

О КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ
ГРУППАХ С АВТОМОРФИЗМАМИ
НЕКОПРОСТОГО ПОРЯДКА
ПОЧТИ БЕЗ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Е. И. Хухро

Аннотация. Доказывается, что если конечная p -разрешимая группа G допускает автоморфизм φ порядка p^n , имеющий не более m неподвижных точек на каждой φ -инвариантной элементарной абелевой p' -секции группы G , то p -длина группы G ограничена сверху в терминах p^n и m ; если вдобавок группа G разрешима, то высота Фиттинга группы G ограничена сверху в терминах p^n и m . Доказывается также, что если конечная разрешимая группа G допускает автоморфизм ψ порядка $p^a q^b$ для некоторых простых чисел p, q , то высота Фиттинга группы G ограничена сверху в терминах $|\psi|$ и $|C_G(\psi)|$.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.317

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, автоморфизм, p -длина, высота Фиттинга.

Юрию Леонидовичу Ершову по случаю его 75-летия

1. Введение

Изучение групп с автоморфизмами «почти без неподвижных точек» означает получение ограничений на строение групп в зависимости от их автоморфизмов и определенных ограничений, налагаемых на подгруппы неподвижных точек. В данной работе мы рассматриваем вопросы ограничения p -длины и высоты Фиттинга конечных p -разрешимых и разрешимых групп, допускающих автоморфизмы непростого порядка почти без неподвижных точек.

Пусть $\varphi \in \text{Aut } G$ — автоморфизм конечной группы G . Изучение строения группы G в зависимости от φ и подгруппы неподвижных точек $C_G(\varphi)$ является одним из наиболее важных и плодотворных путей в теории конечных групп. Прославленные теорема Брауэра — Фаулера [1] (ограничивающая индекс разрешимого радикала в терминах порядка $|C_G(\varphi)|$ в случае $|\varphi| = 2$) и теорема Томпсона [2] (дающая нильпотентность группы G , когда φ имеет простой порядок и действует без неподвижных точек, т. е. $C_G(\varphi) = 1$) лежат в основаниях классификации конечных простых групп. Классификация использовалась для получения дальнейших результатов о разрешимости группы G или подходящей «большой» подгруппы. Например, используя классификацию, Хартли [3] обобщил теорему Брауэра — Фаулера на любой порядок автоморфизма φ : группа

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00065).

G обладает разрешимой подгруппой индекса, ограниченного в терминах $|\varphi|$ и $|C_G(\varphi)|$.

Теперь предположим, что группа G разрешима. Дальнейшая информация о строении группы G ищется прежде всего в виде ограничений на высоту Фиттинга (нильпотентную длину). Ограничение высоты Фиттинга естественно сводит дальнейшие исследования к случаю nilпотентных групп с автоморфизмами (почти) без неподвижных точек, для которых, в свою очередь, возникают задачи ограничения ступени разрешимости или nilпотентности группы, или подходящей «большой» подгруппы. Такие ограничения для nilпотентных групп пока получены в случаях, когда φ простого порядка или порядка 4, в [4–9]. Кроме того, общие результаты решающего значения получены в изучении p -автоморфизмов, действующих почти без неподвижных точек на конечных p -группах [10–15].

Особенно сильные результаты по ограничению высоты Фиттинга получены в случае разрешимых групп автоморфизмов $A \leq \text{Aut } G$ копростого порядка. Томпсон [16] доказал, что если обе группы G и A разрешимы и имеют копростые порядки, то высота Фиттинга группы G ограничена в терминах высоты Фиттинга подгруппы $C_G(A)$ и числа $\alpha(A)$ простых сомножителей в $|A|$ с учетом кратностей. Позднее оценки в теореме Томпсона улучшались в многочисленных работах и окончательные результаты были получены Туруллом [17] и Хартли и Айзексом [18].

Случай некопростых порядков групп G и $A \leq \text{Aut } G$ более трудный. Белл и Хартли [19] построили примеры, показывающие, что для любой ненильпотентной конечной группы A имеются разрешимые группы G произвольной высоты Фиттинга, допускающие A в качестве группы автоморфизмов без неподвижных точек. Но если A nilпотентна и $C_G(A) = 1$, то высота Фиттинга группы G ограничена в терминах $\alpha(A)$ в силу частного случая теоремы Дэйда [20]. В ситуации почти без неподвижных точек даже для циклической группы автоморфизмов $\langle \varphi \rangle \leq \text{Aut } G$ все еще открыта задача: получить ограничение для высоты Фиттинга конечной разрешимой группы G в терминах $|\varphi|$ и $|C_G(\varphi)|$ (этот вопрос эквивалентен записанному Беляевым в «Коуровской тетради» [21] как задача Хартли 13.8(a)). Кроме случая без неподвижных точек теоремы Дэйда пока единственные случаи, где известно положительное решение, — это случай автоморфизмов примарного порядка p^n (Хартли и Турау [22]) и случай бипримарного порядка $p^a q^b$ (обсуждаемый в настоящей работе).

