующей $\forall$-формуле:

$$(u \in A^0)\&(v \in A^0)\&(w \in A^0)\&(u \neq v)\&(v \neq w)\&\forall s(P(u, v, s) \to P(v, w, s)).$$

Заметим, что $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models I(u, v, w)$ тогда и только тогда, когда $u \neq v$ и точка u инцидентна прямой $v{\cdot}w$.

Пусть теперь E_1, E_2, E_3, E_4 — некоторый остов в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$. Тогда для некоторого базиса e_1, e_2, e_3 пространства $V_{\mathfrak{F}}$ справедливы соотношения $E_1 = \langle e_1\rangle$, $E_2 = \langle e_2\rangle$, $E_3 = \langle e_3\rangle$ и $E_4 = \langle e_1 + e_2 + e_3\rangle$. Дальнейшие формулы будут зависеть от параметров $\overline{E} = \langle E_1, E_2, E_3, E_4\rangle$.

Определим формулы

$$\Phi_1(u, \overline{E}) = (u \in A^0)\&(u \neq E_1)\&I(u, E_1, E_2);$$
$$\Phi_2(u, \overline{E}) = (u \in A^0)\&(u \neq E_1)\&I(u, E_1, E_3);$$
$$\Phi_3(u, \overline{E}) = (u \in A^0)\&(u \neq E_2)\&I(u, E_2, E_3);$$
$$\Phi_4(u, \overline{E}) = (u \in A^0)\&\neg I(u, E_1, E_2).$$

Заметим, что любая точка, инцидентная прямой $\langle e_1\rangle{\cdot}\langle e_2\rangle$, либо совпадает с $\langle e_1\rangle$, либо единственным образом представима в виде $\langle xe_1 + e_2\rangle$ для некоторого $x \in \mathfrak{F}$. Если же точка не инцидентна $\langle e_1\rangle{\cdot}\langle e_2\rangle$, то для некоторых $x, y \in \mathfrak{F}$ она единственным образом представима в виде $\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle$. Из этих замечаний заключаем, что

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Phi_1(u, \overline{E}) \Longleftrightarrow u = \langle xe_1 + e_2\rangle,\ x \in \mathfrak{F};$$
$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Phi_2(u, \overline{E}) \Longleftrightarrow u = \langle xe_1 + e_3\rangle,\ x \in \mathfrak{F};$$
$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Phi_3(u, \overline{E}) \Longleftrightarrow u = \langle xe_2 + e_3\rangle,\ x \in \mathfrak{F};$$
$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Phi_4(u, \overline{E}) \Longleftrightarrow u = \langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle,\ x, y \in \mathfrak{F}.$$

Для дальнейших определений потребуются следующие соотношения:

$$\langle e_1 + e_2\rangle = (\langle e_1\rangle{\cdot}\langle e_2\rangle){\cdot}(\langle e_3\rangle{\cdot}\langle e_1 + e_2 + e_3\rangle);$$

$$\langle e_2-e_1\rangle=((((\langle e_2\rangle\cdot\langle e_3\rangle)\cdot(\langle e_1\rangle\cdot\langle e_1+e_2+e_3\rangle))\cdot((\langle e_1\rangle\cdot\langle e_3\rangle)\cdot(\langle e_2\rangle\cdot\langle e_1+e_2+e_3\rangle)))\cdot(\langle e_1\rangle\cdot\langle e_2\rangle);$$

$$\langle e_3-e_2\rangle=((((\langle e_1\rangle\cdot\langle e_3\rangle)\cdot(\langle e_2\rangle\cdot\langle e_1+e_2+e_3\rangle))\cdot((\langle e_1\rangle\cdot\langle e_2\rangle)\cdot(\langle e_3\rangle\cdot\langle e_1+e_2+e_3\rangle)))\cdot(\langle e_2\rangle\cdot\langle e_3\rangle).$$

Справедливость этих соотношений устанавливается непосредственным вычислением. Например, доказательство последнего из них состоит в последовательном вычислении всех произведений, входящих в левую часть тождества:

$$\langle e_1\rangle\cdot\langle e_3\rangle=\langle e_2^\top\rangle,\quad \langle e_2\rangle\cdot\langle e_1+e_2+e_3\rangle=\langle e_1^\top-e_3^\top\rangle,\quad \langle e_1\rangle\cdot\langle e_2\rangle=\langle e_3^\top\rangle,$$
$$\langle e_3\rangle\cdot\langle e_1+e_2+e_3\rangle=\langle e_1^\top-e_2^\top\rangle,\quad \langle e_2\rangle\cdot\langle e_3\rangle=\langle e_1^\top\rangle,\quad \langle e_2^\top\rangle\cdot\langle e_1^\top-e_3^\top\rangle=\langle e_1+e_3\rangle,$$
$$\langle e_3^\top\rangle\cdot\langle e_1^\top-e_2^\top\rangle=\langle e_1+e_2\rangle,\quad \langle e_1+e_3\rangle\cdot\langle e_1+e_2\rangle=\langle e_1^\top-e_2^\top-e_3^\top\rangle,$$
$$\langle e_1^\top-e_2^\top-e_3^\top\rangle\cdot\langle e_1^\top\rangle=\langle e_3-e_2\rangle.$$

