Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 517.956.223

РЕЗОЛЬВЕНТЫ КОРРЕКТНО РАЗРЕШИМЫХ ЗАДАЧ КОНЕЧНОМЕРНО ВОЗМУЩЕННОГО ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ПРОКОЛОТОЙ ОБЛАСТИ

Б. Е. Кангужин, Н. Е. Токмагамбетов

Аннотация. Описан класс корректных задач для полигармонического оператора в проколотой области. Доказана формула для резольвенты корректно разрешимых задач конечномерно возмущенного полигармонического оператора.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.209

Ключевые слова: резольвента, корректность, разрешимость, краевая задача, конечномерное возмущение, полигармонический оператор, проколотая область.

1. Введение

Спектральный анализ обыкновенных дифференциальных операторов достаточно продвинут благодаря тому, что их резольвенты являются конечномерными возмущениями вольтерровых операторов [1, 2]. Цель данной работы — выделить класс многомерных дифференциальных операторов высших порядков, порожденных полигармоническим уравнением, резольвенты которых представляют конечномерные возмущения резольвент хорошо исследованных модельных операторов.

Пусть Ω — ограниченная в $\mathbb{R}^n$ односвязная область с достаточно гладкой границей. Рассмотрим полигармоническое уравнение порядка m

$$\Delta^m u(x) = f(x) \tag{1.1}$$

в проколотой области $\Omega_0 = \Omega \setminus \{x^0\}$ с граничными условиями на внешней границе $\partial\Omega$

$$\Delta^k u|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \tag{1.2}$$

где x^0 — фиксированная внутренняя точка Ω и $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Считаем, что f — элемент пространства $L_2(\Omega_0)$, решение u ищется в пространстве $W_{2,\mathrm{loc}}^{2m}(\Omega_0)$. При этом искомое решение из $W_{2,\mathrm{loc}}^{2m}(\Omega_0)$ существует, но не единственно. Цель работы — ответить на вопрос: как сузить пространство $W_{2,\mathrm{loc}}^{2m}(\Omega_0)$ и выбрать некоторые дополнительные на x^0 условия, обеспечивающие единственность задачи (1.1), (1.2)?

В одномерном случае задача (1.1), (1.2) запишется в виде

$$u^{(2m)}(x) = f(x), \quad x \in (0, x_0) \cup (x_0, 1),$$

$$u^{(k)}(a) = 0, \quad k = 1, ..., m-1, \ a = 0, 1,$$

где x_0 — внутренняя точка интервала $(0,1)$. Когда $f \in L_2((0,x_0)\cup(x_0,1)) = L_2(0,1)$ и решение u ищется в пространстве $W^{(2m)}_{2,\mathrm{loc}}((0,x_0)\cup(x_0,1))$, условия в точке x_0, обеспечивающие единственность решения задачи (1.1), (1.2) при $n=1$, согласно [3, 4] могут быть записаны в виде

$$u^{(k)}(x_0+0) - u^{(k)}(x_0-0) = \gamma_k(u^{(2m)}), \quad k = 0,\dots,2m-1,$$

где $\gamma_k(\cdot)$ — некоторые ограниченные линейные функционалы в $L_2(0,1)$. Указанные условия можно моделировать также уравнением

$$u^{(2m)}(x) + \sum_{i=0}^{2m-1} p_k(x)u^{(i)}(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

с коэффициентами $p_k(x)$ в виде комбинации дельта-функции и производных дельта-функции [3, 4], с носителем в точке x_0. С физической точки зрения потенциалы в виде дельта-функций также представляют научный интерес [5, 6]. Дифференциальные операторы с точечными взаимодействиями и их исследование с различных точек зрения можно найти [7–9]. Термин «точечные взаимодействия» в подобных задачах укрепился с выходом монографии [10], где активно пропагандируют методы нестандартного анализа в подобных проблемах.

Надо отметить, что рассматриваемые здесь задачи являются в некотором смысле предельными для задач в двусвязной области

$$\Delta^m u(x) = f(x), \quad x \in \Omega_\delta,$$

где $\Omega_\delta = \Omega \cap \{x : |x-x_0| > \delta\}$. При этом на внешней границе Ω требуется выполнение условии (1.2), а на внутренней границе ставятся некоторые классические граничные условия [5]. Оказывается при $\delta \to 0$ предельная в определенном смысле задача описывается семейством задач, изучаемых в данной работе. Когда количество проколотых точек области растет и они плотно расположены, возникают объекты, в некотором смысле аналогичные объектам из [11].

