Сибирский математический журнал
Июль—август, 2017. Том 58, № 4

УДК 514.76

О ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ С ТИПОВЫМ ЧИСЛОМ 1 ИЛИ 0 В 6–МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

М. Б. Банару

Аннотация. Доказано, что в 6-мерном эрмитовом подмногообразии алгебры Кэли почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числом 0 и на гиперповерхности с типовым числом 1 идентичны.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.401

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, гиперповерхность, типовое число, 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры октав.

Дорогому Вадиму Федоровичу Кириченко к его 70-летию.

Известно, что на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. Изучением почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий занимались такие замечательные геометры, как Блэр, Голдберг, Ишихара, В. Ф. Кириченко, Окумура, Сасаки, Танно, Таширо, Янамото, Яно.

В настоящей работе исследуются почти контактные метрические гиперповерхности 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли. Отметим, что 6-мерные подмногообразия алгебры Кэли дают исследователю содержательные и весьма разнообразные примеры почти эрмитовых структур. Такие структуры изучались систематически с 60-х гг. прошлого века американскими математиками Калаби и Греем, затем отечественным специалистом В. Ф. Кириченко и многими другими авторами. Эта тематика ни в коей мере не утратила своего значения и сейчас. Не вдаваясь в подробности, отметим лишь, что 6-мерная сфера S^6 с канонической приближенно келеровой структурой пользуется особой популярностью у различных специалистов (наверное, из-за того, что S^6 дала первый пример отличной от келеровой почти эрмитовой структуры). Приближенно келерова структура на 6-мерной сфере исследовалась такими геометрами, как Вранкен, Грей, Дещч, Диллен, Ежири, В. Ф. Кириченко, Кода, Машима, Пак, Секигава, Фунабаши, Хайжонг Ли, Хашимото. Заметим, что обзор [1] содержит множество результатов, полученных за последние 30 лет в области эрмитовой геометрии 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли.

В [2] автором было установлено, что в 6-мерном келеровом подмногообразии алгебры Кэли почти контактная метрическая структура на гиперповерхности с типовым числом 1 (или 1-гиперповерхности) косимплектическая, т. е. такая же, как и на вполне геодезической гиперповерхности (или 0-гиперповерхности) в 6-мерном келеровом подмногообразии алгебры октав. Потом этот результат был обобщен для почти контактной метрической гиперповерхности произвольного келерова многообразия [3]. Цель данной работы — показать, что и в 6-мерном эрмитовом подмногообразии алгебры Кэли на гиперповерхности с типовым числом 1 индуцируется почти контактная метрическая структура, идентичная той, которая индуцируется на вполне геодезической гиперповерхности.

Работа является продолжением исследований автора, рассматривавшего ранее характеризации в терминах типового числа почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий (кроме [2, 3] см., например, [4, 5] и многие другие).

Предварительные сведения

Как известно [6], *почти эрмитовой* (*almost Hermitian*, AH-) *структурой* на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \varkappa(M^{2n}).$$

Здесь $\varkappa(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым* (AH-) *многообразием*. Почти эрмитово многообразие называется *эрмитовым*, если почти комплексная структура J интегрируема [7].

Пусть $(M^{2n}, \{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\})$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p \in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию M^{2n} в точке p, $\{J_p, g_p = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$. Реперы, адаптированные к почти эрмитовой структуре (или A-реперы) в комплексификации касательного пространства, устроены следующим образом:

$$(p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}),$$

где ε_a — собственные векторы оператора почти комплексной структуры, отвечающие собственному значению оператора $i = \sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ — собственные векторы, отвечающие собственному значению $-i$. Здесь индекс a принимает значения от 1 до n, $\hat{a} = a + n$. Конструкция A-репера и его применение к исследованию почти эрмитовых структур разработаны В. Ф. Кириченко в [6].

Пусть $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^8$ — алгебра Кэли. Установлено [8], что в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X, Y, Z) = -X(\overline{Y}Z) + \langle X, Y\rangle Z + \langle Y, Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y,$$

$$P_2(X, Y, Z) = -(X\overline{Y})Z + \langle X, Y\rangle Z + \langle Y, Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y.$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \overline{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеуказанных. Пусть $M^6 \subset \mathbf{O}$ — 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли. Тогда на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^{2n}$ соотношением $J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2)$, $\alpha = 1, 2$, где $\{e_1, e_2\}$ — произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$ [8]. Напомним, что точка $p \in M^6$ называется *общей*, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 — единица алгебры Кэли. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются *подмногообразиями общего типа* [8]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа.