Используя указанные выше соотношения, введем формулы, выделяющие в $\mathfrak{A}_\mathfrak{F}$ элементы $\langle e_1+e_2\rangle$, $\langle e_2-e_1\rangle$ и $\langle e_3-e_2\rangle$:

$$\Delta_1(u,\overline{E})=\exists w_1\exists w_2(P(E_1,E_2,w_1)\&P(E_3,E_4,w_2)\&P(w_1,w_2,u)).$$

Формула $\Delta_1(u,\overline{E})$ истинна на элементе u в модели $\mathfrak{A}_\mathfrak{F}$, если и только если $u=\langle e_1+e_2\rangle$, и эквивалентна в $\mathfrak{A}_\mathfrak{F}$ формуле

$$\forall w_1\forall w_2((P(E_1,E_2,w_1)\&P(E_3,E_4,w_2))\longrightarrow P(w_1,w_2,u)).$$

Далее положим

$$\Delta_2(u,\overline{E})=\exists w_1\ldots\exists w_8(P(E_2,E_3,w_1)\&P(E_1,E_4,w_2)\&P(E_1,E_3,w_3)\&P(E_2,E_4,w_4)\&P(w_1,w_2,w_5)\&P(w_3,w_4,w_6)\&P(w_5,w_6,w_7)\&P(E_1,E_2,w_8)\&P(w_7,w_8,u)).$$

Формула $\Delta_2(u,\overline{E})$ истинна на элементе u в модели $\mathfrak{A}_\mathfrak{F}$, если и только если $u=\langle e_2-e_1\rangle$, и эквивалентна в $\mathfrak{A}_\mathfrak{F}$ формуле

$$\forall w_1\ldots\forall w_8((P(E_2,E_3,w_1)\&P(E_1,E_4,w_2)\&P(E_1,E_3,w_3)\&P(E_2,E_4,w_4)\&P(w_1,w_2,w_5)\&P(w_3,w_4,w_6)\&P(w_5,w_6,w_7)\&P(E_1,E_2,w_8))\longrightarrow P(w_7,w_8,u)).$$

Аналогичным образом определяется формула $\Delta_3(u,\overline{E})$, истинная на элементе u в модели $\mathfrak{A}_\mathfrak{F}$, если и только если $u=\langle e_3-e_2\rangle$.

Далее определим формулы, описывающие условия из пп. (г)–(ж) леммы 1:

$$\Psi_1(u,v,\overline{E})=\Phi_1(u,\overline{E})\&\Phi_2(v,\overline{E})\&\exists w(\Delta_3(w,\overline{E})\&I(w,u,v));$$
$$\Psi_2(u,v,\overline{E})=\Phi_2(u,\overline{E})\&\Phi_3(v,\overline{E})\&\exists w(\Delta_2(w,\overline{E})\&I(u,w,v));$$

$$\Psi_3(u,v,\overline{E})=\Phi_4(u,\overline{E})\&\Phi_2(v,\overline{E})\&\exists w_1\exists w_2(P(u,E_2,w_1)\&P(E_1,E_3,w_2)\&P(w_1,w_2,v));$$

$$\Psi_4(u,v,\overline{E})=\Phi_4(u,\overline{E})\&\Phi_3(v,\overline{E})\&\exists w_1\exists w_2(P(u,E_1,w_1)\&P(E_2,E_3,w_2)\&P(w_1,w_2,v)).$$

Соответствующие эквивалентные формулы имеют вид

$$\Phi_1(u,\overline{E})\&\Phi_2(v,\overline{E})\&\forall w(\Delta_3(w,\overline{E})\to I(w,u,v));$$

$$\Phi_2(u,\overline{E})\&\Phi_3(v,\overline{E})\&\forall w(\Delta_2(w,\overline{E})\to I(u,w,v));$$

$$\Phi_4(u,\overline{E})\&\Phi_2(v,\overline{E})\&\forall w_1\forall w_2((P(u,E_2,w_1)\&P(E_1,E_3,w_2))\to P(w_1,w_2,v));$$

$$\Phi_4(u,\overline{E})\&\Phi_3(v,\overline{E})\&\forall w_1\forall w_2((P(u,E_1,w_1)\&P(E_2,E_3,w_2))\to P(w_1,w_2,v)).$$

