

СТРОЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ТОРОВ В СПИНОРНЫХ ГРУППАХ

А. В. Заварницин

Аннотация. Найдены абелевы инварианты максимальных торов в конечных спинорных группах типов D_l и B_l .

DOI 10.17377/smzh.2015.56.306

Ключевые слова: спинорная группа, максимальный тор.

К 75-летию Юрия Леонидовича Ершова

1. Введение

Максимальные торы конечных групп лиева типа возникают как неподвижные точки эндоморфизмов Фробениуса, действующих на объемлющей алгебраической группе. Являясь абелевыми группами, конечные максимальные торы разлагаются в прямое произведение циклических групп. Явный вид этого разложения был определен для многих классических групп и групп Шевалле (см. [1, 2]). Эта информация важна, например, при изучении множества порядков элементов, а также некоторых проблем теории представлений. В настоящей работе найдено аналогичное циклическое разложение для торов групп $\mathrm{Spin}_{2l}^{\pm}(q)$ и $\mathrm{Spin}_{2l+1}(q)$.

Пусть F — алгебраически замкнутое поле положительной характеристики p и $\mathbb{G}$ — односвязная простая линейная алгебраическая группа над F типа D_l или B_l , которая, как хорошо известно, изоморфна $\mathrm{Spin}_{2l}(F)$ или $\mathrm{Spin}_{2l+1}(F)$ соответственно. Пусть σ — эндоморфизм Фробениуса группы $\mathbb{G}$, ассоциированный с автоморфизмом $[t \mapsto t^q]$ поля F , где $q = p^m$, и в случае D_l с симметрией диаграммы Дынкина порядка 1 или 2. Тогда группа $G = C_{\mathbb{G}}(\sigma)$ изоморфна в случае D_l конечной спинорной группе $\mathrm{Spin}_{2l}^{\pm}(q)$, где знак $+$ или $-$ берется в зависимости от того, имеет ли симметрия порядок 1 или 2, а в случае B_l — конечной спинорной группе $\mathrm{Spin}_{2l+1}(q)$. Если $\mathbb{T}$ — σ -инвариантный максимальный тор группы $\mathbb{G}$, то будем говорить, что $T = C_{\mathbb{T}}(\sigma)$ — *максимальный тор* конечной группы G .

Классы G -сопряженности σ -инвариантных максимальных торов группы $\mathbb{G}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами σ -сопряженности группы Вейля. Поэтому соответствующие торы T параметризуются *разбиениями со знаком* $l = l' + l''$, где компоненты $l' = l_1 + \dots + l_r$ и $l'' = l_{r+1} + \dots + l_{r+s}$ соответствуют положительным и отрицательным членам. Такое разбиение однозначно параметризует тор в $\mathrm{Spin}_{2l+1}^+(q)$, а также тор в $\mathrm{Spin}_{2l}^+(q)$ при s четном

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта № 14-21-00065).

и в $\text{Spin}_{2l}^-(q)$ при s нечетном. Строение этого тора можно описать единообразно во всех трех случаях.

Обозначим $L' = \{l_1, \dots, l_r\}$ и $L'' = \{l_{r+1}, \dots, l_{r+s}\}$. Также положим $\varepsilon_i = 1$ при $1 \leq i \leq r$ и $\varepsilon_i = -1$ при $r+1 \leq i \leq r+s$. Пусть $\mathbb{Z}_n$ обозначает циклическую группу порядка n . Доказана

Теорема 1. Пусть G изоморфна $\text{Spin}_{2l}^\pm(q)$ или $\text{Spin}_{2l+1}(q)$ и T — максимальный тор группы G , соответствующий разбиению со знаком числа l , как выше.

(i) Если найдутся нечетные элементы $l_i \in L'$ и $l_j \in L''$, то

$$T \cong \mathbb{Z}_{(q^{l_i}-1)(q^{l_j}+1)} \times \prod_{k \neq i, j} \mathbb{Z}_{q^{l_k}-\varepsilon_k}.$$

(ii) Если найдутся нечетное l_i точно в одном из множеств L' или L'' и четное l_j в L'' , то

$$T \cong \mathbb{Z}_{(q^{l_i}-\varepsilon_i)(q^{l_j}+1)} \times \prod_{k \neq i, j} \mathbb{Z}_{q^{l_k}-\varepsilon_k}.$$

(iii) Если все элементы из L' четны и $L'' = \emptyset$, то выберем $l_i \in L'$ с минимальной 2-частью. В этом случае

$$T \cong \mathbb{Z}_{q^{l_i/2}-1} \times \mathbb{Z}_{q^{l_i/2}+1} \times \prod_{k \neq i} \mathbb{Z}_{q^{l_k}-1}.$$

(iv) В остальных случаях

$$T \cong \prod_k \mathbb{Z}_{q^{l_k}-\varepsilon_k}.$$

(Во всех произведениях выше $1 \leq k \leq r+s$.)

Отметим, что для группы $\text{Spin}_{2l}^+(q)$ в случае (iii), который возможен только при l четном, существует два класса σ -сопряженности группы Вейля, ассоциированных с каждым разбиением l , однако соответствующие торы будут изоморфны, как покажем ниже. Также отметим, что в теореме нет ограничений на параметры q и l , хотя для малых l строение максимальных торов групп $\text{Spin}_{2l}^\pm(q)$ и $\text{Spin}_{2l+1}(q)$ также может быть получено из известных результатов ввиду исключительных изоморфизмов

$$\text{Spin}_2^\pm(q) \cong \mathbb{Z}_{q \mp 1}, \quad \text{Spin}_3(q) \cong \text{SL}_2(q),$$

$$\text{Spin}_4^+(q) \cong \text{SL}_2(q) \times \text{SL}_2(q), \quad \text{Spin}_4^-(q) \cong \text{SL}_2(q^2), \quad \text{Spin}_5(q) \cong \text{Sp}_4(q),$$

$$\text{Spin}_6^+(q) \cong \text{SL}_4(q), \quad \text{Spin}_6^-(q) \cong \text{SU}_4(q).$$

Аналогично при q четном группы $\text{Spin}_{2l}^\pm(q)$ и $\text{Spin}_{2l+1}(q)$ изоморфны соответственно $\Omega_{2l}^\pm(q)$ и $\Omega_{2l+1}(q)$, максимальные торы которых известны [1, теоремы 3, 7]. В этом случае все торы полностью разлагаются, как в п. (iv).

