Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 512.552.34

РЕВЕРСИВНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПОЛУПЕРВИЧНЫХ КОЛЕЦ

А. Абубакр, С. Гонсалес

Аннотация. Обобщено понятие реверсивного дифференцирования путем введения реверсивных обобщенных дифференцирований. Определены *реверсивное* l-*обобщенное дифференцирование* (*реверсивное* r-*обобщенное дифференцирование*) как аддитивное отображение $F : R \to R$, удовлетворяющее $F(xy) = F(y)x + yd(x)$ $(F(xy) = d(y)x + yF(x))$ для всех $x, y \in R$, где d — реверсивное дифференцирование R. Изучена взаимосвязь между реверсивными обобщенными дифференцированиями и обобщенными дифференцированиями на идеале полупервичного кольца и доказано, что если F является реверсивным l-обобщенным (или r-обобщенным) дифференцированием полупервичного кольца R, то R содержит ненулевой центральный идеал.

Ключевые слова: полупервичное кольцо, идеал, дифференцирование, реверсивное дифференцирование, l-обобщенное дифференцирование, r-обобщенное дифференцирование, реверсивное l-обобщенное дифференцирование, реверсивное r-обобщенное дифференцирование.

1. Введение

Всюду далее R обозначает ассоциативное кольцо с центром $Z(R)$. Если I — подмножество в R, то $C_R(I)$ означает централизатор I, т. е. $C_R(I) = \{x \in R \mid xa = ax \text{ для всех } a \in I\}$. Напомним, что R *первично*, если $aRb = (0)$ влечет $a = 0$ или $b = 0$. Кольцо R *полупервично*, если $aRa = 0$ влечет $a = 0$ (очевидно, что первичное кольцо полупервично). Как обычно, $[x, y]$ обозначает коммутатор $xy - yx$. Мы будем часто использовать основные коммутаторные тождества $[xy, z] = x[y, z]+[x, z]y$ и $[x, yz] = y[x, z]+[x, y]z$. Аддитивное отображение d из R в R называется *дифференцированием*, если $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ для всех $x, y \in R$. Зафиксируем $a \in R$. Аддитивное отображение $d : R \to R$, заданное правилом $d(x) = [x, a]$ для всех $x \in R$, является дифференцированием, которое называется *внутренним дифференцированием кольца R, определенным элементом a*.

Понятие реверсивного дифференцирования возникает в одной ранней статье Херстейна [1] при изучении йордановых дифференцирований первичных ассоциативных колец. Реверсивные дифференцирования имеют связи с некоторыми обобщениями дифференцирований. Реверсивное дифференцирование — это аддитивное отображение d из R в R такое, что $d(xy) = d(y)x + yd(x)$ для всех $x, y \in R$. Таким образом, любое реверсивное дифференцирование является

Первый автор благодарен программе Erasmus Mundus за финансовую поддержку грантом программы PhD MEDASTAR (грант N 2011-4051/002-001-EMA2). Второй автор был частично поддержан проектом MTM2010-18370-C04-01.

© 2015 Абубакр А., Гонсалес С.

йордановым дифференцированием (но обратное в общем неверно). В антикоммутативном случае любое реверсивное дифференцирование является антидифференцированием, и наоборот. Реверсивные дифференцирования в случае первичных алгебр Ли и Мальцева изучались Хопкинс и В. Т. Филипповым. В их статьях построены некоторые примеры ненулевых реверсивных дифференцирований 3-мерной простой алгебры Ли sl_2 (см. [2]), а также охарактеризованы первичные алгебры Ли, допускающие ненулевые реверсивные дифференцирования [3, 4]. В частности, В. Т. Филиппов доказал, что любая первичная алгебра Ли, допускающая ненулевые реверсивные дифференцирования, является PI-алгеброй. Он также описал все реверсивные дифференцирования первичных алгебр Мальцева [5]. Суперслучай реверсивных дифференцирований (антисупердифференцирований) простых супералгебр Ли рассматривался в [6, 7], где доказано, что любое реверсивное супердифференцирование простой конечномерной супералгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль является нулевым. После этого И. Б. Кайгородов доказал, что любое реверсивное r-обобщенное (или l-обобщенное) дифференцирование простой (нелиевой) алгебры Мальцева является нулевым (см. [8]).

Херстейн в [1] показал, что если R первично, а d — ненулевое реверсивное дифференцирование R, то R — коммутативная область целостности, а d — дифференцирование. Позднее, в [9] Самман и Алямани обобщили результат Херстейна на случай полупростых колец, доказав, что если R полупросто, то реверсивное дифференцирование является обычным дифференцированием из R в его центр.