В силу утверждений (г)–(ж) из леммы 1 справедливы следующие эквивалентности:

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}\models\Psi_1(u,v,\overline{E})\iff u=\langle xe_1+e_2\rangle \text{ и } v=\langle xe_1+e_3\rangle \text{ для некоторого } x\in\mathfrak{F};$$

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}\models\Psi_2(u,v,\overline{E})\iff u=\langle xe_1+e_3\rangle \text{ и } v=\langle xe_2+e_3\rangle \text{ для некоторого } x\in\mathfrak{F};$$

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}\models\Psi_3(u,v,\overline{E})\iff u=\langle xe_1+ye_2+e_3\rangle \text{ и } v=\langle xe_1+e_3\rangle \text{ для некоторых } x,y\in\mathfrak{F};$$

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}\models\Psi_4(u,v,\overline{E})\iff u=\langle xe_1+ye_2+e_3\rangle \text{ и } v=\langle ye_2+e_3\rangle \text{ для некоторых } x,y\in\mathfrak{F}.$$

Определим формулу, описывающую операцию сложения в ассоциативном теле $\mathfrak{F}$:

$$\begin{aligned}\mathscr{X}(u,v,w,\overline{E})=\Phi_1(u,\overline{E})&\&\Phi_1(v,\overline{E})\&\Phi_1(w,\overline{E})\\ &\&\exists w_1\ldots\exists w_6(\Psi_1(u,w_1,\overline{E})\&\Psi_1(v,w_2,\overline{E}))\\ &\&\Psi_2(w_2,w_3,\overline{E})\&\Psi_1(w,w_4,\overline{E})\&\Psi_3(w_5,w_1,\overline{E})\&\Psi_4(w_5,w_3,\overline{E})\\ &\&\Delta_1(w_6,\overline{E})\&I(w_5,w_6,w_4)).\end{aligned}$$

Формула $\mathscr{X}(u,v,w,\overline{E})$ эквивалентна в модели $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ формуле

$$\begin{aligned}&\Phi_1(u,\overline{E})\&\Phi_1(v,\overline{E})\&\Phi_1(w,\overline{E})\&\forall w_1\ldots\forall w_6((\Psi_1(u,w_1,\overline{E})\&\Psi_1(v,w_2,\overline{E}))\\ &\quad\&\Psi_2(w_2,w_3,\overline{E})\&\Psi_1(w,w_4,\overline{E})\&\Psi_3(w_5,w_1,\overline{E})\&\Psi_4(w_5,w_3,\overline{E})\&\Delta_1(w_6,\overline{E}))\\ &\qquad\longrightarrow I(w_5,w_6,w_4)).\end{aligned}$$

В силу утверждений (б), (г)–(ж) леммы 1 условие $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}\models\mathscr{X}(u,v,w,\overline{E})$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют $x,y,z\in\mathfrak{F}$ такие, что

$$u=\langle xe_1+e_2\rangle \;\&\; v=\langle ye_1+e_2\rangle \;\&\; w=\langle ze_1+e_2\rangle \;\&\; \mathfrak{F}\models y+z=x.$$

Аналогично определяется формула, описывающая операцию умножения в $\mathfrak{F}$:

$$\begin{aligned}&\Theta(u,v,w,\overline{E})=\Phi_1(u,\overline{E})\&\Phi_1(v,\overline{E})\&\Phi_1(w,\overline{E})\&\exists w_1\ldots\exists w_4(\Psi_1(u,w_1,\overline{E})\\ &\quad\&\Psi_1(v,w_2,\overline{E}))\&\Psi_2(w_2,w_3,\overline{E})\&\Psi_3(w_4,w_1,\overline{E})\&\Psi_4(w_4,w_3,\overline{E})\&I(w_4,w,E_3)).\end{aligned}$$

Формула $\Theta(u,v,w,\overline{E})$ эквивалентна в модели $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ формуле

$$\begin{aligned}&\Phi_1(u,\overline{E})\&\Phi_1(v,\overline{E})\&\Phi_1(w,\overline{E})\&\forall w_1\ldots\forall w_4((\Psi_1(u,w_1,\overline{E})\&\Psi_1(v,w_2,\overline{E}))\\ &\qquad\&\Psi_2(w_2,w_3,\overline{E})\&\Psi_3(w_4,w_1,\overline{E})\&\Psi_4(w_4,w_3,\overline{E}))\longrightarrow I(w_4,w,E_3)).\end{aligned}$$