Вопросы данной работы частично исследованы для оператора Лапласа А. А. Анияровым и первым автором [12], и в [13] получены формулы первых регуляризованных следов также для оператора Лапласа.

2. Основные результаты

Для $\delta > 0$ обозначим через $\Pi^0_\delta = \{x \in \Omega : |x - x^0| \le \delta\}$ шар радиуса δ с центром в точке x^0. Для $i = 0,1,\dots,m-1$ и $s = 1,\dots,n$ введем предельные функционалы

$$\gamma_{ni+i+1+0}(h) = -\lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi^0_\delta} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\Delta_\xi^{m-i-1}h(\xi)\,dS_\xi,$$

$$\gamma_{ni+i+1+s}(h) = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi^0_\delta} \frac{\xi_s - x^0_s}{|\xi - x^0|}\Delta_\xi^{m-i-1}h(\xi)\,dS_\xi$$

для функций $h \in W^{2m}_{2,\mathrm{loc}}(\Omega_0)$.

Обозначим через $W^{2m}_{2,\gamma}(\Omega_0)$ элементы h пространства $W^{2m}_{2,\mathrm{loc}}(\Omega_0)$, для которых конечны функционалы $\gamma_j(h)$, $j = 1,\dots,m(n+1)$, причем

$$\Delta^m h(\cdot) - \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_{ni+i+1}(h)\Delta^i_\xi G_{m,n}(\cdot,\xi)\big|_{\xi=x_0} - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{s=1}^{n} \gamma_{ni+i+1+s}(h)\frac{\partial}{\partial\xi_s}\Delta^i_\xi G_{m,n}(\cdot,\xi)\Big|_{\xi=x_0} \in L_2(\Omega),$$

где $G_{m,n}(x,y)$ — функция Грина оператора Δ^m в области Ω с граничными условиями (1.2). Введем обозначения

$$\widetilde{G}_{ni+i+1+0}(x) \equiv \Delta_\xi^i G_{m,n}(x,x^0), \quad \widetilde{G}_{ni+i+1+s}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_s}\Delta_\xi^i G_{m,n}(x,x^0)$$

для $i = 0, 1, \dots, m-1$ и $s = 1, \dots, n$.

Замечание 2.1. $\widetilde{G}_j \in W_{2,\gamma}^{2m}(\Omega_0)$ при всех $j = 1, \dots, m(n+1)$.

Теорема 2.1. *Краевая задача для неоднородного полигармонического уравнения в проколотой области Ω_0:*

$$\Delta^m u(x) = f(x), \tag{2.1}$$

с внешними граничными условиями

$$\Delta^k u|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \tag{2.2}$$

и с «внутренними» граничными условиями

$$\gamma_i(u) = \gamma_i(h), \quad i = 1, \dots, m(n+1), \tag{2.3}$$

при любой правой части $f \in L_2(\Omega)$ и произвольной h из $W_{2,\gamma}^{2m}(\Omega_0)$, удовлетворяющей условию (1.2), имеет единственное решение $u \in W_{2,\gamma}^{2m}(\Omega_0)$, и оно задается по формуле

$$u(x) = \int\limits_\Omega G_{m,n}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + \sum_{i=1}^{m(n+1)} \gamma_i(h)\widetilde{G}_i(x).$$

Покажем, как, используя теорему 2.1, можно получать новые граничные корректно разрешимые в $W_{2,\gamma}^{2m}(\Omega_0)$ задачи для неоднородного полигармонического уравнения (2.1) в проколотой области Ω_0. Для этого достаточно, чтобы функция $h \in W_{2,\gamma}^{2m}(\Omega_0)$ непрерывным образом зависела от функции $f \in L_2(\Omega)$. Заметим, что значения функционалов γ_j, $j = 1, \dots, m(n+1)$, от $h \in W_2^{2m}(\Omega)$ равны нулю. Их значения могут быть отличны от нуля только на функциях $\widetilde{G}_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m(n+1)$. Выберем конечномерный оператор $K : L_2(\Omega) \to W_{2,\gamma}^{2m}(\Omega_0)$, задаваемый формулой

$$Kf(x) = \sum_{j=1}^{m(n+1)} c_j(f)\widetilde{G}_j(x),$$

где c_j, $j = 1, 2, \dots, m(n+1)$, — линейные ограниченные функционалы в $L_2(\Omega)$.