Почти контактной метрической структурой на многообразии N называется система тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, для которой выполняются условия [7]

$$\eta(\xi) = 1, \quad \Phi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \Phi = 0, \quad \Phi^2 = -\operatorname{id} + \xi \otimes \eta,$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \varkappa(N).$$

(Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика, $\varkappa(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.)

Хорошо известно, что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, нечетномерно и ориентируемо. Наиболее важными примерами почти контактной метрической структуры являются косимплектическая структура, структуры Сасаки, Кенмоцу и их обобщения. Эти структуры являются предметом интенсивных исследований, проводимых как с точки зрения дифференциальной геометрии, так и с точки зрения теоретической физики. Исследуя почти контактные метрические структуры методом внешних форм, В. Ф. Кириченко получил структурные уравнения Картана практически для всех наиболее важных видов таких структур [7]. Когда говорят об идентичных почти контактных метрических структурах, подразумевают, что соответствующие структурные уравнения Картана одинаковы. Напомним также, что *типовым числом гиперповерхности риманова многообразия* называют ранг ее второй квадратичной формы [9].

Основной результат

Теорема. *Во всяком* 6*-мерном эрмитовом подмногообразии алгебры Кэли почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числом* 0 *и на гиперповерхности с типовым числом* 1 *идентичны.*

Доказательство. В [8] В. Ф. Кириченко получил структурные уравнения почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав в комплексном специальном репере:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh} D_{hc}\omega^c \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b} D_h{}^{c]}\omega_b \wedge \omega_c, \\ d\omega_a &= -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh} D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ah[b} D^h{}_{c]}\omega^b \wedge \omega^c, \\ d\omega^a_b &= \omega^a_c \wedge \omega^c_b - \left(\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg} D_{h[k} D^g{}_{j]} + \sum_\phi T^\phi_{\hat{a}[k} T^\phi_{j]b}\right)\omega^k \wedge \omega^j, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\{\omega^k\}$ — компоненты форм смещения, $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности. В построенном репере M^6 задается системой Пфаффа $\omega^\varphi = 0$. Дифференцируя эти соотношения внешним образом и используя лемму Картана, получим $\omega^\phi_k = T^\varphi_{kj}\omega^j$, где $\{T^\varphi_{kj}\}$ — система функций на пространстве расслоения комплексных реперов над подмногообразием M^6. Эти симметричные по нижним индексам функции служат компонентами конфигурационного тензора (в терминологии Грея [10]). При этом

$$T^\varphi_{ab} = \overline{T}^\varphi_{\hat{a}\hat{b}}, \quad T^\varphi_{\hat{a}b} = \overline{T}^\varphi_{a\hat{b}}.$$

Условимся, что здесь и далее $\varphi = 7, 8$, $a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3$, $\hat{a} = a + 3$, $k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом $\varepsilon_{abc} = \varepsilon^{123}_{abc}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon^{abc}_{123}$ — компоненты тензора Кронекера порядка три, $\delta^{ah}_{bg} = \delta^a_b \delta^h_g - \delta^a_g \delta^h_b$,

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}, \quad D_h{}^c = D_{h\hat{c}}, \quad D^h{}_c = D_{\hat{h}c},$$

$$D_{cj} = \mp T^8_{cj} + iT^7_{cj}, \quad D_{\hat{c}j} = \mp T^8_{\hat{c}j} - iT^7_{\hat{c}j}.$$

Поскольку почти эрмитово подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ эрмитово тогда и только тогда [11], когда $D_{\hat{a}b} = D_{a\hat{b}} = 0$, уравнения (1) для 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли примут вид

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b, \\ d\omega_a &= -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b, \\ d\omega^a_b &= \omega^a_c \wedge \omega^c_b - \left(\frac{1}{2} \delta^{ah}_{bg} D_{hd} D^{gc} + \sum_\phi T^\phi_{\hat{a}\hat{c}} T^\phi_{bd} \right) \omega_c \wedge \omega^d. \end{aligned} \tag{2}$$