В силу утверждений (в)–(ж) леммы 1 условие $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}\models\Theta(u,v,w,\overline{E})$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют $x,y,z\in\mathfrak{F}$ такие, что

$$u=\langle xe_1+e_2\rangle \;\&\; v=\langle ye_1+e_2\rangle \;\&\; w=\langle ze_1+e_2\rangle \;\&\; \mathfrak{F}\models y\cdot z=x.$$

Определим в проективной плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ отношения

$$F_0 = \{u \mid \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Phi_1(u, \overline{E})\}, \quad S_0 = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \mathscr{X}(u, v, w, \overline{E})\},$$

$$P_0 = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Theta(u, v, w, \overline{E})\}.$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что

$$F_0 = \{\langle xe_1 + e_2\rangle \mid x \in \mathfrak{F}\},$$

$$S_0 = \{\langle\langle xe_1 + e_2\rangle, \langle ye_1 + e_2\rangle, \langle ze_1 + e_2\rangle\rangle \mid \mathfrak{F} \models y + z = x\},$$

$$P_0 = \{\langle\langle xe_1 + e_2\rangle, \langle ye_1 + e_2\rangle, \langle ze_1 + e_2\rangle\rangle \mid \mathfrak{F} \models y \cdot z = x\}.$$

Значит, исходное ассоциативное тело $\mathfrak{F}$ изоморфно $\mathfrak{F}_0 = \langle F_0, S_0, P_0\rangle$ (в предикатном языке). Заметим, что определение тела $\mathfrak{F}_0$ зависит от выбора остова $\overline{E}$ в плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$, но при любом выборе является изоморфной копией координатного тела плоскости.

Рассуждая в общем случае, можно рассмотреть произвольную изоморфную копию $\mathfrak{A}$ некоторой дезарговой плоскости и, зафиксировав произвольный остов $\overline{E}$ в $\mathfrak{A}$, определить формульные отношения

$$F = \{u \mid \mathfrak{A} \models \Phi_1(u, \overline{E})\},$$

$$P_+ = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{A} \models \mathscr{X}(u, v, w, \overline{E})\}, \quad P_\times = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{A} \models \Theta(u, v, w, \overline{E})\}.$$

Тогда по-прежнему алгебраическая система $\mathfrak{F} = \langle F, P_+, P_\times\rangle$ будет ассоциативным телом, изоморфным (в предикатном языке) координатному телу плоскости $\mathfrak{A}$. Будем в таком случае называть модель $\mathfrak{F} = \langle F, P_+, P_\times\rangle$ *телом, определенным с помощью конструкции из* § 2 *в плоскости* $\mathfrak{A}$ *на остове* $\overline{E}$.

§ 3. О вычислимых семействах дезарговых плоскостей

В данном параграфе докажем, что никакое вычислимое семейство дезарговых проективных плоскостей не покрывает все типы вычислимого изоморфизма проективной плоскости, определенной алгебраически замкнутым полем счетной степени трансцендентности.

Индексом вычислимой проективной плоскости $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, P\rangle$ называем канторовский номер $c^4(n_1, n_2, n_3, n_4)$ четверки $\langle n_1, n_2, n_3, n_4\rangle$, где n_1, n_2, n_3, n_4 — клиниевские номера характеристических функций для отношений A, A^0, ${}^0A$, P соответственно.

Индексом вычислимого ассоциативного тела $\mathfrak{F} = \langle F, P_+, P_\times\rangle$ (в предикатном языке) называем канторовский номер $c^3(n_1, n_2, n_3)$ тройки $\langle n_1, n_2, n_3\rangle$, где n_1, n_2, n_3 — клиниевские номера характеристических функций для отношений F, P_+, $P_\times$ соответственно.

Остов $\langle a_1, a_2, a_3, a_4\rangle$ в вычислимой дезарговой проективной плоскости $\mathfrak{A}$ с минимальным номером $c^4(a_1, a_2, a_3, a_4)$ будем называть *минимальным остовом в* $\mathfrak{A}$.