Другим обобщением автоморфизмов без неподвижных точек в некопростом случае является задача Томпсона об ограничении p -длины конечной p -разрешимой группы G , допускающей p -группу автоморфизмов P , действующую без неподвижных точек на каждой P -инвариантной p' -секции группы G . Раэ [23] и Хартли и Раэ [24] положительно решили эту задачу для $p \neq 2$, а также для циклической группы P при любом p . Частным случаем этой задачи является случай, когда p -разрешимая группа G допускает так называемый p^n -расщепляющий автоморфизм φ , что означает, что $xx^\varphi x^{\varphi^2} \dots x^{\varphi^{p^n-1}} = 1$ для всех $x \in G$ (отсюда также следует $\varphi^{p^n} = 1$); тогда, конечно, φ автоматически действует без неподвижных точек на φ -инвариантных p' -секциях. Этот случай рассматривался на самом деле ранее Курцвайлем [25], который получил оценки высоты Фиттинга разрешимой группы G , и эти оценки были улучшены до линейных Майкснером [26]. Если известно только, что φ индуцирует p^n -расщепляющий автоморфизм на φ -инвариантной силовой p -подгруппе груп-

пы G , то уже получается ограничение в терминах n на p -длину группы G : при $p \neq 2$ такое ограничение было получено Уилсоном [27], а для всех простых чисел p в работе [28] — даже при более слабом условии.

В данной работе рассматриваем естественное обобщение задачи Томпсона для p -разрешимой группы G , допускающей автоморфизм φ порядка p^n , в котором условие, что φ действует без неподвижных точек на φ -инвариантных p' -секциях, заменяется тем, что φ действует почти без неподвижных точек на этих секциях. На самом деле достаточно налагать ограничение на число неподвижных точек автоморфизма φ только на элементарные абелевы φ -инвариантные p' -секции.

Теорема 1.1. *Если конечная p -разрешимая группа G допускает автоморфизм φ порядка p^n , имеющий не более t неподвижных точек на каждой φ -инвариантной элементарной абелевой p' -секции группы G , то p -длина группы G ограничена сверху в терминах p^n и t .*

Было бы интересно получить оценку p -длины в терминах n (или хотя бы в терминах p^n) для некоторой подгруппы индекса, ограниченного в терминах p^n и t .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Имеется определенная аналогия с описанной выше ситуацией для p^n -расщепляющего автоморфизма. А именно, если для p -разрешимой группы G с автоморфизмом φ порядка p^n вместо ограничения на число неподвижных точек на p' -секциях имеется ограничение $|C_P(\varphi)| = p^m$ на число неподвижных точек автоморфизма φ в φ -инвариантной силовской p -подгруппе P , то также получаем оценку p -длины группы G . В самом деле, тогда степень разрешимости группы P ограничена в терминах p , n и m по теореме Шалева [12], так что оценка на p -длину немедленно вытекает из теорем Холла — Хигмэна [29] при $p \neq 2$ и теорем Хоаре [30], Бергера и Гросса [31] и Е. Г. Брюхановой [32]. Более того, в силу [13] группа P даже обладает (нормальной) подгруппой индекса, ограниченного в терминах p , n и m , которая разрешима p^n -ограниченной степени. Поэтому по теореме Холла — Хигмэна — Хартли 2.3 (см. ниже) имеется характеристическая подгруппа H группы G такая, что p -длина H p^n -ограничена, а силовская p -подгруппа фактор-группы G/H имеет порядок, ограниченный в терминах p , n и m .

Для разрешимых групп теорема 1.1 в сочетании с известными результатами дает оценку высоты Фиттинга.

Следствие 1.3. *Если конечная разрешимая группа G допускает автоморфизм φ порядка p^n , имеющий не более t неподвижных точек на каждой φ -инвариантной p' -секции группы G , то высота Фиттинга группы G ограничена сверху в терминах p^n и t .*

Техника, используемая в доказательстве теоремы 1.1, применяется также в доказательстве разрешимого случая следующей теоремы об автоморфизме бипримарного порядка почти без неподвижных точек; сведение же к разрешимому случаю дает теорема Хартли [3] (основанная на классификации конечных простых групп).

Теорема 1.4. *Если конечная группа G допускает автоморфизм φ порядка $p^a q^b$ для каких-то простых чисел p, q и неотрицательных целых a, b , то она обладает разрешимой подгруппой, у которой индекс и высота Фиттинга ограничены сверху в терминах $p^a q^b$ и $|C_G(\varphi)|$.*

Стандартные рассуждения об обратном пределе дают следствие для локально конечных групп.

Следствие 1.5. Если локально конечная группа G содержит элемент g порядка $p^a q^b$ для каких-то простых чисел p, q и неотрицательных целых a, b с конечным централизатором $C_G(g)$, то G обладает подгруппой конечного индекса, у которой есть конечный нормальный ряд с локально нильпотентными факторами.

Еще одно следствие более технического характера, но оно может быть полезным в дальнейших исследованиях.