Воспользуемся записанными в A-репере структурными уравнениями Картана почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности N^{2n-1} эрмитова многообразия M^{2n} [5, 12]:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + \big(\sqrt{2} B^{\alpha n}{}_\beta + i\sigma^\alpha_\beta\big) \omega^\beta \wedge \omega \\ + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_n + i\sigma^{\alpha\beta} \right) \omega_\beta \wedge \omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \big(\sqrt{2} B_{\alpha n}{}^\beta - i\sigma^\beta_\alpha\big) \omega_\beta \wedge \omega \\ + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} B_{\alpha\beta}{}^n - i\sigma_{\alpha\beta} \right) \omega^\beta \wedge \omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega = \big(\sqrt{2} B^{n\alpha}{}_\beta - \sqrt{2} B_{n\beta}{}^\alpha - 2i\sigma^\alpha_\beta\big) \omega^\beta \wedge \omega_\alpha \\ + \big(B_{n\beta}{}^n + i\sigma_{n\beta}\big) \omega \wedge \omega^\beta + \big(B^{n\beta}{}_n - i\sigma^\beta_n\big) \omega \wedge \omega_\beta, \end{aligned}$$

где $B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2} J^a_{\hat{b},c}$, $B_{ab}{}^c = \frac{i}{2} J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}$. Здесь снова $\{\omega^\alpha\}$, $\{\omega_\alpha\}$ — компоненты форм смещения, $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$ $(\omega^n = \omega)$, $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности; через $\{J^j_{k,m}\}$ обозначены компоненты ∇J. Отметим, что системы функций $\{B^{ab}{}_c\}$ и $\{B_{ab}{}^c\}$ служат компонентами тензоров Кириченко [13] почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n}. Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n-1$, $a, b, c = 1, \ldots, n$, $\hat{a} = a + n$, σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в эрмитово многообразие M^{2n}.

Равенство нулю или единице типового числа гиперповерхности приводит к тому, что все элементы матрицы (σ_{ps}), $p, s = 1, \ldots, 2n-1$, ее второй квадратичной формы, кроме, быть может, σ_{nn}, обращаются в нуль. Следовательно, в случае гиперповерхности 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав все элементы этой матрицы, кроме, возможно, σ_{33}, обратятся в нуль. Понятно, что если типовое число гиперповерхности равно нулю, то матрица будет нулевой.

Поэтому можем переписать структурные уравнения Картана для почти контактной метрической структуры на гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в следующем виде:

$$\begin{gathered} d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + \sqrt{2} B^{\alpha n}{}_\beta \omega^\beta \wedge \omega + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_n\right) \omega_\beta \wedge \omega, \\ d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \sqrt{2} B_{\alpha n}{}^\beta \omega_\beta \wedge \omega + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} B_{\alpha\beta}{}^n\right) \omega^\beta \wedge \omega, \\ d\omega = \left(\sqrt{2} B^{n\alpha}{}_\beta - \sqrt{2} B_{n\beta}{}^\alpha\right) \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + B_{n\beta}{}^n \omega \wedge \omega^\beta + B^{n\beta}{}_n \omega \wedge \omega_\beta. \end{gathered} \tag{3}$$

Воспользуемся вытекающими из формул (2) выражениями для структурных тензоров Кириченко 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли:

$$B^{ab}{}_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc}, \quad B_{ab}{}^c = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc}.$$

В итоге получаем окончательный вид структурных уравнений Картана для почти контактной метрической структуры на 1- или 0-гиперповерхности 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли:

$$\begin{gathered} d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\alpha\beta 3} D_{3\gamma} \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + \varepsilon^{\alpha 3\gamma} D_{\gamma\beta} \omega^\beta \wedge \omega - \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta 3} D_{33} \omega_\beta \wedge \omega, \\ d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{\alpha\beta 3} D^{3\gamma} \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \varepsilon_{\alpha 3\gamma} D^{\gamma\beta} \omega_\beta \wedge \omega - \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta 3} D^{33} \omega^\beta \wedge \omega, \\ d\omega = (\varepsilon^{3\alpha\gamma} D_{\gamma\beta} - \varepsilon_{3\beta\gamma} D^{\gamma\alpha}) \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{3\beta\gamma} D^{\gamma 3} \omega \wedge \omega^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{3\beta\gamma} D_{\gamma 3} \omega \wedge \omega_\beta. \end{gathered} \tag{4}$$