Если q нечетно и в предположениях п. (i) также найдется четное l_k в L'' , то тор T допускает разложение, как в п. (ii), а именно

$$T \cong \mathbb{Z}_{(q^{l_t}-\varepsilon_t)(q^{l_k}+1)} \times \prod_{n \neq k, t} \mathbb{Z}_{q^{l_n}-\varepsilon_n},$$

где $t \in \{i, j\}$ такое, что $q \equiv \varepsilon_t \pmod{4}$. Это следует из леммы 5(vi) ниже.

Еще одно замечание состоит в том, что ввиду двойственности алгебраических групп теорему 1 можно также использовать для определения строения максимальных торов конечных присоединенных групп типа D_l , которые двойственны универсальным типа D_l и изоморфны $PCO_{2l}^{\pm}(q)^{\circ}$, а также присоединенных групп типа C_l , которые двойственны универсальным типа B_l и изоморфны $PCSp_{2l}(q)$ (подробнее см. в [3, разд. 1.19, 4.4]).

В качестве примера в табл. 1 ниже приводим явное строение представителей классов сопряженности максимальных торов групп $\text{Spin}_8^{\pm}(q)$ и $\text{Spin}_9(q)$.

2. Предварительные замечания

Напомним, что спинорные группы классически определяются через алгебры Клиффорда (см., например, [4, разд. 4.8]). Однако мы используем их отождествление с универсальными группами Шевалле, которое более подходит для наших целей (см. [3, 5, 6]).

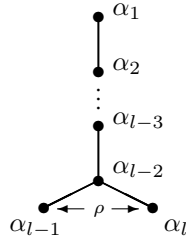


Рис. 1. D_l .

Как выше, пусть $\mathbb{G}$ — односвязная простая линейная алгебраическая группа типа D_l или B_l над алгебраически замкнутым полем F положительной характеристики p . Будем считать, что $l \geq 2$. Обозначим через Φ корневую систему группы $\mathbb{G}$ с множеством фундаментальных корней $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ и диаграммой Дынкина, как на рис. 1 или 2. Можно рассматривать $\mathbb{G}$ как группу Шевалле, порожденную символами $x_{\alpha}(t)$, $t \in F$, и $\alpha \in \Phi$, которые удовлетворяют соотношениям Шевалле. Известно, что $\mathbb{G}$ изоморфна $\text{Spin}_{2l}(F)$ или $\text{Spin}_{2l+1}(F)$ в случаях

D_l и B_l соответственно. Подробности см. в [6, теоремы 1.10.7, 1.12.1].

Для $q = p^m$ пусть φ_q — полевой автоморфизм группы $\mathbb{G}$, действующий на порождающих по правилу $\varphi_q : x_{\alpha}(t) \mapsto x_{\alpha}(t^q)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in F$, а в случае D_l пусть γ_{ρ} — графовый автоморфизм группы $\mathbb{G}$, ассоциированный с двукратной симметрией $\rho : \alpha_{l-1} \leftrightarrow \alpha_l$, $\rho : \alpha_i \mapsto \alpha_i$, $i < l-1$, диаграммы Дынкина, который действует на порождающих по правилу $\gamma_{\rho} : x_{\alpha}(t) \mapsto x_{\rho(\alpha)}(t)$, $\alpha \in \pm\Pi$, $t \in F$. В случае D_l пусть σ обозначает φ_q или $\varphi_q\gamma_{\rho}$. Тогда группа $G = C_{\mathbb{G}}(\sigma)$ будет изоморфна $\text{Spin}_{2l}^{\pm}(q)$ или $\text{Spin}_{2l}^{-}(q)$ соответственно. В случае B_l пусть σ обозначает φ_q . Тогда группа $G = C_{\mathbb{G}}(\sigma)$ будет изоморфна $\text{Spin}_{2l+1}(q)$. Существуют короткие точные последовательности

$$1 \rightarrow Z_1 \rightarrow \text{Spin}_{2l}^{\varepsilon}(q) \rightarrow \text{P}\Omega_{2l}^{\varepsilon}(q) \rightarrow 1, \quad 1 \rightarrow Z_2 \rightarrow \text{Spin}_{2l+1}(q) \rightarrow \Omega_{2l+1}(q) \rightarrow 1,$$

где $\varepsilon = \pm$, и группа $Z_1 = Z(\text{Spin}_{2l}^{\varepsilon}(q))$ изоморфна $\mathbb{Z}_{(2, q-1)}^2$ при $\varepsilon = +$ и l четном и изоморфна $\mathbb{Z}_{(4, q^l - \varepsilon)}$ в противном случае, а группа $Z_2 = Z(\text{Spin}_{2l+1}(q))$ изоморфна $\mathbb{Z}_{(2, q-1)}$.

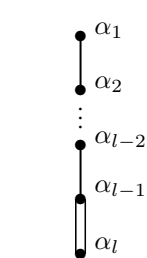


Рис. 2. B_l .