Следствие 1.6. Если конечная группа G допускает автоморфизм φ , для которого имеется не более двух общих простых делителей чисел $|\varphi|$ и $|G|$, то группа G обладает разрешимой подгруппой, у которой индекс и высота Фиттинга ограничены сверху в терминах $|\varphi|$ и $|C_G(\varphi)|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. После того, как данная статья была подготовлена к публикации, автору стала известна неопубликованная рукопись Брайана Хартли, которая содержит результат теоремы 1.4; автор вместе с А. Боровиком и П. Шумяцким опубликовал эту рукопись как [33] на веб-сайте университета Манчестера.

2. Предварительные сведения

Индукцированные автоморфизмы инвариантных секций обозначаются теми же буквами. Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 2.1. Если φ — автоморфизм конечной группы G , а N — нормальная φ -инвариантная подгруппа, то $|C_{G/N}(\varphi)| \leq |C_G(\varphi)|$.

Следующая лемма является также хорошо известным следствием рассмотрения жордановой формы линейного преобразования порядка p^k в характеристике p .

Лемма 2.2. Если элементарная абелева p -группа P допускает автоморфизм φ порядка p^k такой, что $|C_P(\varphi)| = p^m$, то ранг группы P ограничен в терминах p^k и m .

Мы используем следующее следствие теорем типа Холла — Хигмэна из работы Хартли [34].

Теорема 2.3 (Холл, Хигмэн, Хартли). Пусть P — силовская p -подгруппа p -разрешимой группы G . Если R — нормальная подгруппа группы P и степень разрешимости группы R равна d , то $R \leq O_{p', p, p', \dots, p', p}(G)$, где p встречается в правой части d раз, если $p > 3$, $2d$ раз, если $p = 3$, и $3d$ раз, если $p = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уточняя некоторые теоремы Холла — Хигмэна [29], Хартли [34] доказал, что если A — абелева нормальная подгруппа силовской p -подгруппы из G , то

$$A \leq O_{p', p}(G), \text{ если } p > 3, \quad A \leq O_{3', 3, 3', 3}(G), \text{ если } p = 3,$$

$$A \leq O_{2', 2, 2', 2, 2', 2}(G), \text{ если } p = 2.$$

Результат следует из этих включений для $A = R^{(d-1)}$ несложной индукцией по ступени разрешимости d . $\square$

Теперь напомним некоторые определения и обозначения из теории представлений. Если V — kG -модуль для поля k и группы G , используем правую операторную запись vg для $v \in V$ и $g \in G$. Мы используем централизаторные обозначения для неподвижных точек типа $C_V(g) = \{v \in V \mid vg = v\}$. Также используем коммутаторные обозначения $[v, g] = -v + vg$ для $v \in V$ и $g \in G$. Коммутаторные подпространства определяются соответственно: если $B \leq G$, то $[V, B]$ натянуто на все коммутаторы $[v, b]$, где $v \in V$ и $b \in B$. Подпространство $[V, B]$ совпадает со взаимным коммутантом $[V, B]$ в естественном полупрямом произведении VG , когда V рассматривается как аддитивная группа, на которой действует G . В частности, $[V, B]$ является B -инвариантным и потому может рассматриваться как kB -подмодуль.

Для группы G и поля k свободный kG -модуль ранга n — это прямая сумма n копий групповой алгебры kG , каждая из которых рассматривается как векторное пространство над k размерности $|G|$ с базисом $\{b_g \mid g \in G\}$, помеченным элементами группы G , на котором G действует в регулярном подстановочном представлении: $b_g h = b_{gh}$. Другими словами, свободный kG -модуль $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ — это прямая сумма подпространств, регулярно переставляемых группой G так, что $V_g h = V_{gh}$.

Следующая лемма известна в литературе (см., например, [22, лемма 4.5]), но мы приводим ее доказательство для полноты изложения.

Лемма 2.4. *Предположим, что на абелевой p -группе M действует циклическая группа $\langle \varphi \rangle$ порядка p^n и V — $kM\langle \varphi \rangle$ -модуль для поля k характеристики q , отличной от p . Если подгруппа $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ действует нетривиально на V , то подпространство $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ является свободным $k\langle \varphi \rangle$ -модулем.*

Здесь, конечно, $\varphi^{p^{n-1}} = \varphi$, если $n = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что подпространство $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ $M\langle \varphi \rangle$ -инвариантно, так что оно является $kM\langle \varphi \rangle$ -модулем. Расширим основное поле до его алгебраического замыкания $\bar{k}$ и обозначим через $W = V \otimes_k \bar{k}$ получившийся $\bar{k}M\langle \varphi \rangle$ -модуль. Тогда $[W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ есть $\bar{k}M\langle \varphi \rangle$ -модуль, полученный из $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ расширением поля.

Так как характеристика q основного поля взаимно проста с $|M\langle \varphi \rangle|$, по теореме Машке

$$W = C_W([M, \varphi^{p^{n-1}}]) \oplus [W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$$

является вполне приводимым $\bar{k}M\langle \varphi \rangle$ -модулем. Пусть U — неприводимый $\bar{k}M\langle \varphi \rangle$ -подмодуль модуля $[W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$, на котором $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ действует нетривиально.