Обобщенные дифференцирования введены Брешаром в 1991 г. [10]. Аддитивное отображение $f : R \to R$ называется обобщенным дифференцированием, если существует дифференцирование $d : R \to R$ такое, что $f(xy) = f(x)y + xd(y)$ для всех $x, y \in R$. Можно заметить, что понятие обобщенного дифференцирования включает в себя как дифференцирование, так и левый множитель (при $d = 0$). Гелбаси и Кая в [11] между l-обобщенными дифференцированиями, ассоциированными с дифференцированием d (обобщенные дифференцирования по Брешару), и r-обобщенными дифференцированиями, ассоциированными с дифференцированием d, выделили аддитивные отображения $F : R \to R$, удовлетворяющие равенству $F(xy) = d(x)y + xF(y)$, $x, y \in R$.

В настоящей статье мы обобщаем понятие реверсивного дифференцирования до реверсивного обобщенного дифференцирования. Пусть R — кольцо, а d — реверсивное дифференцирование R. Аддитивное отображение $F : R \to R$ называется *реверсивным* l-*обобщенным дифференцированием* R, ассоциированным с d, если

$$F(xy) = F(y)x + yd(x), \quad x, y \in R.$$

Отображение F называется *реверсивным* r-*обобщенным дифференцированием* ассоциированным с d, если

$$F(xy) = d(y)x + yF(x), \quad x, y \in R.$$

Основная цель настоящей статьи — обобщить вышеупомянутые результаты на случай реверсивных обобщенных дифференцирований. Мы покажем, что если R полупросто, I — идеал в R, а $F : I \to R$ — реверсивное l-обобщенное дифференцирование (реверсивное r-обобщенное дифференцирование), то F является r-обобщенным (l-обобщенным) дифференцированием, переводящим I в $C_R(I)$. В частности, R содержит ненулевой центральный идеал.

Обобщенные йордановы дифференцирования рассматриваются в [12]. Обобщенное йорданово дифференцирование кольца R — это отображение $f : R \to R$, которое удовлетворяет $f(x^2) = f(x)x + xd(x)$, $x \in R$, и некоторого йорданова дифференцирования d кольца R. В теореме 2.7 из [12] доказано, что любое обобщенное йорданово дифференцирование полупервичного кольца R без 2-кручения является обобщенным дифференцированием. Очевидно, что также можно рассмотреть понятие r-обобщенного йорданова дифференцирования. Отображение $g : R \to R$ является r-обобщенным йордановым дифференцированием, если оно удовлетворяет $g(x^2) = d(x)x + xg(x)$ для йорданова дифференцирования d кольца R. Доказательство теоремы 2.7 из [12] может быть адаптировано для доказательства аналогичного результата для r-обобщенного йорданова дифференцирования, т. е. любое r-обобщенное йорданово дифференцирование полупервичного кольца R без 2-кручения является r-обобщенным дифференцированием. Используя эту обобщенную версию теоремы 2.7, мы докажем в данной статье, что для полупервичных колец без 2-кручения понятия реверсивного r-обобщенного, реверсивного l-обобщенного, r-обобщенного и l-обобщенного дифференцирований совпадают.

2. Предварительные сведения и примеры

Следующие леммы будут активно применяться в наших результатах.

Лемма 2.1 [13, теорема 3]. *Пусть R — полупервичное кольцо, а I — ненулевой левый идеал. Если R допускает ненулевое дифференцирование d, которое центрально на I, то R содержит ненулевой центральный идеал.*

Лемма 2.2 [12, теорема 2.7]. *Пусть R — полупервичное кольцо без 2-кручения. Тогда любое обобщенное йорданово дифференцирование на R является обобщенным дифференцированием* (*левым или правым*).

Следующий факт хорошо известен (см. [13, факт IV]).

Утверждение 2.3. *Централизатор любого ненулевого одностороннего идеала первичного кольца совпадает с центром R. В частности, если R не имеет ненулевых центральных идеалов, то R коммутативно.*

В следующих примерах исследуется возможная взаимосвязь между реверсивными l-обобщенными, реверсивными r-обобщенными, l-обобщенными и r-обобщенными дифференцированиями.