Пусть $\mathbb{T}$ — σ -инвариантный максимальный тор группы $\mathbb{G}$. Явно тор $\mathbb{T}$ можно выбрать как группу, порожденную элементами $h_{\alpha}(t) = n_{\alpha}(t)n_{\alpha}(-1)$, где $n_{\alpha}(t) = x_{\alpha}(t)x_{-\alpha}(t^{-1})x_{\alpha}(t)$ для $\alpha \in \Phi$, $t \in F^{\times}$. Для каждого $\alpha \in \Phi$ корневая подгруппа $\langle x_{\alpha}(t) \mid t \in F \rangle$ будет $\mathbb{T}$ -инвариантной. В частности, $x_{\alpha}(t)^{\tau} = x_{\alpha}(r_{\alpha}(\tau)t)$ для всех $\tau \in \mathbb{T}$, $t \in F$ и подходящего элемента r_{α} группы характеров $X = \text{Hom}(\mathbb{T}, F^{\times})$, который можно отождествить с α . Фундаментальные корни $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ образуют $\mathbb{R}$ -базис пространства $X \otimes \mathbb{R}$. Аналогично отображение h_{α} лежит в группе кохарактеров $Y = \text{Hom}(F^{\times}, \mathbb{T})$ и может

быть отождествлено с корнем $\alpha^\vee$, соответствующим корню α . Существует естественное билинейное спаривание $X \times Y \rightarrow \mathbb{Z}$, $(\chi, \theta) \mapsto \langle \chi, \theta \rangle$, такое, что $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ для всех $\alpha \in \Phi$. Поскольку $\mathbb{G}$ односвязна, корни $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_l^\vee$ образуют $\mathbb{Z}$ -базис решетки Y . Двойственный $\mathbb{Z}$ -базис $\omega_1, \dots, \omega_l$ решетки X , т. е. такой, что $\langle \omega_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, l$, называется *множеством фундаментальных весов*.

Группа Вейля $W = N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ естественно действует на торе $\mathbb{T}$. Поскольку $\mathbb{T}$ выбран σ -инвариантным, возникает индуцированное действие σ на W и (левое) действие σ и W на X по правилу: ${}^u\chi(\tau) = \chi(\tau^u)$ для всех $\chi \in X$, $\tau \in \mathbb{T}$, $u \in W \ltimes \langle \sigma \rangle$. В базисе $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ матрица преобразования σ будет либо $\text{diag}(q, \dots, q)$ при $\sigma = \varphi_q$ либо матрицей M , определенной в (8), при $\sigma = \varphi_q \gamma_\rho$ в случае D_l .

Два элемента $w, w' \in W$ называются σ -сопряженными, если найдется $x \in W$ такой, что $w' = x^{-1}wx^\sigma$. Так возникает отношение эквивалентности на W , классы которого называются *классами σ -сопряженности*. Отображение $w \mapsto w\sigma^{-1}$ индуцирует поэлементную биекцию между классами σ -сопряженности группы W и обычными классами W -сопряженности в смежном классе $W\sigma^{-1}$.

Пусть $\pi : N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T}) \rightarrow W$ — естественный эпиморфизм. Если элемент $g \in G$ выбран так, что тор ${}^g\mathbb{T} = g\mathbb{T}g^{-1}$ будет σ -инвариантным, то $g^{-1}g^\sigma \in N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$.

Лемма 2 [5, предложения 3.2.3, 3.3.3, 3.3.4].

(i) Отображение ${}^g\mathbb{T} \rightarrow \pi(g^{-1}g^\sigma)$ определяет биекцию между классами G -сопряженности σ -инвариантных максимальных торов группы $\mathbb{G}$ и классами σ -сопряженности группы W .

(ii) Если ${}^g\mathbb{T}$ — σ -инвариантный тор, то максимальный тор $C_{{}^g\mathbb{T}}(\sigma)$ изоморфен $X/X^{\sigma w^{-1}-1}$, где $w = \pi(g^{-1}g^\sigma)$.

Евклидово пространство $X \otimes \mathbb{R}$ обладает ортонормированным базисом $\nu_1, \dots, \nu_l$, для которого

$$\alpha_i = \nu_i - \nu_{i+1}, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad \alpha_l = \nu_{l-1} + \nu_l, \quad (1)$$

$$\alpha_i = \nu_i - \nu_{i+1}, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad \alpha_l = \nu_l \quad (2)$$

в случаях D_l и B_l соответственно, что позволяет естественно вложить корневую систему $\Phi(D_l)$ как подсистему в $\Phi(B_l)$.

Группа Вейля W обычно отождествляется с группой, порожденной отражениями w_{α_i} пространства $X \otimes \mathbb{R}$ в фундаментальных корнях. Будучи записанной в базисе $\nu_1, \dots, \nu_l$, группа W точно представляется мономиальными матрицами размера $l \times l$ с ненулевыми элементами ± 1 . Существует взаимно однозначное соответствие между такими матрицами и *подстановками со знаком*, т. е. элементами θ группы $\text{Sym}(\{\pm 1, \dots, \pm l\})$, удовлетворяющими $\theta(-i) = -\theta(i)$, $i = 1, \dots, l$, которая изоморфна группе Вейля $W(B_l)$. Любая подстановка со знаком θ однозначно представляется в виде произведения положительных и отрицательных циклов вида $(i_1, \dots, i_k)$ и $(\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_k)$, которые представляют подстановки

$$i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1, \quad \bar{i}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{i}_k \rightarrow -\bar{i}_1 \quad (3)$$

соответственно. Разбиение со знаком $l = l' + l''$, положительной частью $l' = l_1 + \dots + l_r$ и отрицательной частью $l'' = l_{r+1} + \dots + l_{r+s}$ определяет *циклический тип* $[l_1, \dots, l_r, \bar{l}_{r+1}, \dots, \bar{l}_{r+s}]$ подстановки θ , если разложение θ в произведение циклов со знаком содержит положительные циклы длин l_i , $1 \leq i \leq s$, и отрицательные циклы длин l_i , $r+1 \leq i \leq r+s$.

Группа $W(D_l)$ содержится в $W(B_l)$ в качестве подгруппы индекса 2, состоящей из элементов с четным числом отрицательных циклов.