Предложение 2. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— вычислимая дезаргова проективная плоскость,* $\overline{E} = \langle E_1, E_2, E_3, E_4\rangle$ *— минимальный остов в* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}$ *— ассоциативное тело, определенное с помощью конструкции из* § 2 *в плоскости* $\mathfrak{A}$ *на остове* $\overline{E}$. *Тогда* *тело $\mathfrak{F}$ вычислимо и, более того, существует одноместная частично вычислимая функция α такая, что если n — индекс плоскости $\mathfrak{A}$, то $\alpha(n)$ — индекс тела $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Поскольку каждая формула из § 2 эквивалентна в плоскости некоторой $\exists$-формуле и некоторой $\forall$-формуле, заключаем, что все отношения, определимые в $\mathfrak{A}$ с помощью этих формул, вычислимы. В частности, вычислимыми являются множества

$$F = \{u \in \omega \mid \mathfrak{A} \models \Phi_1(u, \overline{E})\},$$
$$P_+ = \{\langle u, v, w\rangle \in \omega^3 \mid \mathfrak{A} \models \mathscr{X}(u, v, w, \overline{E})\},$$
$$P_\times = \{\langle u, v, w\rangle \in \omega^3 \mid \mathfrak{A} \models \Theta(u, v, w, \overline{E})\}.$$

Следовательно, тело $\mathfrak{F} = \langle F, P_+, P_\times\rangle$ вычислимо.

Так как формула $Fr(v_1, v_2, v_3, v_4)$ задает вычислимое отношение на $\mathfrak{A}$, минимальный остов $\overline{E}$ плоскости $\mathfrak{A}$ находится эффективно по индексу $\mathfrak{A}$. Кроме того, все формульные отношения из конструкции § 2 равномерно эффективно зависят от индекса плоскости $\mathfrak{A}$ и остова $\overline{E}$. Отсюда заключаем, что индекс тела $\mathfrak{F}$ находится эффективно по индексу плоскости $\mathfrak{A}$, т. е. существует частично вычислимая одноместная функция α такая, что $\alpha(n)$ является индексом тела $\mathfrak{F}$, если n — индекс плоскости $\mathfrak{A}$.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимое ассоциативное тело. Тогда дезаргова проективная плоскость $\mathfrak{A}_\mathfrak{F}$ имеет вычислимое представление.*

Доказательство. Пусть тело $\mathfrak{F} = \langle F, +, \cdot\rangle$ вычислимо. Зафиксируем базис e_1, e_2, e_3 левого векторного пространства $V_\mathfrak{F}$. Тогда любой элемент $\mathfrak{A}_\mathfrak{F}$ представим единственным образом в одном и только одном из следующих шести видов:

(а) $\langle e_1\rangle$,	(г) $\langle e_3^\top\rangle$,
(б) $\langle xe_1 + e_2\rangle,\ x \in \mathfrak{F}$,	(д) $\langle e_2^\top + ze_3^\top\rangle,\ z \in \mathfrak{F}$,
(в) $\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle,\ x, y \in \mathfrak{F}$,	(е) $\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle,\ y, z \in \mathfrak{F}$.

При этом имеют место следующие правила умножения элементов вида (а)–(е):

(аб) $\langle e_1\rangle\cdot\langle xe_1 + e_2\rangle = \langle e_3^\top\rangle$,

(ав) $\langle e_1\rangle\cdot\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle = \langle e_2^\top - ye_3^\top\rangle$,

(бб) $\langle xe_1 + e_2\rangle\cdot\langle ye_1 + e_2\rangle = \langle e_3^\top\rangle$, где $x \neq y$,

(бв) $\langle ze_1 + e_2\rangle\cdot\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle = \langle e_1^\top - ze_2^\top + (yz - x)e_3^\top\rangle$,

(вв1) $\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle\cdot\langle ze_1 + ye_2 + e_3\rangle = \langle e_2^\top - ye_3^\top\rangle$, где $x \neq z$,

(вв2) $\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle\cdot\langle ze_1 + te_2 + e_3\rangle = \langle e_1^\top + (y - t)^{-1}(z - x)e_2^\top + (-x - y(y - t)^{-1}(z - x))e_3^\top\rangle$, где $y \neq t$,

(гд) $\langle e_3^\top\rangle\cdot\langle e_2^\top + ze_3^\top\rangle = \langle e_1\rangle$,

(ге) $\langle e_3^\top\rangle\cdot\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle = \langle -ye_1 + e_2\rangle$,

(дд) $\langle e_2^\top + ze_3^\top\rangle\cdot\langle e_2^\top + ye_3^\top\rangle = \langle e_1\rangle$, где $z \neq y$,

(де) $\langle e_2^\top + xe_3^\top\rangle\cdot\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle = \langle (xy - z)e_1 - xe_2 + e_3\rangle$,

(ее1) $\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle\cdot\langle e_1^\top + ye_2^\top + te_3^\top\rangle = \langle -ye_1 + e_2\rangle$, где $z \neq t$,

(ее2) $\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle\cdot\langle e_1^\top + xe_2^\top + te_3^\top\rangle = \langle(-z - (z - t)(x - y)^{-1}y)e_1 + (z - t)(x - y)^{-1}e_2 + e_3\rangle$, где $x \neq y$.