Пример 1. Пусть S —кольцо,

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in S \right\}.$$

Тогда R — кольцо. Определим отображения $F : R \to R$ и $d : R \to R$ следующим образом:

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что d является как реверсивным дифференцированием, так и дифференцированием, F — реверсивное l-обобщенное дифференцирование и реверсивное r-обобщенное дифференцирование, ассоциированное с d; F

также является l-обобщенным и r-обобщенным дифференцированием, ассоциированным с d.

Замечание. Отображение F может быть (реверсивным) l-обобщенным (r-обобщенным) дифференцированием относительно двух различных реверсивных дифференцирований. Действительно, F в примере 1 является (реверсивным) l-обобщенным (r-обобщенным) дифференцированием относительно F и d. Но если R полупервично, то реверсивное дифференцирование, ассоциированное с (реверсивным) l-обобщенным (r-обобщенным) дифференцированием, единственно.

Пример 2. Рассмотрим кольцо R из примера 1. Определим отображения $F : R \to R$ и $d : R \to R$ следующим образом:

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a & c-a \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что d является как дифференцированием, так и реверсивным дифференцированием, а F — l-обобщенное дифференцирование относительно d. Однако F не является r-обобщенным дифференцированием относительно d. Кроме того, F не является ни реверсивным l-обобщенным, ни реверсивным r-обобщенным дифференцированием относительно d.

Следующие два примера показывают, что реверсивное l-обобщенное дифференцирование (реверсивное r-обобщенное дифференцирование) относительно реверсивного дифференцирования d, которое также является дифференцированием, не обязательно является r-обобщенным дифференцированием (l-обобщенным дифференцированием) относительно d.

Пример 3. Рассмотрим кольцо $R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$, где $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. Определим отображения $F : R \to R$ и $d : R \to R$ правилами

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b+e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда d — дифференцирование и реверсивное дифференцирование, F — реверсивное l-обобщенное дифференцирование, ассоциированное с d, но не r-обобщен-ное дифференцирование, ассоциированное с d.

Пример 4. Рассмотрим кольцо R из примера 3. Определим отображения $F : R \to R$ и $d : R \to R$ следующим образом:

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d\left(\begin{pmatrix}0 & a & b & c\\ 0 & 0 & 0 & d\\ 0 & 0 & 0 & e\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & b-d\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что F является реверсивным r-обобщенным дифференцированием, ассоциированным с d, но не l-обобщенным дифференцированием, ассоциированным с d.

3. Реверсивные r-обобщенные дифференцирования на идеалах полупервичных колец

Теорема 3.1. *Пусть R — полупервичное кольцо, а I — ненулевой идеал в R. Если существует реверсивное* l*-обобщенное дифференцирование $F : I \to R$, ассоциированное с ненулевым реверсивным дифференцированием d на I, то $d(I), F(I) \subseteq C_R(I)$, d является дифференцированием на I, а F —* r*-обобщенное дифференцирование относительно d на I. Справедливо и обратное.*

Доказательство. Предположим, что F — реверсивное l-обобщенное дифференцирование на I. Тогда

$$F(u^2v) = F(v)u^2 + vd(u^2) = F(v)u^2 + v(d(u)u + ud(u)), \quad u, v \in I,$$

т. е.

$$F(u^2v) = F(v)u^2 + vd(u)u + vud(u), \quad u, v \in I. \tag{3.1}$$

Также

$$F(u(uv)) = F(uv)u + uvd(u) = (F(v)u + vd(u))u + uvd(u), \quad u, v \in I.$$

Следовательно,

$$F(u(uv)) = F(v)u^2 + vd(u)u + uvd(u), \quad u, v \in I. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) получаем

$$[u, v]d(u) = 0, \quad u, v \in I. \tag{3.3}$$

Заменяя v на rv в (3.3) и используя (3.3), имеем

$$[u, r]vd(u) = 0, \quad u, v \in I,\ r \in R. \tag{3.4}$$

Замена v на $d(u)s[u, r]$ в (3.4) дает

$$[u, r]d(u)s[u, r]d(u) = 0, \quad u \in I,\ r, s \in R. \tag{3.5}$$

Так как R полупервично, по (3.5) получаем

$$[u, r]d(u) = 0, \quad u \in I,\ r \in R. \tag{3.6}$$

Линеаризация (3.6) приводит к

$$[w, r]d(u) + [u, r]d(w) = 0, \quad u, w \in I,\ r \in R.$$

Таким образом,

$$[w, r]d(u) = -[u, r]d(w), \quad u, w \in I,\ r \in R. \tag{3.7}$$

Заменяя v на $d(w)s[w, r]$ в (3.4) и используя (3.7), получаем

$$0 = [u, r]d(w)s[w, r]d(u) = -[u, r]d(w)s[u, r]d(w), \quad u, w \in I,\ r, s \in R.$$