В теореме 2.1 положим

$$h(x) = Kf(x).$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 2.2. *При любом наборе линейных ограниченных в $L_2(\Omega)$ функционалов c_j, $j = 1, 2, \dots, m(n+1)$, уравнение (2.1) в проколотой области Ω_0 с условиями*

$$\Delta^k u|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

$$\gamma_j(u) - c_j(\Delta^m u) = 0, \quad j = 1, \dots, m(n+1), \tag{2.4}$$

для любого $f \in L_2(\Omega)$ имеет единственное решение u из $W^{2m}_{2,\gamma}(\Omega_0)$, для которого верно представление

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G_{m,n}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + \sum_{j=1}^{m(n+1)} c_j(f) \widetilde{G}_j(x).$$

Условия (2.2), (2.4) на функцию u можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (2.1) при любой правой части $f \in L_2(\Omega)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (2.1), (2.2), (2.4) представляет собой корректно разрешимую «краевую» задачу (условия (2.2), (2.4) не всегда краевые).

Отметим работы [14, 15], где доказана однозначная разрешимость некоторых классов уравнений соболевского типа (полигармоническое уравнение является частным случаем) в $\mathbb{R}^n$ путем рассмотрения их в весовых соболевских пространствах, что эквивалентно в определенном смысле наложению условий на бесконечности (конечного количества), тогда как в данной работе конечное количество дополнительных условии налагается во внутренней точке ограниченной области.

Оператор, соответствующий задаче из теоремы 2.2, обозначим через $\mathscr{L}_K$. Тогда оператор $\mathscr{L}_0$ соответствует задаче с дифференциальным уравнением

$$\Delta^m u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

и граничными условиями

$$\Delta^k u|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Покажем, что разность резольвент $(\mathscr{L}_K - \lambda I)^{-1} - (\mathscr{L}_0 - \lambda I)^{-1}$ представляет собой конечномерный оператор. Это следствие того, что оператор K, соответствующий задаче из теоремы 2.2, конечномерен. Для нахождения резольвенты $(\mathscr{L}_K - \lambda I)^{-1}$ надо решить задачу со спектральным параметром:

$$\Delta^m u(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad x \in \Omega_0, \tag{2.5}$$

$$\Delta^k u|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \tag{2.6}$$

$$\gamma_j(u) - c_j(\Delta^m u) = 0, \quad j = 1, \dots, m(n+1). \tag{2.7}$$

Согласно теореме 2.2 при $\lambda = 0$ имеем представление обратного оператора

$$\mathscr{L}_K^{-1} f = \mathscr{L}_0^{-1} f + \sum_{j=1}^{m(n+1)} c_j(f) \widetilde{G}_j(x).$$

Из последней формулы вытекает следующее представление резольвенты.

Теорема 2.3. *Резольвента оператора $\mathscr{L}_K$ определяется из соотношения*

$$(\mathscr{L}_K - \lambda I)^{-1} f(x) = (\mathscr{L}_0 - \lambda I)^{-1} f(x) + \sum_{i=1}^{m(n+1)} [c_i(\mathscr{L}_0(\mathscr{L}_0 - \lambda I)^{-1} f) \mathscr{L}_K(\mathscr{L}_K - \lambda I)^{-1} \widetilde{G}_i(x)]. \tag{2.8}$$

Замечание 2.2. Из теоремы 2.3 следует, что для определения резольвенты на произвольном элементе f из $L_2(\Omega)$ достаточно знать значения резольвенты на функциях $\widetilde{G}_j$, $j = 1, \dots, m(n+1)$.

В пространстве $W^{2m}_{2,\gamma}(\Omega_0)$ рассмотрим оператор $\mathscr{L}_K$, порожденный уравнением m-Лапласа

$$\Delta^m u(x) = f(x), \quad x \in \Omega_0,$$

с граничными условиями на внешней границе Ω_0:

$$\Delta^{i-1} u|_{\partial\Omega} = 0$$

для всех $i = 1, \ldots, m$, и с условиями на «внутренней» границе:

$$\gamma_j(u) + \tilde{\gamma}_j(\Delta^m u) = 0$$

для всех $j = 1, \ldots, m(n+1)$, где $\tilde{\gamma}_j(\cdot)$ — ограниченные функционалы над $L_2(\Omega)$.