Используя представления элементов в виде (а)–(е), определим вычислимые подмножества ω, положив

$$A^0 = \{c^4(1, 1, 0, 0)\} \cup \{c^4(1, x, 1, 0) \mid x \in F\} \cup \{c^4(1, x, y, 1) \mid x, y \in F\},$$

$$^0A = \{c^4(2,0,0,1)\} \cup \{c^4(2,0,1,z) \mid z \in F\} \cup \{c^4(2,1,y,z) \mid y,z \in F\},$$
$$A = A^0 \cup {}^0A.$$

При этом считаем, что точки вида (а)–(в) кодируются числами $c^4(1,1,0,0)$, $c^4(1,x,1,0)$, $c^4(1,x,y,1)$ соответственно, а прямые вида (г)–(е) — числами $c^4(2,0,0,1)$, $c^4(2,0,1,z)$, $c^4(2,1,y,z)$ соответственно.

Используя данное сопоставление между элементами вида (а)–(е) и их кодами, определим в соответствии с приведенными выше правилами умножения в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ вычислимое отношение $P \subseteq \omega^3$, задающее график операции умножения на элементах A. Тогда модель $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, P\rangle$ является вычислимой проективной плоскостью, изоморфной $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_\omega$ алгебраически замкнутое поле счетного ранга трансцендентности над $\mathbb{Q}$. Известно (см. [4, следствие 5.1.8]), что поле $\mathfrak{F}_\omega$ не ограничено. Из неограниченности $\mathfrak{F}_\omega$ следует, что по любому вычислимому семейству S моделей сигнатуры $\left\langle P_+^3, P_\times^3\right\rangle$ эффективно строится вычислимое представление $\mathfrak{F}$ поля $\mathfrak{F}_\omega$ такое, что $\mathfrak{F}$ не вычислимо изоморфно ни одной модели из S. Покажем, что паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_\omega}$, определенная полем $\mathfrak{F}_\omega$, наследует описанное свойство $\mathfrak{F}_\omega$.

Теорема 4. *Пусть $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ — вычислимая последовательность дезарговых проективных плоскостей. Тогда существует вычислимое представление $\mathfrak{A}$ плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_\omega}$ такое, что $\mathfrak{A}$ не вычислимо изоморфно ни одной плоскости из $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$.*

Доказательство. В силу вычислимости последовательности $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ заключаем, что функция β, сопоставляющая натуральному n индекс плоскости $\mathfrak{A}_n$, вычислима.

Для каждого $n \in \omega$ обозначим через $\overline{E}_n = \left\langle E_n^1, E_n^2, E_n^3, E_n^4\right\rangle$ минимальный остов в $\mathfrak{A}_n$ и через $\mathfrak{F}_n$ — ассоциативное тело, определенное с помощью конструкции из § 2 в плоскости $\mathfrak{A}_n$ на остове $\overline{E}_n$. Тогда в силу предложения 2 каждое тело $\mathfrak{F}_n$ вычислимо и его индекс вычисляется как $\alpha(\beta(n))$. Тем самым последовательность ассоциативных тел $\{\mathfrak{F}_n\}_{n\in\omega}$ вычислима.

Так как модель $\mathfrak{F}_\omega$ не ограничена, найдется вычислимое представление $\mathfrak{F}$ поля $\mathfrak{F}_\omega$ такое, что $\mathfrak{F}$ не вычислимо изоморфно $\mathfrak{F}_n$ ни для какого $n \in \omega$. Для данного вычислимого поля $\mathfrak{F}$ определим вычислимое представление $\mathfrak{A}$ плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ в соответствии с предложением 3. Ясно, что $\mathfrak{A}$ является также вычислимым представлением для $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_\omega}$.

Используя конструкцию из доказательства предложения 3, зафиксируем естественный изоморфизм $\nu : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$, определенный по следующей схеме:

$$\nu(c^4(1,1,0,0)) = \langle e_1\rangle, \quad \nu(c^4(1,x,1,0)) = \langle xe_1 + e_2\rangle,\ x \in \mathfrak{F},$$

$$\nu(c^4(1,x,y,1)) = \langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle,\ x,y \in \mathfrak{F}, \quad \nu(c^4(2,0,0,1)) = \left\langle e_3^\top\right\rangle,$$

$$\nu(c^4(2,0,1,z)) = \left\langle e_2^\top + ze_3^\top\right\rangle,\ z \in \mathfrak{F}, \quad \nu(c^4(2,1,y,z)) = \left\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\right\rangle,\ y,z \in \mathfrak{F},$$

где e_1, e_2, e_3 — базис векторного пространства $V_{\mathfrak{F}}$.