Следовательно,

$$[u,r]d(w)R[u,r]d(w) = (0), \quad u,w \in I,\ r \in R. \tag{3.8}$$

Поскольку R полупервично, то

$$[u,r]d(w) = 0, \quad u,w \in I,\ r \in R. \tag{3.9}$$

Заменяя r на rt в (3.9), имеем

$$[u,r]td(w) = 0, \quad u,w \in I,\ r,t \in R. \tag{3.10}$$

Положим $r = d(w)$ и заменим t на tu в (3.10). Получим $[u,d(w)]tud(w) = 0$, $w,u \in I$, $t \in R$. Умножая (3.10) справа на u, выводим $[u,d(w)]td(w)u = 0$. Вычитая два последних соотношения, получаем $[u,d(w)]R[u,d(w)] = (0)$, $w,u \in I$. Из полупервичности R следует, что $[u,d(w)] = 0$, $w,u \in I$, т. е. $d(I) \subseteq C_R(I)$. Таким образом,

$$d(xy) = d(y)x + yd(x) = d(x)y + xd(y), \quad x,y \in I,$$

тем самым d — дифференцирование на I. С другой стороны, поскольку F является реверсивным l-обобщенным дифференцированием, имеем

$$F(uv^2) = F(v^2)u + v^2d(u) = (F(v)v + vd(v))u + v^2d(u), \quad u,v \in I.$$

Следовательно,

$$F(uv^2) = F(v)vu + vd(v)u + v^2d(u), \quad u,v \in I. \tag{3.11}$$

Также

$$\begin{gathered} F((uv)v) = F(v)uv + vd(uv) = F(v)uv + v(d(v)u + vd(u)), \quad u,v \in I, \\ F((uv)v) = F(v)uv + vd(v)u + v^2d(u), \quad u,v \in I. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Комбинируя (3.11) и (3.12), выводим

$$F(v)[u,v] = 0, \quad u,v \in I. \tag{3.13}$$

Используя те же методы, что и выше, получаем $F(I) \subseteq C_R(I)$. Значит,

$$F(xy) = F(y)x + yd(x) = xF(y) + d(x)y, \quad x,y \in I,$$

и F является r-обобщенным дифференцированием относительно дифференцирования d. Обратное тривиально.

Теорема 3.2. *Пусть R — полупервичное кольцо, а I — ненулевой идеал в R. Если существует реверсивное* r*-обобщенное дифференцирование $F : I \to R$, ассоциированное с ненулевым реверсивным дифференцированием d на I, то $d(I), F(I) \subseteq C_R(I)$, d — дифференцирование на I, а F —* l*-обобщенное дифференцирование относительно d на I. Верно и обратное.*

Доказательство следует той же схеме, что и доказательство теоремы 3.1.

Следствие 3.3. *Пусть R — полупервичное кольцо. Если существует реверсивное* l*-обобщенное (или* r*-обобщенное) дифференцирование $F : R \to R$, ассоциированное с ненулевым реверсивным дифференцированием d на R, то R содержит ненулевой центральный идеал.*

Доказательство. По теореме 3.1 (или теореме 3.2) имеем $d(R) \subseteq Z(R)$, т. е. $[d(x),y] = 0$ для всех $x,y \in R$. Тогда d центрально на R. По лемме 2.1 (при $I = R$) R содержит ненулевой центральный идеал.

Данное ниже следствие устанавливает взаимосвязь между реверсивными l-обобщенными и l-обобщенными дифференцированиями.

Следствие 3.4. *Пусть R — полупервичное кольцо без 2-кручения. Если существует реверсивное* l-*обобщенное* (r-*обобщенное*) *дифференцирование $F : R \to R$, ассоциированное с ненулевым реверсивным дифференцированием d на R, то F является реверсивным* r-*обобщенным* (l-*обобщенным*) *дифференцированием относительно d. Более того, d — дифференцирование, а F является* l-*обобщенным* (r-*обобщенным*) *дифференцирование относительно d.*

Доказательство. Пусть F — реверсивное l-обобщенное дифференцирование. Тогда по теореме 3.1 d является дифференцированием, $F(I), d(I) \subseteq C_R(I)$. По предположению $F(xy) = F(y)x + yd(x)$, $x, y \in R$. Полагая $y = x$, имеем $F(x^2) = F(x)x + xd(x)$, $x \in R$, т. е. F является обобщенным йордановым дифференцированием на R. По лемме 2.2 F — l-обобщенное дифференцирование на R. Используя обратное утверждение теоремы 3.2, получаем, что F является реверсивным r-обобщенным дифференцированием на R. Случай реверсивного r-обобщенного дифференцирования получается из тех же рассуждений.