По теореме Клиффорда $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ разлагается на однородные $\bar{k}M$ -подмодули U_i (компоненты Веддерберна). Группа $\langle \varphi \rangle$ транзитивно переставляет подмодули U_i . Если ядро этого подстановочного действия было бы нетривиально, то $\varphi^{p^{n-1}}$ стабилизировал бы все U_i . Но абелева группа M действует скалярными преобразованиями на каждой однородной компоненте U_i . Отсюда следует, что группа $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ действовала бы тривиально на каждой U_i и потому на U вопреки нашему предположению. Итак, U — свободный $\bar{k}\langle \varphi \rangle$ -модуль.

Поскольку $[W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ — прямая сумма таких U , то $[W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ также является свободным $\bar{k}\langle \varphi \rangle$ -модулем. Тогда $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ — свободный $k\langle \varphi \rangle$ -модуль. Действительно, по теореме Дойринга — Нётер [35, теорема 29.7] два

представления над меньшим полем эквивалентны, если они эквивалентны над большим полем. Быть свободным $\bar{k}\langle\varphi\rangle$ -модулем или свободным $k\langle\varphi\rangle$ -модулем означает иметь базис как векторного пространства над соответствующим полем, элементы которого переставляются преобразованием φ так, что все орбиты регулярны. В таком базисе $\langle\varphi\rangle$ представляется соответствующими подстановочными матрицами, которые все определены над k . $\square$

3. Автоморфизм порядка p^n

Сначала отдельно сформулируем следующее предложение, которое будет также использовано в § 4 в иной ситуации.

Предложение 3.1. *Предположим, что циклическая группа $\langle\varphi\rangle$ порядка p^n действует автоморфизмами на конечной p -группе P и V — точный $\mathbb{F}_q P\langle\varphi\rangle$ -модуль, где $\mathbb{F}_q$ — простое поле порядка $q \neq p$. Тогда ступень разрешимости группы $[P, \varphi^{p^{n-1}}]$ ограничена в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — максимальная абелева нормальная подгруппа полупрямого произведения $P\langle\varphi\rangle$. Если $[M, \varphi^{p^{n-1}}] \neq 1$, то по лемме 2.4 $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ является свободным $\mathbb{F}_q\langle\varphi\rangle$ -модулем. Очевидно, что в свободном $\mathbb{F}_q\langle\varphi\rangle$ -модуле неподвижные точки преобразования φ — это в точности «диагональные» элементы. Отсюда следует, что порядок $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ равен

$$|C_{[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]}(\varphi)|^{|\varphi|} = |C_{[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]}(\varphi)|^{p^n}$$

и потому ограничен в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n . Группа $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ точно действует на V , поэтому по теореме Машке она также действует точно на $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$. Значит, порядок $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ ограничен в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n . Это, конечно, верно, если $[M, \varphi^{p^{n-1}}] = 1$.

Отсюда следует, что индекс $|M : C_M(\varphi^{p^{n-1}})|$ ограничен в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n , так как этот индекс равен числу различных коммутаторов $[m, \varphi^{p^{n-1}}]$ при $m \in M$.

Рассмотрим центральный ряд группы $P\langle\varphi\rangle$, соединяющий 1 и M . Так как $|M : C_M(\varphi^{p^{n-1}})|$ ограничен в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n , количество факторов этого ряда, не покрываемых подгруппой $C_M(\varphi^{p^{n-1}})$, ограничено в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n . Поэтому имеется нормальный ряд ограниченной длины, соединяющий 1 и M , каждый фактор которого либо централен в $P\langle\varphi\rangle$, либо покрывается подгруппой $C_M(\varphi^{p^{n-1}})$. Очевидно, что тогда $\varphi^{p^{n-1}}$ действует тривиально на каждом факторе этого ряда, а значит, $[P, \varphi^{p^{n-1}}]$ также действует тривиально на этих факторах. По теореме Калужнина группа автоморфизмов, индуцированная действием $[P, \varphi^{p^{n-1}}]$ на M , нильпотентна ограниченной ступени. Поскольку M содержит свой централизатор в $P\langle\varphi\rangle$, получаем, что $[P, \varphi^{p^{n-1}}]$ разрешима ограниченной ступени, так как по доказанному $\gamma_s([P, \varphi^{p^{n-1}}]) \leq M \cap [P, \varphi^{p^{n-1}}]$ для некоторого числа s , ограниченного в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n . $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Напомним, что G — конечная p -разрешимая группа, допускающая автоморфизм φ порядка p^n , имеющий не более t неподвижных точек в каждой φ -инвариантной элементарной абелевой p' -секции группы G . Нужно ограничить p -длину группы G в терминах p^n и t . Всюду далее в этом параграфе, говоря для краткости, что некоторый параметр

просто «ограничен», будем иметь в виду, что этот параметр ограничен сверху в терминах p^n и m .