Допустим, что для некоторого $n \in \omega$ существует вычислимый изоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_n$. Для $1 \leqslant i \leqslant 4$ введем обозначение $D_i = \varphi^{-1}\left(E_n^i\right)$. Тогда четверка $\overline{D} = \langle D_1, D_2, D_3, D_4\rangle$ является остовом в $\mathfrak{A}$. Следовательно, четверка $\langle \nu(D_1), \nu(D_2), \nu(D_3), \nu(D_4)\rangle$ — остов в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$. Стало быть, существует базис d_1, d_2, d_3 пространства $V_{\mathfrak{F}}$ такой, что $\nu(D_1) = \langle d_1\rangle$, $\nu(D_2) = \langle d_2\rangle$, $\nu(D_3) = \langle d_3\rangle$ и

$\nu(D_4) = \langle d_1 + d_2 + d_3 \rangle$. Поскольку элементы e_1, e_2, e_3 также образуют базис $V_{\mathfrak{F}}$, найдутся α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 в $\mathfrak{F}$ с условием

$$d_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 e_3, \quad d_2 = \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 + \gamma_2 e_3.$$

В частности, заметим, что в плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ элемент $\langle x d_1 + d_2 \rangle$ совпадает с элементом $\langle (x\alpha_1 + \alpha_2)e_1 + (x\beta_1 + \beta_2)e_2 + (x\gamma_1 + \gamma_2)e_3 \rangle$, где $x \in \mathfrak{F}$.

Определим отображение $\psi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}_n$, для каждого $x \in \mathfrak{F}$ положив

$$\psi(x) = \varphi(\nu^{-1}(\langle x d_1 + d_2 \rangle)).$$

Отображение $x \longmapsto \nu^{-1}(\langle x d_1 + d_2 \rangle)$ вычислимо, так как может быть задано по следующей кусочной схеме:

$$\nu^{-1}(\langle x d_1 + d_2 \rangle)$$
$$= \begin{cases} c^4(1,1,0,0), & \text{если } x\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \text{ и } x\beta_1 + \beta_2 = 0, \\ c^4(1, (x\beta_1 + \beta_2)^{-1}(x\alpha_1 + \alpha_2), 1, 0), & \text{если } x\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \text{ и } x\beta_1 + \beta_2 \neq 0, \\ c^4(1, (x\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}(x\alpha_1 + \alpha_2), (x\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}(x\beta_1 + \beta_2), 1), & \text{если } x\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция ψ вычислима.

Докажем, что область значений ψ действительно содержится в $\mathfrak{F}_n$. Если $x \in \mathfrak{F}$, то имеет место

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Phi_1(\langle x d_1 + d_2 \rangle, \langle d_1 \rangle, \langle d_2 \rangle, \langle d_3 \rangle, \langle d_1 + d_2 + d_3 \rangle).$$

Поскольку $\nu^{-1} : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{A}$ является изоморфизмом плоскостей, заключаем, что

$$\mathfrak{A} \models \Phi_1(\nu^{-1}(\langle x d_1 + d_2 \rangle), \overline{D}).$$

Аналогично, используя изоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_n$, получаем

$$\mathfrak{A}_n \models \Phi_1(\varphi(\nu^{-1}(\langle x d_1 + d_2 \rangle)), \overline{E}_n).$$

Значит, $\psi(x) \in \mathfrak{F}_n$.

Для доказательства сюръективности ψ рассмотрим произвольный $a \in \mathfrak{F}_n$. Тогда $\mathfrak{A}_n \models \Phi_1(a, \overline{E}_n)$, откуда

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Phi_1(\nu(\varphi^{-1}(a)), \langle d_1 \rangle, \langle d_2 \rangle, \langle d_3 \rangle, \langle d_1 + d_2 + d_3 \rangle).$$

Поскольку формула Φ_1 определяет носитель координатного тела в плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ относительно остова $\langle d_1 \rangle$, $\langle d_2 \rangle$, $\langle d_3 \rangle$, $\langle d_1 + d_2 + d_3 \rangle$, заключаем, что найдется $x \in \mathfrak{F}$ такой, что $\nu(\varphi^{-1}(a)) = \langle x d_1 + d_2 \rangle$. Ясно, что $\psi(x) = a$.

Инъективность ψ следует из инъективности φ, ν и отображения $x \longmapsto \langle x d_1 + d_2 \rangle$.