Лемма 3 [7, предложения 24, 25]. Два элемента $W(B_l)$ сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый циклический тип. Класс сопряженности группы $W(B_l)$, содержащийся в $W(D_l)$, остается полным классом $W(D_l)$ -сопряженности, за исключением случая, когда он состоит из элементов, все циклы которых положительны и имеют четную длину, и тогда он разбивается на два $W(D_l)$ -класса.

В качестве стандартного представителя $W(B_l)$ -класса циклического типа $[l_1, \dots, \bar{l}_{r+s}]$ выберем подстановку

$$(1, \dots, l_1)(l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2) \dots (\overline{l - l_{r+s} + 1}, \dots, \bar{l}).$$

Если все l_i четны и $l'' = 0$, то $W(B_l)$ -класс типа $[l_1, \dots, l_r]$ со стандартным представителем $\theta = (1, \dots, l_1) \dots (\dots, l)$ разбивается на два $W(D_l)$ -класса типов $[l_1, \dots, l_r]^\pm$ со стандартными представителями $\theta^+ = \theta$ и $\theta^- = (1, \dots, l_1) \dots (\dots, l - 1, -l)$. Это так, поскольку θ^+ и θ^- сопряжены инволюцией $(\bar{l}) \in W(B_l) \setminus W(D_l)$.

Из вышеизложенного вытекает естественный способ отождествить матрицы преобразований σw^{-1} в $\mathbb{Z}$ -базисе $\omega_1, \dots, \omega_l$ решетки X , где w пробегает представителей классов σ -сопряженности W , с матрицами стандартных представителей подстановок со знаком. (В самом деле, по (1), (2) и (8) σ -сопряженность в W является обычной сопряженностью при $\sigma = \varphi_q$ и $(\bar{l})$ -сопряженностью при $\sigma = \varphi_q \gamma_\rho$ в случае D_l , а по [7, с. 45] каждый элемент группы Вейля сопряжен со своим обратным.)

Нам потребуется ряд теоретико-числовых результатов. Для натурального числа n пусть n_2 обозначает 2-часть n , т. е. наибольшую степень числа 2, делящую n . НОД чисел a и b обозначается через (a, b) .

Лемма 4. Для натуральных a, b если $a_2 \geq b_2$, то $(2a, b) = (a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $(a, b)_2 = \min\{a_2, b_2\} = b_2 = \min\{2a_2, b_2\} = (2a, b)_2$, поскольку $a_2 \geq b_2$. Отсюда вытекает требуемое. $\square$

Лемма 5. Пусть a — нечетное натуральное число.

(i) Для любого натурального n

$$(a^n - 1)_2 = \begin{cases} n_2(a + 1)_2, & \text{если } n \text{ четно и } a \equiv -1 \pmod{4}, \\ n_2(a - 1)_2 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$(a^n + 1)_2 = \begin{cases} (a + 1)_2, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 2, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

(ii) Если n_1, n_2 нечетны и $\varepsilon = \pm 1$, то $(a^{n_1} - \varepsilon, a^{n_2} + \varepsilon) = 2$.

(iii) Если n_1 четно и n_2 нечетно, то $(a^{n_1} + 1, a^{n_2} \pm 1) = 2$.

(iv) Если n_1, n_2 нечетны и $\varepsilon = \pm 1$, то $(a^{n_1} + \varepsilon, a^{n_2} + \varepsilon) = a^{(n_1, n_2)} + \varepsilon$.

(v) Если n_1 четно, n_2 нечетно и $\varepsilon = \pm 1$, то $(a^{n_1} - 1, a^{n_2} + \varepsilon) = a^{(n_1, n_2)} + \varepsilon$.

(vi) Если n_1, n_2 нечетны, n_3 четно и $a \equiv \varepsilon \pmod{4}$, где $\varepsilon = \pm 1$, то

$$\mathbb{Z}_{(a^{n_1} + \varepsilon)(a^{n_2} - \varepsilon)} \times \mathbb{Z}_{a^{n_3} + 1} \cong \mathbb{Z}_{a^{n_1} + \varepsilon} \times \mathbb{Z}_{(a^{n_2} - \varepsilon)(a^{n_3} + 1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) См. [8, лемма 8]. (ii)–(v) См. [9, лемма 6].

(vi) Из (ii), (iii) следует, что 2'-части чисел $a^{n_1} + \varepsilon$, $a^{n_2} - \varepsilon$, $a^{n_3} + 1$ попарно взаимно просты. Поскольку по предположению $(a^{n_1} + \varepsilon)_2 = (a^{n_3} + 1)_2 = 2$, получаем требуемое. $\square$

Во всех матрицах ниже точки вместо элементов обозначают нули.

Лемма 6. Пусть a, b, c — целые числа.

(i) Если $(a, b) = 1$ и

$$A = \begin{pmatrix} a & \cdot \\ \cdot & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & ab \end{pmatrix},$$

то положим

$$P = \begin{pmatrix} 1 & n \\ -b & am \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} m & -bn \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где m, n такие, что $am + bn = 1$.

(ii) Если

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ \cdot & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & ab \end{pmatrix},$$

то положим

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ -b & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}. \quad (5)$$

(iii) Если (a, b) делит c и

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ \cdot & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & \cdot \\ \cdot & b \end{pmatrix},$$

то положим

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -nz \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -mz \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $x = a/(a, b)$, $y = b/(a, b)$, $z = c/(a, b)$ и m, n такие, что $xm + yn = 1$.

(iv) Если $(a, b) = 1$, c нечетно и

$$A = \begin{pmatrix} 2a & c \\ \cdot & 2b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 4ab \end{pmatrix},$$

то положим

$$P = \begin{pmatrix} -1 & n(c-1)/2 \\ -2b & 1 + nb(c-1) \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} m(c-1)/2 & -1 - ma(c-1) \\ -1 & 2a \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где m, n такие, что $am + bn = 1$.