Теорема 2.4. *Для резольвенты оператора $\mathscr{L}_K$ справедлива формула*

$$\mathscr{R}_K(\lambda) f = \mathscr{R}_0(\lambda) f - \frac{\mathscr{H}(f)}{D(\lambda)},$$

где

$$\mathscr{H}(f) = \begin{vmatrix} \mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_1 & \ldots & \mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_{m(n+1)} & 0 \\ 1+\lambda\tilde{\gamma}_1(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_1) & \ldots & \lambda\tilde{\gamma}_1(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_{m(n+1)}) & \tilde{\gamma}_1(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)f) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda\tilde{\gamma}_{m(n+1)}(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_1) & \ldots & 1+\lambda\tilde{\gamma}_{m(n+1)}(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_{m(n+1)}) & \tilde{\gamma}_{m(n+1)}(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)f) \end{vmatrix},$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\lambda\tilde{\gamma}_1(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_1) & \ldots & \lambda\tilde{\gamma}_1(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_{m(n+1)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda\tilde{\gamma}_{m(n+1)}(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_1) & \ldots & 1+\lambda\tilde{\gamma}_{m(n+1)}(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_{m(n+1)}) \end{vmatrix}.$$

Следствие. *Если $\tilde{\gamma}_i(\cdot) \equiv 0$, $i = 2, 3, \ldots, m(n+1)$, то резольвента оператора примет вид*

$$\mathscr{R}_K(\lambda) f(x) = \mathscr{R}_0(\lambda) f(x) - \frac{1}{D(\lambda)} \tilde{\gamma}_1(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda) f) \mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_1(x),$$

где $D(\lambda) = 1 + \lambda\tilde{\gamma}_1(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_1)$.

3. Доказательства основных результатов

Лемма 3.1. *Верны равенства*

$$\gamma_{ni+i+1+s}(\widetilde{G}_{nj+j+1+0}) = 0$$

для всех i, j и $s \neq 0$.

Доказательство. Заметим, что

$$\gamma_{ni+i+1+s}(\widetilde{G}_{nj+j+1+0}) = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi^0_\delta} \frac{\xi_s - x^0_s}{|\xi - x^0|} \Delta^{m-i-1}_\xi \Delta^j_{x^0} G(\xi, x^0)\, dS_\xi$$
$$= \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi^0_\delta} \frac{\xi_s - x^0_s}{|\xi - x^0|} \Delta^{m-i-1+j}_\xi G(\xi, x^0)\, dS_\xi.$$

Если $j \geq i+1$, то $\Delta_\xi^{m-i-1+j} G(\xi, x^0) = 0$ при $\xi \neq x^0$. Отсюда следует требуемое соотношение. Рассмотрим случай, когда $j < i+1$. Получим

$$\gamma_{ni+i+1+s}(\widetilde{G}_{nj+j+1+0}) = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \frac{\xi_s - x_s^0}{|\xi - x^0|} \Delta_\xi^{m-i-1+j} G(\xi, x^0)\, dS_\xi$$

$$= d_{m,n} \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \frac{\xi_s - x_s^0}{|\xi - x^0|} \Delta_\xi^{m-i-1+j} |x^0 - \xi|^{2m-n}\, dS_\xi$$

$$= d_{m,n} \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \frac{\xi_s - x_s^0}{|\xi - x^0|} |x^0 - \xi|^{2(i+1-j)-n}\, dS_\xi.$$

Делая замену переменных $\delta\eta = x^0 - \xi$, простыми вычислениями придем к требуемому соотношению, т. е.

$$\gamma_{ni+i+1+s}(\widetilde{G}_{nj+j+1+0}) = d_{m,n} \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} |x^0 - \xi|^{2(i+1-j)-n} \frac{\xi_s - x_s^0}{|\xi - x^0|}\, dS_\xi$$

$$= C_n d_{m,n} \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{|\eta|=1} \delta^{2(i+1-j)-n} |\eta|^{2(i+1-j)-n-1} \delta^{n-1} \eta_s\, dS_\eta$$

$$= C_n d_{m,n} \lim_{\delta\to+0} \delta^{2(i+1-j)-1} \int\limits_{|\eta|=1} |\eta|^{2(i+1-j)-n-1} \eta_s\, dS_\eta = 0,$$

так как $i - j \geq 0$. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Справедливы тождества*

$$\gamma_{ni+i+1+0}(\widetilde{G}_{nj+j+1+0}) = 0 \quad \textit{для } i \neq j,$$

$$\gamma_{ni+i+1+0}(\widetilde{G}_{nj+j+1+0}) = 1 \quad \textit{для } i = j.$$

Доказательство. По определению

$$\gamma_{ni+i+1+0}(\widetilde{G}_{nj+j+1+0}) = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi} \Delta_\xi^{m-i-1} \Delta_{x^0}^{j} G(\xi, x^0)\, dS_\xi$$

$$= \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi} \Delta_\xi^{m-i-1+j} G(\xi, x^0)\, dS_\xi.$$