Следующая цепочка эквивалентностей показывает, что ψ сохраняет операцию сложения в теле:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{F} \models y + z = x \\ &\iff \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \mathscr{X}(\langle x d_1 + d_2 \rangle, \langle y d_1 + d_2 \rangle, \langle z d_1 + d_2 \rangle, \langle d_1 \rangle, \langle d_2 \rangle, \langle d_3 \rangle, \langle d_1 + d_2 + d_3 \rangle) \\ &\iff \mathfrak{A} \models \mathscr{X}(\nu^{-1}(\langle x d_1 + d_2 \rangle), \nu^{-1}(\langle y d_1 + d_2 \rangle), \nu^{-1}(\langle z d_1 + d_2 \rangle), \overline{D}) \\ &\iff \mathfrak{A}_n \models \mathscr{X}(\psi(x), \psi(y), \psi(z), \overline{E}_n) \iff \mathfrak{F}_n \models \psi(y) + \psi(z) = \psi(x). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что ψ сохраняет операцию умножения.

Таким образом, установлено, что ψ является вычислимым изоморфизмом поля $\mathfrak{F}$ на поле $\mathfrak{F}_n$, что противоречит выбору вычислимого представления $\mathfrak{F}$.

Напомним, что класс K моделей некоторой сигнатуры Σ называется *вычислимым* (с точностью до вычислимого изоморфизма), если существует вычислимая последовательность $\{\mathfrak{M}_n\}_{n\in\omega}$ моделей из класса K такая, что для любой вычислимой модели $\mathfrak{M} \in K$ найдется $n \in \omega$ такое, что модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_n$ вычислимо изоморфны. При этом последовательность $\{\mathfrak{M}_n\}_{n\in\omega}$ называется *вычислимой нумерацией класса* K (с точностью до вычислимого изоморфизма).

Следствие 5. *Справедливы следующие утверждения.*

(а) *Любой класс дезарговых проективных плоскостей, содержащий плоскость $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_\omega}$, не имеет вычислимой нумерации* (*с точностью до вычислимого изоморфизма*).

(б) *Класс всех дезарговых проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации* (*с точностью до вычислимого изоморфизма*).

(в) *Класс всех папповых проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации* (*с точностью до вычислимого изоморфизма*).

В заключение отметим, что с учетом полученных выше результатов, а также результатов из [1] вызывает интерес вопрос о существовании класса проективных плоскостей, который все-таки имеет вычислимую нумерацию (с точностью до вычислимого изоморфизма). Безусловно, такие классы существуют. Любой класс, состоящий из одной вычислимо категоричной проективной плоскости (такой, например, является паппова плоскость над полем рациональных чисел), имеет вычислимую нумерацию.

Класс всех конечных проективных плоскостей также вычислим. Для построения нумерации достаточно перебирать всевозможные четверки $\langle D_k, D_l, D_m, D_n\rangle$ конечных множеств, где $\{D_i\}_{i\in\omega}$ — каноническая нумерация конечных подмножеств ω, и эффективно проверять, являются ли они проективными плоскостями. Если $\langle D_k, D_l, D_m, D_n\rangle$ — проективная плоскость, то перечисляем ее в нашей нумерации, в противном случае перечисляем какую-нибудь фиксированную конечную плоскость (например, 14-элементную проективную плоскость).

Другой пример вычислимого класса — семейство всех свободных проективных плоскостей конечного ранга. Более того, данное семейство имеет однозначную вычислимую нумерацию, так как любая свободная проективная плоскость конечного ранга вычислимо категорична, а конструкция Ширшова (см. [2]) позволяет строить вычислимое представление каждой свободной плоскости равномерно и однозначно по рангу плоскости.

С другой стороны, для естественных классов проективных плоскостей остаются открытыми вопросы о существовании вычислимых нумераций с точностью до изоморфизма (необязательно вычислимого). Прежде всего этот вопрос интересен для случая папповых, дезарговых и свободно порожденных проективных плоскостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Когабаев Н. Т.* Класс проективных плоскостей невычислим // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 4. С. 428–455.
2. *Ширшов А. И., Никитин А. А.* К теории проективных плоскостей // Алгебра и логика. 1981. Т. 20, № 3. С. 330–356.
3. *Ширшов А. И., Никитин А. А.* Алгебраическая теория проективных плоскостей. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1987.
4. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная кн., 1999.
5. *Hughes D. R., Piper F. C.* Projective planes. New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1973.

Статья поступила 9 декабря 2011 г.

Когабаев Нурлан Талгатович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`kogabaev@math.nsc.ru`