Тогда во всех четырех случаях $P, Q \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ и $PAQ = B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится непосредственной проверкой. $\square$

Для матрицы A обозначим через $A^\top$ матрицу, транспонированную к A .
Следующие матрицы упомянуты в других частях статьи:

$$M = \begin{pmatrix} q & & & \\ & \ddots & & \\ & & q & \\ & & \cdot & q \\ & & q & \cdot \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdot & & \\ \cdot & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}_{l \times l}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdot & & \\ \cdot & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & \cdot & 2 \end{pmatrix}_{l \times l}, \quad (9)$$

$$R_{\varepsilon k} = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 1 \\ \varepsilon & \cdot & \cdot & & \cdot \end{pmatrix}_{k \times k}, \quad B_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_{-1} & \cdot & \cdot & -(1 + \varepsilon_{-1})/2 \\ \varepsilon_{-1} & \cdot & \cdot & -(1 + \varepsilon_{-1})/2 \\ & & \dots & \\ \varepsilon_{-1} & \cdot & \cdot & -(1 + \varepsilon_{-1})/2 \\ \varepsilon_{-1} & \cdot & \cdot & -(\varepsilon_i + \varepsilon_{-1})/2 \end{pmatrix}_{l_i \times l_{-1}}, \quad (10)$$

$$J = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ & & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}_{l \times l}, \quad P_{\varepsilon k} = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 & q^{k-2} & \cdot \\ \cdot & 1 & q & q^{k-3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & q^{k-4} & \cdot \\ & & & \ddots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ q & q^2 & q^3 & q^{k-1} & \varepsilon \end{pmatrix}_{k \times k}. \quad (11)$$

Отметим, что возможны следующие вырожденные случаи:

$$R_{\varepsilon 1} = P_{\varepsilon 1} = (\varepsilon),$$

$$B_i = (-(1 - \varepsilon_{-1})/2, \dots, -(1 - \varepsilon_{-1})/2, -(\varepsilon_i - \varepsilon_{-1})/2)^\top, \quad \text{если } l_{-1} = 1,$$

$$B_i = (\varepsilon_{-1}, 0, \dots, 0, -(\varepsilon_i + \varepsilon_{-1})/2), \quad \text{если } l_i = 1,$$

$$B_i = (-(\varepsilon_i - \varepsilon_{-1})/2), \quad \text{если } l_{-1} = l_i = 1.$$

3. Доказательство основной теоремы

Фиксируем циклический тип $[l_1, \dots, \bar{l}_{r+s}]$ и положим $\varepsilon_i = 1$ при $1 \leq i \leq r$ и $\varepsilon_i = -1$ при $r+1 \leq i \leq r+s$. В базисе $\nu_1, \dots, \nu_l$ матрица соответствующего стандартного представителя θ равна $R = \bigoplus R_{\varepsilon_i l_i}$, где $R_{\varepsilon k}$ — матрица (10) циклов со знаком (3) при $\varepsilon = \pm 1$ соответственно. (В исключительном случае $\theta = \theta^-$ эта матрица указана в лемме 7.) Наша цель — диагонализировать целочисленную матрицу

$$qSR S^{-1} - E, \quad (12)$$

соответствующую преобразованию $\sigma w^{-1} - 1$, где E — единичная матрица и S^{-1} — матрица перехода к базису $\omega_1, \dots, \omega_l$. По лемме 2 это дает циклическое строение максимального тора группы $\text{Spin}_{2l}^\pm(q)$ или $\text{Spin}_{2l+1}(q)$, соответствующего выбранному циклическому типу.

Сначала рассмотрим тип D_l . В этом случае матрица S совпадает с S_1 , указанной в (9) (см. [10, табл. IV(VI)]). В исключительном случае имеет место

Лемма 7. Если $s = 0$ и все l_i четны, то максимальные торы группы $\text{Spin}_{2l}^+(q)$, соответствующие двум циклическим типам $[l_1, \dots, l_r]^\pm$, изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку θ^+ и θ^- сопряжены с помощью $(\bar{l})$, соответствующими матрицами будут $qSR S^{-1} - E$ и $qSR_0 R R_0^{-1} S^{-1} - E$, где $R_0 = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$ — матрица подстановки $(\bar{l})$. Так как эти матрицы сопряжены матрицей $SR_0 S^{-1}$, которая целочисленная и унимодулярная, получаем требуемое. $\square$

Две целочисленные матрицы M_1 и M_2 размера $l \times l$ назовем *эквивалентными*, если существуют $P, Q \in \text{GL}_l(\mathbb{Z})$ такие, что $PM_1Q = M_2$. Поскольку умножение на P (соответственно Q) равнозначно применению к M_1 элементарных преобразований строк (столбцов), в случае $Q = E$ (соответственно $P = E$) будем говорить, что M_1 и M_2 *строчно- (столбцово-)эквивалентны*.

Так как S строчно-эквивалентна матрице $E + J$, где J указана в (11), получаем, что (12) эквивалентна матрице

$$q(E + J)R \left(E - \frac{1}{2}J \right) - E = qR - E + qB, \quad (13)$$

где $qR - E$ блочно-диагональна, а B нулевая, за исключением последнего блочного столбца с элементами $B_1, \dots, B_{r+s}$. (B_i определяется в (10), где использованы сокращенные обозначения $\varepsilon_{-i} = \varepsilon_{r+s+1-i}$ и $l_{-i} = l_{r+s+1-i}$ для $i = 1, 2, \dots$) Умножая (13) слева на блочно-диагональную матрицу $\text{diag}(P_{\varepsilon_1 l_1}, \dots, P_{\varepsilon_{-2} l_{-2}}, P'_{\varepsilon_{-1} l_{-1}})$, где $P_{\varepsilon k}$ определена в (11) и $P'_{\varepsilon_{-1} l_{-1}}$ получена из $P_{\varepsilon_{-1} l_{-1}}$ заменой последней строки на $(0, \dots, 0, \varepsilon_{-1})$, приходим к матрице, у которой какие-то столбцы содержат -1 на диагонали и остальные нули. Используя их для обращения в нуль ненулевых элементов в строках с помощью преобразований столбцов, получим (после удаления единичных строк и столбцов) матрицы

$$\left(\begin{array}{c|cc} D & a_1 & b_1 \\ & \vdots & \vdots \\ & a_{-2} & b_{-2} \\ \hline \cdot & \cdots & \cdot \\ & a & b \\ \cdot & \cdots & \cdot & 2q & -q - \varepsilon_{-1} \end{array} \right) \quad \text{или} \quad \left(\begin{array}{c|cc} D & a_1 + b_1 & \\ & \vdots & \\ & a_{-2} + b_{-2} & \\ \hline \cdot & \cdots & \cdot \\ & q - \varepsilon_{-1} & \end{array} \right) \quad (14)$$