Если $j \geq i+1$, то $\Delta_\xi^{m-i-1+j} G(\xi, x^0) = 0$ при $\xi \neq x^0$. Отсюда получим требуемое равенство. Рассмотрим случай, когда $j < i+1$. Из свойств функции Грина имеем

$$\gamma_{ni+i+1+0}(\widetilde{G}_{nj+j+1+0}) = d_{m,n} \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi} \Delta_\xi^{m-i-1+j} |x^0-\xi|^{2m-n}\, dS_\xi$$

$$= d_{m,n} \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi} |x^0-\xi|^{2(i+1-j)-n}\, dS_\xi$$

$$= d_{m,n} \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\xi_k - x_k^0)}{|\xi - x^0|} (2(i+1-j)-n)|x^0-\xi|^{2(i-j)-n}(\xi_k - x_k^0)\, dS_\xi$$

$$= (2(i+1-j)-n) d_{m,n} \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} |x^0-\xi|^{2(i-j)-n+1}\, dS_\xi.$$

Таким образом, получаем предельное равенство

$$\gamma_{ni+i+1+0}(\widetilde{G}_{nj+j+1+0}) = (2(i+1-j)-n) d_{m,n} \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} |x^0-\xi|^{2(i-j)-n+1}\, dS_\xi.$$

Сделаем замену переменных $\delta\eta = \xi - x^0$. В результате придем к соотношению

$$\gamma_{ni+i+1+0}(\widetilde{G}_{nj+j+1+0}) = (2(i+1-j)-n) d_{m,n} \lim_{\delta\to+0} \delta^{2(i-j)} \int\limits_{|\eta|=1} |\eta|^{2(i-j)-n+1}\, dS_\eta.$$

Ясно, что

$$\gamma_{ni+i+1+0}(\widetilde{G}_{nj+j+1+0}) = 0 \quad \text{при } i-j>0,$$
$$\gamma_{ni+i+1+0}(\widetilde{G}_{nj+j+1+0}) = 1 \quad \text{при } i=j.$$

Лемма 3.2 доказана.

Аналогично леммам 3.1 и 3.2 доказываются следующие утверждения.

Следствие 3.1. *Для всех* $i, j = 1, \ldots, m(n+1)$ *справедливы тождества*

$$\gamma_i(\widetilde{G}_j) = 0 \text{ при } i \neq j, \quad \gamma_i(\widetilde{G}_j) = 1 \text{ при } i = j.$$

Следствие 3.2. *Для* $g \in W_2^{2m}(\Omega)$ *справедливы следующие равенства:*

$$\gamma_i(g) = 0, \quad i = 1, \ldots, m(n+1).$$

Доказательство теоремы 2.1. Возьмем произвольную функцию h из $W_{2,\mathrm{loc}}^{2m}(\Omega_0)$, удовлетворяющую условию (1.2), и рассмотрим в области Ω_0 функцию

$$I(x) = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\Omega\setminus\Pi_\delta^0} G_{m,n}(x,\xi)\Delta^m h(\xi)\, d\xi.$$

Ясно, что она обладает следующими свойствами:

$$\Delta^m I = \Delta^m h \text{ в области } \Omega_0, \quad \Delta^k I|_{\partial\Omega} = 0,\ k = 0, \ldots, m-1.$$

Преобразуем функцию I, применяя формулу Грина. В силу того, что

$$\Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,\xi)|_{\xi\in\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

имеем

$$I(x) = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\Omega\setminus\Pi_\delta^0} \Delta_\xi^m h(\xi) G_{m,n}(x,\xi)\,d\xi$$

$$= h(x) - \sum_{i=1}^m \int\limits_{\partial\Omega} \Delta_\xi^{m-i} h(\xi) \frac{\partial}{\partial\nu_\xi} \Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,\xi)\,dS_\xi$$

$$- \lim_{\delta\to+0} \sum_{i=1}^m \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \biggl[\frac{\partial}{\partial\nu_\xi} \Delta_\xi^{m-i} h(\xi) \Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,\xi)$$

$$- \Delta_\xi^{m-i} h(\xi) \frac{\partial}{\partial\nu_\xi} \Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,\xi)\biggr]\,dS_\xi.$$