Воспользуемся индукцией по n . Удобно рассмотреть случай $n = 0$ в качестве базы индукции, когда $|\varphi| = p^0 = 1$, т. е. φ действует тривиально на G . Тогда условие означает, что каждая элементарная абелева p' -секция группы G имеет ограниченный порядок. Покажем, что ступень nilпотентности силовской p -подгруппы P группы $\hat{G} = G/O_p(G)$ ограничена. Действительно, так как порядок P взаимно прост с $|O_{p'}(\hat{G})|$, для каждого простого числа q , делящего $|O_{p'}(\hat{G})|$, найдется P -инвариантная силовская q -подгруппа Q группы $O_{p'}(\hat{G})$. Фактор-группа $P/C_P(Q)$ действует точно на фактор-группе по подгруппе Фраттини $Q/\Phi(Q)$, порядок которой не выше m по предположению. Отсюда следует, что $P/C_P(Q)$ имеет ограниченный порядок, а потому и ограниченную ступень nilпотентности. Так как P действует точно на $O_{p'}(\hat{G})$, имеем $\bigcap C_P(Q_i) = 1$, где Q_i пробегает все P -инвариантные силовские подгруппы группы $O_{p'}(\hat{G})$. Значит, P является подпрямым произведением групп ограниченной ступени nilпотентности и потому сама имеет ограниченную ступень nilпотентности. Теперь получаем, что p -длина группы $\hat{G} = G/O_p(G)$ ограничена по теореме Холла — Хигмэна [29]. В результате p -длина группы G ограничена.

Далее предполагаем, что $n \geq 1$.

Положим $\hat{G} = G/O_p(G)$. Рассмотрим силовскую p -подгруппу полупрямого произведения $\hat{G}\langle\varphi\rangle$, содержащую $\langle\varphi\rangle$, и пусть P — ее пересечение с $\hat{G}$, так что P — φ -инвариантная силовская p -подгруппа группы $\hat{G}$. Так как порядок p -группы $P\langle\varphi\rangle$ взаимно прост с $|O_{p'}(\hat{G})|$, для каждого простого числа q , делящего $|O_{p'}(\hat{G})|$, найдется $P\langle\varphi\rangle$ -инвариантная силовская q -подгруппа Q группы $O_{p'}(\hat{G})$.

Фактор-группа $\bar{P} = P/C_P(Q)$ действует точно на фактор-группе по подгруппе Фраттини $V = Q/\Phi(Q)$, которую будем рассматривать как $\mathbb{F}_q P\langle\varphi\rangle$ -модуль. По условию $|C_V(\varphi)| \leq m$, значит, в силу предложения 3.1 ступень разрешимости подгруппы $[\bar{P}, \varphi^{p^{n-1}}]$ ограничена. Другими словами, $[P, \varphi^{p^{n-1}}]^{(s)} \leq C_P(Q)$ для некоторого ограниченного числа s . Поскольку P действует точно на $O_{p'}(\hat{G})$, имеем $\bigcap C_P(Q_i) = 1$, где Q_i пробегает все $P\langle\varphi\rangle$ -инвариантные силовские подгруппы группы $O_{p'}(\hat{G})$. Отсюда $[P, \varphi^{p^{n-1}}]^{(s)} = 1$.

По теореме 2.3 Холла — Хигмэна — Хартли получаем, что нормальная подгруппа $[P, \varphi^{p^{n-1}}]$ силовской p -подгруппы P содержится в $H = O_{p',p,p',\dots,p',p}(\hat{G})$, где p встречается ограниченное число раз.

Рассмотрим действие φ на фактор-группе $\tilde{G} = \hat{G}/H$. Так как $[P, \varphi^{p^{n-1}}] \leq H$, получаем, что $\varphi^{p^{n-1}}$ действует тривиально на образе P , который является силовской p -подгруппой группы $\tilde{G}$. В частности, $\varphi^{p^{n-1}}$ действует тривиально на $O_{p',p}(\tilde{G})/O_{p'}(\tilde{G})$, и потому также тривиально действует $[\tilde{G}, \varphi^{p^{n-1}}]$. Так как $O_{p',p}(\tilde{G})/O_{p'}(\tilde{G})$ содержит свой централизатор в $\tilde{G}/O_{p'}(\tilde{G})$, получаем, что $[\tilde{G}, \varphi^{p^{n-1}}] \leq O_{p',p}(\tilde{G})$. Другими словами, $\varphi^{p^{n-1}}$ действует тривиально на фактор-группе $\tilde{G}/O_{p',p}(\tilde{G})$. Поэтому порядок автоморфизма, индуцированного φ на $\tilde{G}/O_{p',p}(\tilde{G})$, не превосходит p^{n-1} . По предположению индукции p -длина этой фактор-группы ограничена. Тогда p -длина группы $G/O_{p,p'}(G)$ ограничена, а потому и p -длина группы G ограничена, как и требовалось. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.3. Здесь G — конечная разрешимая группа, допускающая автоморфизм φ порядка p^n , имеющий не более m неподвижных точек в каждой φ -инвариантной элементарной абелевой p' -секции группы

G . По теореме 1.1 p -длина группы G ограничена. Остается получить оценку высоты Фиттинга каждого p' -фактора T верхнего p -ряда, состоящего из подгрупп $O_{p',p,p',p,\dots}$.