Следствие 3.5. *Отображение $d : I \to R$, где I — двусторонний идеал полупервичного кольца R, является реверсивным дифференцированием тогда и только тогда, когда оно является дифференцированием, центральным на I, т. е. $d(I) \subseteq C_R(I)$.*

Определение 3.6. Отображение F является *реверсивным обобщенным дифференцированием*, если оно является реверсивным l- и r-обобщенным дифференцированием.

Из теорем 3.1 и 3.2 вытекает

Следствие 3.7. *Отображение F полупервичного кольца R является реверсивным обобщенным дифференцированием тогда и только тогда, когда оно является центральным обобщенным дифференцированием.*

Следствие 3.8. *Пусть R — первичное кольцо, а I — ненулевой идеал в R. Если существует реверсивное* l-*обобщенное* (r-*обобщенное*) *дифференцирование $F : I \to I$, ассоциированное с ненулевым реверсивным дифференцированием $d : I \to I$, то R коммутативно.*

Доказательство. По следствию 3.3 I (который, очевидно, также первичен) содержит ненулевой центральный идеал. По утверждению 2.3 I коммутативный. Согласно утверждению 2.3 $I \subseteq C_R(I) = Z(R)$, а потому I — ненулевой центральный идеал в R и R коммутативно.

Следующий пример показывает, что условие полупервичности на кольцо R не является избыточным.

Пример 5. Рассмотрим кольцо R из примера 3. Тогда

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

является идеалом в R. Определим $F : R \to R$ и $d : R \to R$ следующим образом:

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда легко видеть, что d является ненулевым реверсивным дифференцированием и дифференцированием на I, F — реверсивное r-обобщенное дифференцирование на I, но не l-обобщенное дифференцирование и $d(I), F(I) \nsubseteq C_R(I)$.

Благодарности. Авторы очень благодарны рецензенту за важные комментарии, особенно касающиеся реверсивных дифференцирований в антикоммутативном случае, которые улучшили изложение данное статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Herstein I. N.* Jordan derivations of prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 1104–1110.
2. *Hopkins N. C.* Generalized derivations of nonassociative algebras // Nova J. Math. 1996. V. 5, N 3. P. 215–224.
3. *Филиппов В. Т.* О δ-дифференцированиях алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1409–1422.
4. *Филиппов В. Т.* δ-Дифференцирования первичных алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 201–213.
5. *Филиппов В. Т.* О δ-дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 618–625.
6. *Кайгородов И. Б.* О δ-дифференцированиях классических супералгебр Ли // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 3. С. 547–565.
7. *Кайгородов И. Б.* δ-Супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 2. С. 195–215.
8. *Кайгородов И. Б.* Об $(n+1)$-арных дифференцированиях простых n-арных алгебр Мальцева // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, № 4. С. 85–100.
9. *Samman M. S., Alyamani N.* Derivations and reverse derivations in semiprime rings // Int. Math. Forum. 2007. V. 2, N 39. P. 1895–1902.
10. *Brešar M.* On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations // Glasgow Math. J. 1991. V. 33. P. 89–93.
11. *Гёлбаши О., Кая К.* О лиевых идеалах с обобщенными дифференцированиями // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 1052–1057.
12. *Wei F., Xiao Z.* Generalized Jordan derivations on semiprime rings and its applications in range inclusion problems // Mediterr. J. Math. 2011. V. 8. P. 271–291.
13. *Bell H. E., Martindale III W. S.* Centralizing mappings of semiprime rings // Can. Math. Bull. 1987. V. 30. P. 92–101.

Статья поступила 4 февраля 2014 г.

Ahmed Aboubakr (Абубакр Ахмед)
University of Fayoum,
Fayoum 63514 Egypt;
Universidad de Oviedo,
Oviedo 33007 Spain
afs00@fayoum.edu.eg, uo242478@uniovi.es

Santos González (Гонсалес Сантос)
Universidad de Oviedo,
Oviedo 33007 Spain
santos@uniovi.es