На $\partial\Pi_\delta^0$ производная по нормали $\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}$ определена следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial\nu_\xi} = \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j - x_j^0}{|\xi - x^0|} \frac{\partial}{\partial\xi_j}.$$

Окончательно получим соотношение

$$I(x) = h(x) - \lim_{\delta\to+0} \sum_{i=1}^m \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \biggl[\frac{\partial}{\partial\nu_\xi} \Delta_\xi^{m-i} h(\xi) \Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,\xi)$$

$$- \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j - x_j^0}{|\xi - x^0|} \Delta_\xi^{m-i} h(\xi) \frac{\partial}{\partial\xi_j} \Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,\xi)\biggr]\,dS_\xi.$$

Функции $\Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,\xi)$ и $\frac{\partial}{\partial\xi_j} \Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,\xi)$ по формуле Тейлора от переменной ξ в окрестности точки x^0 примут вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j} \Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le N} D_\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\xi_j} \Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,x^0) \frac{(\xi - x^0)^\alpha}{\alpha!} + O(|\xi - x^0|^{N+1}),$$

$$\Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le N} D_\xi^\alpha \Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,x^0) \frac{(\xi - x^0)^\alpha}{\alpha!} + O(|\xi - x^0|^{N+1}),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс и $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$. Для каждых i и j вычислим пределы

$$\lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi} \Delta_\xi^{m-i} h(\xi) \Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,\xi)\,dS_\xi$$

$$= \Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,x^0) \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi} \Delta_\xi^{m-i} h(\xi)\,dS_\xi$$

$$+ \sum_{|\alpha|=1}^N D_\xi^\alpha \Delta_\xi^{i-1} G_{m,n}(x,x^0) \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi} \Delta_\xi^{m-i} h(\xi) \frac{(\xi - x^0)^\alpha}{\alpha!}\,dS_\xi$$

$$+ \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta^0} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi} \Delta_\xi^{m-i} h(\xi) O(|\xi - x^0|^{N+1})\,dS_\xi,$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta^0}\frac{\xi_j-x_j^0}{|\xi-x^0|}\Delta_\xi^{m-i}h(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}\Delta_\xi^{i-1}G_{m,n}(x,\xi)\,dS_\xi$$

$$=\frac{\partial}{\partial\xi_j}\Delta_\xi^{i-1}G_{m,n}(x,x^0)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta^0}\frac{\xi_j-x_j^0}{|\xi-x^0|}\Delta_\xi^{m-i}h(\xi)\,dS_\xi$$

$$+\sum_{|\alpha|=1}^{N}D_\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_j}\Delta_\xi^{i-1}G_{m,n}(x,x^0)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta^0}\frac{\xi_j-x_j^0}{|\xi-x^0|}\Delta_\xi^{m-i}h(\xi)\frac{(\xi-x^0)^\alpha}{\alpha!}\,dS_\xi$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta^0}\frac{\xi_j-x_j^0}{|\xi-x^0|}\Delta_\xi^{m-i}h(\xi)O(|\xi-x^0|^{N+1})\,dS_\xi.$$

Так как $W_{2,\gamma}^{2m}(\Omega_0)$ состоит из таких $h\in W_{2,\mathrm{loc}}^{2m}(\Omega_0)$, для которых конечны функционалы

$$\gamma_{ni+i+1+0}(h)=-\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta^0}\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\Delta_\xi^{m-i-1}h(\xi)\,dS_\xi,$$

$$\gamma_{ni+i+1+s}(h)=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta^0}\frac{\xi_s-x_s^0}{|\xi-x^0|}\Delta_\xi^{m-i-1}h(\xi)\,dS_\xi$$

при $i=0,1,\dots,m-1$ и $s=1,\dots,n$, несложно убедиться в том, что

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta^0}\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\Delta_\xi^{m-i-1}h(\xi)(\xi-x^0)^\alpha\,dS_\xi=0,$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta^0}\frac{\xi_s-x_s^0}{|\xi-x^0|}\Delta_\xi^{m-i-1}h(\xi)(\xi-x^0)^\alpha\,dS_\xi=0$$

для всех $|\alpha|>0$, $i=0,1,\dots,m-1$ и $s=1,\dots,n$.