в случаях $l_{-1} > 1$ и $l_{-1} = 1$ соответственно, где

$$\begin{aligned} D &= \text{diag}(q^{l_1} - \varepsilon_1, \dots, q^{l_{-2}} - \varepsilon_{-2}), \\ a_i &= \varepsilon_{-1}(\varepsilon_i q + q^2 + \dots + q^{l_i}), \quad i = 1, 2, \dots, \\ b_i &= -((1 + \varepsilon_{-1} \varepsilon_i)q + (1 + \varepsilon_{-1})(q^2 + \dots + q^{l_i}))/2, \quad i = 1, 2, \dots, \\ a &= -1 + \varepsilon_{-1}(q + q^2 + \dots + q^{l_{-1}-1}), \\ b &= -(1 + \varepsilon_{-1})(q + \dots + q^{l_{-1}-1})/2 + q^{l_{-1}-1}. \end{aligned}$$

Как отмечено во введении, теорема справедлива для четного q . Следовательно, будем далее предполагать, что q нечетно.

Если $l_{-1} = 1$, то во второй матрице в (14), прибавив последнюю строку, умноженную на

$$\begin{cases} ((1 - \varepsilon_{-1})(q + q^3 + \dots + q^{l_i-1}) + \varepsilon_{-1}(1 - \varepsilon_i))/2, & \text{если } l_i \text{ четно,} \\ ((1 - \varepsilon_{-1})(q^2 + q^4 + \dots + q^{l_i-1}) + 1 - \varepsilon_{-1} \varepsilon_i)/2, & \text{если } l_i \text{ нечетно,} \end{cases}$$

к i -й строке, $i = 1, 2, \dots$, получим

$$\left(\begin{array}{c|cc} D & c_1 & \\ & \vdots & \\ & c_{-2} & \\ \hline \cdot & \cdots & \cdot \\ & q - \varepsilon_{-1} & \end{array} \right), \quad (15)$$

где $c_i = (\varepsilon_i - 1)/2$ при l_i четном и $(\varepsilon_i - \varepsilon_{-1})/2$ при l_i нечетном. Покажем ниже, что один подслучай общего случая $l_{-1} > 1$ сводится к такой же матрице и, значит, может быть рассмотрен одновременно с этим случаем.

Предположим, что $l_{-1} > 1$. Первая матрица в (14) после умножения справа на

$$\left(\begin{array}{c|cc} E & (q-1)/2 & \cdot \\ & \vdots & \vdots \\ & (q-1)/2 & \cdot \\ \hline \cdot & \cdots & \cdot \\ & (q + \varepsilon_{-1})/2 & -1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & q & -2 \end{array} \right)$$

становится матрицей, последнюю строку которой $(0, \dots, 0, 2\varepsilon_{-1})$ можно использовать для приведения ее преобразованиями строк и столбцов к верхне-треугольному виду

$$\left(\begin{array}{c|cc} D & (q^{l_1} - \varepsilon_1)/2 & d_1 \\ \hline \cdot & \dots & \vdots \\ \cdot & (q^{l_{-1}} - \varepsilon_{-1})/2 & d_{-1} \\ \cdot & \cdot & 2 \end{array} \right), \quad (16)$$

где $d_i = 0$ при l_i четном и 1 при l_i нечетном.

Сначала предположим, что все l_i четны и все ε_i равны 1. Не ограничивая общности, можно считать, что l_{-1} имеет наименьшую 2-часть. Если $r + s > 1$, то умножим (16) слева и справа на $\text{diag}(1, \dots, 1, P, 1)$ и $\text{diag}(1, \dots, 1, Q, 1)$ соответственно, где P, Q указаны в (6) для $a = q^{l-2} - 1$, $b = (q^{l-1} - 1)/2$ и $c = a/2$. Заметим, что $(a/2)_2 \geq b_2$ по предположению и лемме 5(i). Значит, из леммы 4 следует $(a, b) = (a/2, b)$, а это число делит c . По лемме 6(iii) в нижнем правом углу полученной матрицы будет стоять $\text{diag}(a, b, 2)$, а все остальные элементы останутся неизменными, что вытекает из явного вида Q . Повторив, если необходимо, эту процедуру, можно аналогично обратить в нуль все ненулевые внедиагональные элементы матрицы (16), приведя ее таким образом к эквивалентной диагональной форме $\text{diag}(q^{l_1} - 1, \dots, q^{l-2} - 1, (q^{l-1} - 1)/2, 2)$. Остается заметить, что

$$\mathbb{Z}_{(q^{l-1}-1)/2} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_{q^{l-1}/2-1} \times \mathbb{Z}_{q^{l-1}/2+1},$$

откуда вытекает п. (iii) теоремы.