Такая оценка вытекает, например, из рангового аналога теоремы Хартли — Айзекса, доказанного в [36]. Более точно, теорема 5.1 из [36] утверждает, что если конечная разрешимая группа K допускает разрешимую группу автоморфизмов L копростого порядка, то K обладает нормальной подгруппой N высоты Фиттинга не более $4^{\alpha(L)} - 1$, для которой (секционный) ранг фактор-группы K/N ограничен в терминах $|L|$ и ранга подгруппы $C_K(L)$. Здесь по определению ранг группы — это наименьшее число r такое, что каждая подгруппа может быть порождена r элементами.

Применим эту теорему к T и $\langle \varphi \rangle$. Известно, что ранг конечной группы ограничен в терминах рангов ее элементарных абелевых секций. Разумеется, каждая элементарная абелева секция группы $C_T(\varphi)$ является φ -инвариантной p' -секцией группы G и потому имеет ограниченный порядок по условию. Таким образом, в силу [36, теорема 5.1] получаем нормальную подгруппу T_1 группы T , для которой и высота Фиттинга группы T_1 , и ранг группы T/T_1 ограничены. Наконец, также известно, что высота Фиттинга разрешимой конечной группы ограничена в терминах ее ранга. В результате высота Фиттинга группы T ограничена, как и высота Фиттинга группы G . $\square$

4. Автоморфизм порядка $p^a q^b$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Напомним, что G — конечная группа, допускающая автоморфизм φ порядка $p^a q^b$. По теореме Хартли [3] (основанной на классификации конечных простых групп) группа G обладает разрешимой подгруппой индекса, ограниченного в терминах $p^a q^b$ и $|C_G(\varphi)|$. Поэтому можно с самого начала считать, что G разрешима, так что нам нужно ограничить высоту Фиттинга группы G в терминах $p^a q^b$ и $|C_G(\varphi)|$. Всюду далее будем для краткости говорить, что некоторый параметр ограничен, имея в виду, что этот параметр ограничен сверху в терминах $p^a q^b$ и $|C_G(\varphi)|$. Будем использовать без особых ссылок тот факт, что число неподвижных точек автоморфизма φ в каждой φ -инвариантной секции группы G не превосходит $|C_G(\varphi)|$ в силу леммы 2.1.

Воспользуемся индукцией по $a + b$. В качестве базы индукции рассмотрим случай, когда либо $a = 0$, либо $b = 0$. Тогда $|\varphi|$ — степень простого числа и по теореме Хартли — Турау [22] группа G обладает подгруппой ограниченного индекса, у которой высота Фиттинга не превосходит $\alpha(\varphi)$. (В сущности, для нашей «слабой» оценки было бы достаточно более простого рассуждения: если, скажем, $|\varphi| = p^a$, то ранг фактор-группы группы $O_{p',p}(G)/O_{p'}(G)$ по ее подгруппе Фраттини ограничен по лемме 2.2, откуда следует ограничение на высоту Фиттинга группы $G/O_{p'}(G)$, а высота Фиттинга группы $O_{p'}(G)$ ограничена в терминах a по теореме Томпсона [16].) Более того, выполняется следующее предположение, которое, по-видимому, было отмечено Хартли, но могло остаться неопубликованным. Сформулируем это предположение в более общем виде, не предполагая, что автоморфизм имеет бипримарный порядок.

Предложение 4.1. Если конечная разрешимая группа G допускает автоморфизм ψ такой, что имеется не более одного общего простого делителя чисел $|\psi|$ и $|G|$, то высота Фиттинга группы G ограничена сверху в терминах $|\psi|$ и $|C_G(\psi)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(|\psi|, |G|) = 1$, то результат вытекает из более сильной теоремы Томпсона [16]. Пусть $\langle \psi \rangle = \langle \psi_r \rangle \times \langle \psi_{r'} \rangle$, где $\langle \psi_r \rangle$ — силовская r -подгруппа группы $\langle \psi \rangle$, а r — единственный общий простой делитель чисел $|G|$ и $|\psi|$. Централизатор $C_G(\psi_{r'})$ допускает автоморфизм ψ_r , у которого порядок есть степень простого числа, а централизатор $C_{C_G(\psi_{r'})}(\psi_r)$ равен $C_G(\psi)$. По теореме Хартли — Турау [22] высота Фиттинга группы $C_G(\psi_{r'})$ ограничена. Применим теорему Томпсона к автоморфизму $\psi_{r'}$ группы G копростого порядка и получим, что высота Фиттинга группы G ограничена как требуется. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 1.4. Пусть $a \geq 1$ и $b \geq 1$. Пусть $\varphi_p = \varphi^{q^b}$ и $\varphi_q = \varphi^{p^a}$, так что $|\varphi_p| = p^a$ и $|\varphi_q| = q^b$, причем $\langle \varphi \rangle = \langle \varphi_p \rangle \times \langle \varphi_q \rangle$. Подгруппа $O_{q'}(G)$ допускает автоморфизм φ , порядок которого имеет не более одного общего простого делителя p с порядком $|O_{q'}(G)|$. По предложению 4.1 высота Фиттинга группы $O_{q'}(G)$ ограничена.