Доказательство теоремы завершается проверкой выполнения уравнения (2.1), внешних граничных условий (2.2) и внутренних граничных условий (2.3), которые непосредственным образом проверяются с использованием лемм 3.1, 3.2 и следствий 3.1, 3.2. При $f\equiv 0$, $h\equiv 0$ задача (2.1)–(2.3) в проколотой области Ω_0 имеет единственное решение. Это следует из теоремы об устранимой особенности гармонической функции [16, гл. 3]. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Покажем, что правая часть (2.8) является решением задачи (2.5)–(2.7). Положим

$$u_0(x)=(\mathscr{L}_0-\lambda I)^{-1}f(x),\quad H_i(x)=(\mathscr{L}_K-\lambda I)^{-1}\widetilde{G}_i(x),\ i=1,\dots,m(n+1).$$

Введем функцию

$$w(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{m(n+1)}[c_i(f)+\lambda c_i(u_0)][\widetilde{G}_i(x)+\lambda H_i(x)],\tag{3.1}$$

которая на самом деле представляет собой правую часть равенства (2.8). Для того чтобы из (2.8) получить (3.1), достаточно вспомнить тождества

$$\mathscr{L}_0(\mathscr{L}_0-\lambda I)^{-1}f=f+\lambda(\mathscr{L}_0-\lambda I)^{-1}f,$$

$$\mathscr{L}_K(\mathscr{L}_K-\lambda I)^{-1}f=f+\lambda(\mathscr{L}_K-\lambda I)^{-1}f.$$

Из того, что

$$\Delta^m u_0(x)-\lambda u_0(x)=f(x),\quad \Delta^m H_i(x)-\lambda H_i(x)=\widetilde{G}_i(x),$$
$$\Delta^m\widetilde{G}_i(x)=0,\quad i=1,\dots,m(n+1),$$

в области Ω_0, следует

$$\Delta^m w(x)-\lambda w(x)=f(x).$$

Таким образом, функция $w(x)$ удовлетворяет уравнению (2.5). Проверим выполнение граничного условия (2.6). Так как $u_0(x)\in D(\mathscr{L}_0)$, $H_i(x)\in D(\mathscr{L}_K)$, $\Delta^k\widetilde{G}_i(x)=0$ на $\partial\Omega$ при $i=1,\dots,m(n+1)$ и $k=0,1,\dots,m-1$, правая часть(3.1) удовлетворяет соотношению $\Delta^k w(x)=0$ на $\partial\Omega$ при $k=0,1,\dots,m-1$. Остается проверить условие (2.7). Рассмотрим при $t=1,\dots,m(n+1)$ выражение

$$\gamma_t(w)=\gamma_t(u_0)+\sum_{i=1}^{m(n+1)}[c_i(f)+\lambda c_i(u_0)][\gamma_t(\widetilde{G}_i)+\lambda\gamma_t(H_i)].$$

Так как $u_0(x)$ — гладкая в Ω функция, $\gamma_t(u_0)=0$. В силу лемм 3.1, 3.2 и следствия 3.1 имеем $\gamma_t(\widetilde{G}_t)=1$, $\gamma_t(\widetilde{G}_i)=0$, $t\neq i$. Поскольку $H_i\in D(\mathscr{L}_K)$, то

$$\gamma_t(H_i)=c_t(\Delta^m H_i)=c_t(\lambda H_i)+\gamma_t(\widetilde{G}_i)=\lambda c_t(H_i)+\gamma_t(\widetilde{G}_i).$$

Отсюда

$$\gamma_t(w)=c_i(f)+\lambda c_i(u_0)+\lambda\sum_{i=1}^{m(n+1)}[c_i(f)+\lambda c_i(u_0)][\lambda\gamma_t(H_i)+\gamma_t(\widetilde{G}_i)].$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}c_t(\Delta^m w)&=c_i(\lambda w)+c_i(f)=\lambda c_i(w)+c_i(f)\\&=c_i(f)+\lambda\sum_{i=1}^{m(n+1)}[c_i(f)+\lambda c_i(u_0)][\lambda\gamma_t(H_i)+\gamma_t(\widetilde{G}_i)]+\lambda c_i(u_0).\end{aligned}$$

Тем самым вычислены выражения $\gamma_t(w)$, $c_t(\Delta^m w)$. Их сравнение позволяет заключить, что разность $\gamma_t(w)-c_t(\Delta^m w)$ равна нулю. Следовательно, $w(x)$ является решением задачи (2.5)–(2.7). Таким образом, представление (2.8) для резольвенты $(\mathscr{L}_K-\lambda I)^{-1}$ доказано.