Следовательно, можем предполагать, что либо найдется нечетное l_i (и тогда без ограничения общности можно считать, что l_{-1} нечетно), либо все l_i четны и для некоторого i справедливо $\varepsilon_i = -1$ (и тогда можно считать, что $i = -1$). Эти допущения действительно не ограничивают общности, поскольку можно, если необходимо, изменить порядок компонент исходного разбиения l со знаком, при этом сохранив соответствующий циклический тип, а значит, и класс изоморфизма рассматриваемого тора. В обоих случаях умножим (16) слева и справа на $\text{diag}(1, \dots, 1, P)$ и $\text{diag}(1, \dots, 1, Q)$, где P и Q указаны в (5) и (4) в первом и втором случаях соответственно, где $a = (q^{l-1} - \varepsilon_{-1})/2$ и $b = 2$. По лемме 6, которая применима во втором случае, поскольку $((q^{l-1} + 1)/2, 2) = 1$, получаем следующую матрицу (после удаления строки и столбца с ведущим элементом 1 на диагонали):

$$\left(\begin{array}{c|c} D & \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{-2} \end{matrix} \\ \hline \cdot & q^{l-1} - \varepsilon_{-1} \end{array} \right), \quad (17)$$

где $f_i = d_i(q^{l-1} - \varepsilon_{-1})/2 - d(q^{l_i} - \varepsilon_i)/2$ и $d = 1$ или $2n$ в первом и втором случаях соответственно. Рассмотрим эти случаи отдельно.

СЛУЧАЙ I. Предположим, что l_{-1} нечетно. Тогда $d = 1$. Заметим, что если положим $l_{-1} = 1$, то матрица (17) будет строчно-эквивалентна матрице (15), что можно проверить, прибавив к i -й строке последнюю строку, умноженную на $(q + \varepsilon_{-1})(q^{l_i-2} + q^{l_i-4} + \dots + q^{d_i})/2$. Таким образом мы включим отложенный выше случай $l_{-1} = 1$ в дальнейшее рассмотрение.

СЛУЧАЙ Ia. Предположим, что найдется нечетное l_j такое, что $\varepsilon_j = -\varepsilon_{-1}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $j = -2$. В этом случае $f_{-2} = -a + b$ нечетно, где $a = (q^{l-2} + \varepsilon_{-1})/2$ и $b = (q^{l-1} - \varepsilon_{-1})/2$. Заметим также, что $(a, b) = 1$ по лемме 5(ii). Значит, можно применить лемму 6(iv), где $c = -a + b$. Умножив (17) на $\text{diag}(1, \dots, 1, P)$ и $\text{diag}(1, \dots, 1, Q)$, где P и Q указаны в (7), и удалив после этого строку и столбец с диагональным ведущим элементом 1, получаем матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} q^{l_1} - \varepsilon_1 & & & g_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & q^{l_{-3}} - \varepsilon_{-3} & g_{-3} \\ \hline & \dots & & (q^{l-2} - \varepsilon_{-2})(q^{l-1} - \varepsilon_{-1}) \end{array} \right), \quad (18)$$

где $g_i = 2af_i = d_i \cdot 2ab - a(q^{l_i} - \varepsilon_i)$. Очевидным преобразованием столбцов обратим в нуль слагаемое $a(q^{l_i} - \varepsilon_i)$, а значит, и g_i при l_i четном. Если l_i нечетно, то $d_i = 1$ и подматрицу $\begin{pmatrix} q^{l_i} - \varepsilon_i & 2ab \\ & 4ab \end{pmatrix}$ можно диагонализировать по лемме 6(iii), используя матрицы P и Q , указанные в (6). Заметим, что лемма 6(iii) может быть применима, поскольку

$$(2ab)_2 = \frac{1}{2}(q^{l-2} + \varepsilon_{-1})_2(q^{l-1} - \varepsilon_{-1})_2 = \frac{1}{2}(q^2 - 1)_2 \geq (q - \varepsilon_i)_2 = (q^{l_i} - \varepsilon_i)_2$$

и l_i нечетно, что по лемме 4 влечет равенство $(4ab, q^{l_i} - \varepsilon_i) = (2ab, q^{l_i} - \varepsilon_i)$, а его правая часть делит $2ab$. Отметим, что такая диагонализация не изменит остальные элементы матрицы (18) и, значит, может быть произведена независимо для всех ненулевых g_i , что приведет матрицу к диагональному виду. Тем самым доказан п. (i) теоремы.

СЛУЧАЙ Ib. Предположим, что для всех нечетных l_j справедливо $\varepsilon_j = \varepsilon_{-1}$ и найдется четное l_j такое, что $\varepsilon_j = -1$. Опять можно считать, что $j = -2$. В этом случае $f_{-2} = -a$ нечетно, где $a = (q^{l-2} + 1)/2$. Положим $b = (q^{l-1} - \varepsilon_{-1})/2$. Заметим, что $(a, b) = 1$ по лемме 5(iii). Следовательно, снова применив лемму 6(iv), где $c = -a$, приведем матрицу (17) к виду (18), где $g_i = 2af_i$. Остальное рассуждение такое же, как выше, кроме того факта, что применимость леммы 6(iii) в конце обеспечивается цепочкой

$$(2ab)_2 = \frac{1}{2}(q^{l-2} + 1)_2(q^{l-1} - \varepsilon_{-1})_2 = (q - \varepsilon_{-1})_2 = (q - \varepsilon_i)_2 = (q^{l_i} - \varepsilon_i)_2,$$

поскольку l_{-1} и l_i нечетны и $\varepsilon_{-1} = \varepsilon_i$ по предположению. Этим доказан п. (ii) теоремы.

СЛУЧАЙ Ic. Предположим, что для каждого нечетного l_j справедливо $\varepsilon_j = \varepsilon_{-1}$, а для каждого четного l_j справедливо $\varepsilon_j = 1$.