Поэтому можно считать, что $O_{q'}(G) = 1$. Тогда фактор-группа $\bar{G} = G/O_q(G)$ действует точно на фактор-группе по подгруппе Фраттини $V = O_q(G)/\Phi(O_q(G))$, которую будем считать $\mathbb{F}_q\bar{G}(\varphi)$ -модулем. Подпространство неподвижных точек $C_V(\varphi_p)$ имеет ограниченный порядок. Это вытекает из леммы 2.2, примененной к действию линейного преобразования φ_q порядка q^b на $C_V(\varphi_p)$, так как неподвижные точки преобразования φ_q в $C_V(\varphi_p)$ содержатся в подпространстве неподвижных точек $C_V(\varphi)$ ограниченного порядка.

Выберем силовскую p -подгруппу группы $\bar{G}\langle \varphi_p \rangle$, содержащую $\langle \varphi_p \rangle$, и пусть P — ее пересечение с $\bar{G}$, так что P — φ_p -инвариантная силовская p -подгруппа группы $\bar{G}$. В силу предложения 3.1 подгруппа $[P, \varphi_p^{p^{a-1}}]$ разрешима ограниченной степени.

Отсюда по теореме 2.3 Холла — Хигмэна — Хартли следует, что нормальная подгруппа $[P, \varphi_p^{p^{a-1}}]$ силовской p -подгруппы P содержится в $H = O_{p', p, p', \dots, p', p}(\bar{G})$, где p встречается ограниченное число раз.

Рассмотрим действие автоморфизма φ на фактор-группе $\tilde{G} = \bar{G}/H$. Так как $[P, \varphi_p^{p^{a-1}}] \leq H$, получаем, что $\varphi_p^{p^{a-1}}$ действует тривиально на образе подгруппы P , который является силовской p -подгруппой группы $\tilde{G}$. В частности, $\varphi_p^{p^{a-1}}$ действует тривиально на $O_{p', p}(\tilde{G})/O_{p'}(\tilde{G})$, и потому также тривиально действует $[\tilde{G}, \varphi_p^{p^{a-1}}]$. Так как $O_{p', p}(\tilde{G})/O_{p'}(\tilde{G})$ содержит свой централизатор в $\tilde{G}/O_{p'}(\tilde{G})$, получаем, что $[\tilde{G}, \varphi_p^{p^{a-1}}] \leq O_{p', p}(\tilde{G})$. Другими словами, $\varphi_p^{p^{a-1}}$ действует тривиально на фактор-группе $\tilde{G}/O_{p', p}(\tilde{G})$. Поэтому порядок автоморфизма, индуцированного φ на $\tilde{G}/O_{p', p}(\tilde{G})$, делит $p^{a-1}q^b$. По индукции высота Фиттинга этой фактор-группы ограничена.

Остается получить оценку высоты Фиттинга каждого из φ -инвариантных нормальных p' -факторов, которые появляются в ограниченном количестве в верхнем p -ряду групп H и $O_{p', p}(\tilde{G})$. Такая оценка следует из предложения 4.1. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.5. Это следствие для локально конечных групп вытекает из теоремы 1.4 в силу стандартных рассуждений об обратном пределе. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.6. Здесь конечная группа G допускает автоморфизм φ такой, что имеется не более двух общих простых делителей чисел $|\varphi|$ и $|G|$. Снова по теореме Хартли [3] можно с самого начала считать, что группа G разрешима. Если $(|\varphi|, |G|)$ равно 1 или степени простого числа, то результат вытекает из предложения 4.1. Пусть $\langle \varphi \rangle = \langle \varphi_{pq} \rangle \times \langle \psi \rangle$, где $\langle \varphi_{pq} \rangle$