Тем самым теорема 2.3 доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Из теоремы 2.3 следует, что для резольвенты оператора $\mathscr{L}_K$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_K-\lambda I)^{-1}f(x)&=(\mathscr{L}_0-\lambda I)^{-1}f(x)\\&-\sum_{i=1}^{m(n+1)}[\tilde{\gamma}_i(\mathscr{L}_0(\mathscr{L}_0-\lambda I)^{-1}f)\mathscr{L}_K(\mathscr{L}_K-\lambda I)^{-1}\widetilde{G}_i(x)].\end{aligned}\tag{3.2}$$

Тогда, подставляя в формуле (3.2) вместо f функции $\widetilde{G}_i$, в силу тождества $\mathscr{L}_K(\mathscr{L}_K-\lambda I)^{-1}=I+\lambda(\mathscr{L}_K-\lambda I)^{-1}$ придем к системе равенств

$$\begin{aligned}&(\mathscr{L}_K-\lambda I)^{-1}\widetilde{G}_l(x)=(\mathscr{L}_0-\lambda I)^{-1}\widetilde{G}_l(x)\\&-\sum_{i=1}^{m(n+1)}[\tilde{\gamma}_i(\mathscr{L}_0(\mathscr{L}_0-\lambda I)^{-1}\widetilde{G}_l)[I+\lambda(\mathscr{L}_K-\lambda I)^{-1}]\widetilde{G}_i(x)],\quad l=1,\dots,m(n+1),\end{aligned}$$

или

$$\sum_{i=1}^{m(n+1)} [\delta_{l,i} + \lambda\tilde{\gamma}_i(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_l)]\mathscr{R}_K(\lambda)\widetilde{G}_i(x) = \mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_l(x)$$

$$- \sum_{i=1}^{m(n+1)} [\tilde{\gamma}_i(\mathscr{L}_0\mathscr{R}_0(\lambda)\widetilde{G}_l)\widetilde{G}_i(x)], \quad l = 1, \dots, m(n+1), \quad (3.3)$$

где $\delta_{l,i} = 0$ при $l \neq i$ и $\delta_{l,i} = 1$ при $l = i$, $\mathscr{R}_0(\lambda) := (\mathscr{L}_0 - \lambda I)^{-1}$, $\mathscr{R}_K(\lambda) := (\mathscr{L}_K - \lambda I)^{-1}$.

Находя из алгебраической системы (3.3) выражения $\mathscr{R}_K(\lambda)\widetilde{G}_i(x)$, в силу (3.2) получаем справедливость теоремы 2.4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. Новосибирск, 1973. 183 с.

2. *Naimark M. A.* Linear differential operators. London; Toronto: Harrap, 1968.

3. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма — Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. Моск. мат. о-ва. 2003. Т. 64. С. 159–212.

4. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма — Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.

5. *Головатый Ю. Д., Манько С. С.* Точные модели для операторов Шредингера с δ'-подобными потенциалами // Укр. мат. вестн. 2009. Т. 6, № 2. С. 173–207.

6. *Павлов Б. С.* Теория расширений и явнорешаемые модели // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, № 6. С. 99–131.

7. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set // J. Differ. Equations. 2010. V. 249. P. 253–304.

8. *Кангужин Б. Е., Нурахметов Д. Б., Токмагамбетов Н. Е.* Оператор Лапласа с δ-подобными потенциалами // Изв. вузов. Математика. 2014. № 2. С. 9–16.

9. *Голощапова Н. И., Заставный В. П., Маламуд М. М.* Положительно определенные функции и спектральные свойства оператора Шредингера с точечными взаимодействиями // Мат. заметки. 2011. Т. 90, № 1. С. 151–156.

10. *Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линстрем Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1980.

11. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Усреднение вырождающихся эллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 101–124.

12. *Кангужин Б. Е., Аniяров А. А.* Корректные задачи для оператора Лапласа в проколотой области // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 6. С. 856–867.

13. *Кангужин Б. Е., Токмагамбетов Н. Е.* О формуле регуляризованного следа корректно возмущенного оператора Лапласа // Докл. АН. 2015. Т. 460, № 1. С. 7–10.

14. *Демиденко Г. В.* Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа. I // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1064–1076.

15. *Демиденко Г. В.* Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа. II // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 1060–1069.

16. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Бином, 2005.

Статья поступила 24 января 2015 г.

Кангужин Балтабек Есматович, Токмагамбетов Нияз Есенжолович
Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
пр. аль-Фараби, 71, Алматы 050040, Казахстан
kanbalta@mail.ru, niyaz.tokmagambetov@gmail.com