Если l_j нечетно, то $f_j = -a + b$, где $a = (q^{l_j} - \varepsilon_{-1})/2$ и $b = (q^{l-1} - \varepsilon_{-1})/2$. По лемме 5(iv) видим, что $a/(a, b)$ и $b/(a, b)$ нечетны. Значит, $2(a, b)$ делит $-a + b$, и подматрицу

$$\begin{pmatrix} 2a & f_j \\ & 2b \end{pmatrix} \quad (19)$$

матрицы (17) можно диагонализировать по лемме 6(iii), используя P и Q , указанные в (6). Заметим, что в силу вида матрицы Q эта диагонализация не влияет на остальные элементы матрицы (17) и, значит, может быть повторена независимо для всех нечетных l_j .

Аналогично если l_j четно, то имеем $f_j = -a$, где $a = (q^{l_j} - 1)/2$. Положим $b = (q^{l_{-1}} - \varepsilon_{-1})/2$. По лемме 5(v) получаем $2(a, b) = q^{(l_j, l_{-1})} - \varepsilon_{-1}$, где правая часть делит $-a$, поскольку $l_j/(l_j, l_{-1})$ четно. Вновь применив лемму 6(iii) к подматрице (19) независимо для всех четных l_j , завершим диагонализацию матрицы (17). Этим доказан п. (iv) теоремы для данного случая.

СЛУЧАЙ II. Предположим, что все l_i четны и $\varepsilon_{-1} = -1$. Тогда $d = 2n$ и $f_i = -n(q^{l_i} - \varepsilon_i)$ — число, кратное ведущему диагональному элементу i -й строки. Очевидным преобразованием столбцов можно занулить все f_i и привести (17) к диагональной форме. Этим завершается доказательство п. (iv) теоремы.

Теперь рассмотрим тип B_l . Покажем, что в этом случае тор выбранного циклического типа изоморфен тору такого же типа в случае D_l . В самом деле, матрица S из (12) в случае B_l совпадает с S_2 , указанной в (9) (см. [10, табл. II(VI)]). Однако очевидно, что S_2 строчно-эквивалентна S_1 , что влечет эквивалентность матрицы (12) такой же матрице в случае D_l . Значит, имеет место изоморфизм соответствующих торов. Теорема доказана.

Таблица 1. Классы[†] максимальных торов групп $\text{Spin}_8^\pm(q)$, $\text{Spin}_9(q)$

$\text{Spin}_9(q)$			
$\text{Spin}_8^+(q)$		$\text{Spin}_8^-(q)$	
$[1, 1, 1, 1]$	$\mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$	$[1, 1, 1, \bar{1}]$	$\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$
$[1, 1, \bar{1}, \bar{1}]$	$\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$	$[1, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}]$	$\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$
$[\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}]$	$\mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$	$[2, 1, \bar{1}]$	$\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q^2-1}$
$[2, 1, 1]$	$\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$	$[1, 1, \bar{2}]$	$\mathbb{Z}_{(q^2+1)(q-1)} \times \mathbb{Z}_{q-1}$
$[2, \bar{1}, \bar{1}]$	$\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$	$[\bar{2}, \bar{1}, \bar{1}]$	$\mathbb{Z}_{(q^2+1)(q+1)} \times \mathbb{Z}_{q+1}$
$[1, \bar{2}, \bar{1}]$	$\mathbb{Z}_{q^2+1} \times \mathbb{Z}_{q^2-1}$	$[2, \bar{2}]$	$\mathbb{Z}_{q^2+1} \times \mathbb{Z}_{q^2-1}$
$[2, 2]^\pm$	$\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$	$[1, \bar{3}]$	$\mathbb{Z}_{(q^3+1)(q-1)}$
$[\bar{2}, \bar{2}]$	$\mathbb{Z}_{q^2+1} \times \mathbb{Z}_{q^2+1}$	$[3, \bar{1}]$	$\mathbb{Z}_{(q^3-1)(q+1)}$
$[3, 1]$	$\mathbb{Z}_{q^3-1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$	$[\bar{4}]$	$\mathbb{Z}_{(q^4+1)}$
$[\bar{3}, \bar{1}]$	$\mathbb{Z}_{q^3+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$		
$[4]^\pm$	$\mathbb{Z}_{q^2+1} \times \mathbb{Z}_{q^2-1}$		

[†] Класс $[]$ разбивается на подклассы $[]^\pm$ только в группе $\text{Spin}_8^+(q)$

БЛАГОДАРНОСТЬ. Автор признателен к.ф.-м.н. А. А. Бутурлакину за полезное обсуждение тематики данной работы, а также анонимному рецензенту за предложения по улучшению первоначального варианта статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутурлакин А. А., Гречкосеева М. А. Циклическое строение максимальных торов в конечных классических группах // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 2. С. 129–156.
2. Deriziotis D. I., Fakiolas A. P. The maximal tori in the finite Chevalley groups of type E_6 , E_7 and E_8 // Commun. Algebra. 1991. V. 19, N 3. P. 889–903.
3. Carter R. W. Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters. Chichester; New York, etc.: John Wiley & Sons, 1985.
4. Jacobson N. Basic algebra. II. 2nd ed. New York: W. H. Freeman & Co., 1989.
5. Carter R. W. Simple groups of Lie type. London: John Wiley & Sons, 1972. (Pure Appl. Math.; V. 28).

6. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups. Number 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. (Math. Surveys Monogr.; V. 40.3).
7. Carter R. W. Conjugacy classes in the Weyl group // *Comp. Math.* 1972. V. 25, N 1. P. 1–59.
8. Гречкосеева М. А. Распознавание по спектру конечных простых линейных групп над полями характеристики 2 // *Алгебра и логика*. 2008. Т. 47, № 4. С. 405–427.
9. Zavarnitsine A. V. Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders // *J. Group Theory*. 2004. V. 7, N 1. P. 81–97.
10. Бурбаки Н. Элементы математики. Группы и алгебры Ли. Гл. IV. Группы Кокстера и системы Титса. Гл. V. Группы, порожденные отражениями. Гл. VI. Системы корней. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 19 августа 2014 г., окончательный вариант — 1 декабря 2014 г.

Заварницин Андрей Витальевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
zav@math.nsc.ru