— холлова $\{p, q\}$ -подгруппа группы $\langle \varphi \rangle$, а p, q — единственные общие простые делители $|G|$ и $|\varphi|$. Централизатор $C_G(\psi)$ допускает автоморфизм φ_{pq} бициклического порядка, централизатор которого $C_{C_G(\psi)}(\varphi_{pq})$ равен $C_G(\varphi)$. По теореме 1.4 высота Фиттинга группы $C_G(\psi)$ ограничена в терминах $|\varphi_{pq}|$ и $|C_G(\varphi)|$. Применим теорему Томпсона [16] к автоморфизму ψ группы G копростого порядка и получим, что высота Фиттинга группы G ограничена в терминах $|\varphi|$ и $|C_G(\varphi)|$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Brauer R., Fowler K. A. On groups of even order // Ann. Math. (2). 1955. V. 62. P. 565–583.
2. Thompson J. Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1959. V. 45. P. 578–581.
3. Hartley B. A general Brauer–Fowler theorem and centralizers in locally finite groups // Pacific J. Math. 1992. V. 152. P. 101–117.
4. Higman G. Groups and rings which have automorphisms without non-trivial fixed elements // J. London Math. Soc. (2). 1957. V. 32, N 2. P. 321–334.
5. Крекнин В. А. Разрешимость алгебр Ли с регулярными автоморфизмами конечного периода // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. С. 467–469.
6. Крекнин В. А., Кострикин А. И. Алгебры Ли с регулярными автоморфизмами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. С. 249–251.
7. Хухро Е. И. Кольца Ли и группы, допускающие почти регулярный автоморфизм простого порядка // Мат. сб. 1990. Т. 181. С. 1207–1219.
8. Kovács L. G. Groups with regular automorphisms of order four // Math. Z. 1960/61. Bd 75. S. 277–294.
9. Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И. Конечные группы с почти регулярным автоморфизмом порядка четыре // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 5. С. 575–602.
10. Alperin J. L. Automorphisms of solvable groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 175–180.
11. Хухро Е. И. Конечные p -группы, допускающие автоморфизм порядка p с малым числом неподвижных точек // Мат. заметки. 1985. Т. 38, № 5. С. 652–657.
12. Shalev A. On almost fixed point free automorphisms // J. Algebra. 1993. V. 157. P. 271–282.
13. Хухро Е. И. Конечные p -группы, допускающие p -автоморфизмы с малым числом неподвижных точек // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 12. С. 5–64.
14. Medvedev Yu. p -Divided Lie rings and p -groups // J. London Math. Soc. (2). 1999. V. 59. P. 787–798.
15. Jaikin-Zapirain A. On almost regular automorphisms of finite p -groups // Adv. Math. 2000. V. 153. P. 391–402.
16. Thompson J. Automorphisms of solvable groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 259–267.
17. Turull A. Fitting height of groups and of fixed points // J. Algebra. 1984. V. 86. P. 555–566.
18. Hartley B., Isaacs I. M. On characters and fixed points of coprime operator groups // J. Algebra. 1990. V. 131. P. 342–358.
19. Bell S. D., Hartley B. A note on fixed-point-free actions of finite groups // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1990. V. 41, N 162. P. 127–130.
20. Dade E. C. Carter subgroups and Fitting heights of finite solvable groups // Illinois J. Math. 1969. V. 13. P. 449–514.
21. Нерешенные задачи теории групп. Коуровская тетрадь. 18-е изд. Новосибирск: Ин-т математики им. Соболева СО РАН, 2014. <http://math.nsc.ru/alglog/18kt.pdf>.
22. Hartley B., Turau V. Finite soluble groups admitting an automorphism of prime power order with few fixed points // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1987. V. 102. P. 431–441.
23. Rae A. Sylow p -subgroups of finite p -soluble groups // J. London Math. Soc. (2). 1973. V. 71. P. 117–123.
24. Hartley B., Rae A. Finite p -groups acting on p -soluble groups // Bull. London Math. Soc. 1973. V. 5. P. 197–198.
25. Kurzweil H. Eine Verallgemeinerung von fixpunktfreien Automorphismen endlicher Gruppen // Arch. Math. (Basel). 1971. Bd 22. S. 136–145.
26. Meixner T. The Fitting length of solvable H_{p^n} -groups // Israel J. Math. 1985. V. 51, N 1–2. P. 68–78.

27. Wilson J. S. On the structure of compact torsion groups // Monatsh. Math. 1983. V. 96, N 1. P. 57–66.
28. Khukhro E. I., Shumyatsky P. Words and pronilpotent subgroups in profinite groups // Austral. Math. Soc. J. 2014. V. 97, N 3. P. 343–364.
29. Hall P., Higman G. The p -length of a p -soluble group and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. (3). 1956. V. 6. P. 1–42.
30. Hoare A. H. M. A note on 2-soluble groups // J. London Math. Soc. 1960. V. 35. P. 193–199.
31. Berger T. R., Gross F. 2-length and the derived length of a Sylow 2-subgroup // Proc. London Math. Soc. (3). 1977. V. 34. P. 520–534.
32. Брюханова Е. Г. Связь между 2-длиной и производной длиной силовой 2-подгруппы конечной разрешимой группы // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 2. С. 161–170.
33. Hartley B. Automorphisms of finite soluble groups. Preliminary version, MIMS EPrint: 2014.52. <http://eprints.ma.man.ac.uk/2188/01/covered/MIMS.ep2014.52.pdf>.
34. Hartley B. Some theorems of Hall–Higman type for small primes // Proc. London Math. Soc. (3). 1980. V. 41. P. 340–362.
35. Curtis C. W., Reiner I. Representation theory of finite groups and associative algebras. New York; London: Interscience, 1962.
36. Khukhro E., Mazurov V. Automorphisms with centralizers of small rank // Groups St. Andrews 2005. V. II. Selected papers of the conference, St. Andrews, UK, July 30–August 6, 2005. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. P. 564–585. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; V. 340).

Статья поступила 8 января 2015 г.

Хухро Евгений Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Университет Линкольна,
г. Линкольн, Великобритания
khukhro@yahoo.co.uk