Видно, что уравнения (4) зависят только от D_{ab} и D^{ab}, т. е. только от компонент конфигурационного тензора $\left\{T^\varphi_{kj}\right\}$, отвечающих за погружение эрмитова подмногообразия M^6 в алгебру октав. Уравнения (4) никак не зависят от того, обращается или не обращается σ_{33} в нуль. Иначе почти контактная метрическая структура на вполне геодезической гиперповерхности в эрмитовом $M^6 \subset \mathbf{O}$ идентична почти контактной метрической структуре на 1-гиперповерхности в M^6, что и требовалось доказать.

Принимая во внимание, что 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли келерово в том и только том случае [1, 11], если

$$D^{hc} = D_{hc} = 0,$$

обнаруживаем, что все компоненты тензоров Кириченко в структурных уравнениях Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N келерова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ обращаются в нуль. Вот почему получаем такие структурные уравнения почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N келерова подмногообразия M^6 алгебры октав:

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta, \quad d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta, \quad d\omega = 0. \tag{5}$$

Так как уравнения (5) задают косимплектическую структуру [6, 12], имеет место

Следствие. *Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях с типовым числом* 0 *или* 1 *в* 6*-мерных келеровых подмногообразиях алгебры Кэли идентичны, а именно косимплектические.*

Замечание 1. Как упомянуто выше, тот факт, что на вполне геодезической гиперповерхности с типовым числом не выше 1 в келеровом 6-мерном подмногообразии алгебры октав индуцируется исключительно косимплектическая структура, доказан в [3].

Замечание 2. Ранее было доказано, что необходимым и достаточным условием минимальности почти контактной метрической гиперповерхности в 6-мерном эрмитовом подмногообразии алгебры Кэли является четность ее типового числа [1, 4]. В соответствии с этим 1-гиперповерхности в эрмитовых $M^6 \subset \mathbf{O}$ не являются минимальными в отличие от 0-гиперповерхностей (разумеется, тот факт, что вполне геодезические гиперповерхности минимальны, понятен и без этого).

Замечание 3. Отметим, что работа В. Ф. Кириченко [8] содержит полную классификацию 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав, в то время как задача о полной классификации 6-мерных эрмитовых подмногообразий до сих пор не решена, хотя в этом направлении есть много результатов (см., например, [1, 5, 14–16] и др.).

Предположение

В заключение обратим внимание на то, что и для 6-мерной сферы с канонической приближенно келеровой структурой (такая структура не интегрируема и, следовательно, не эрмитова) получены схожие результаты. Именно, доказано, что и на вполне геодезической гиперповерхности, и на гиперповерхности с типовым числом 1 возможна реализация почти контактной метрической структуры только одного вида — слабо косимплектической структуры (или структуры Эндо) [17, 18]. Поэтому выдвигаем

Предположение. *В произвольном* 6*-мерном почти эрмитовом подмногообразии алгебры Кэли почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях с типовым числом* 0 *и* 1 *идентичны.*

Автор искренне благодарит рецензента за внимательное и доброжелательное отношение к данной работе и за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Банару М. Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 2014. Т. 126. С. 10–61. (Итоги науки и техники).
2. *Банару М. Б.* О почти контактных метрических гиперповерхностях с типовым числом 1 в 6-мерных келеровых подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 2014. № 10. С. 13–18.
3. *Банару М. Б.* О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 719–723.
4. *Банару М. Б.* О типовом числе косимплектических гиперповерхностей 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 981–991.
5. *Банару М. Б.* О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 8. С. 13–24.
6. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 18. С. 25–71. (Итоги науки и техники).

7. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса: Печатный дом, 2013.

8. *Кириченко В. Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 1980. № 8. С. 32–38.

9. *Kurihara H.* The type number on real hypersurfaces in a quaternionic space form // Tsukuba J. Math. 2000. V. 24. P. 127–132.

10. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. V. 10, N 2. P. 353–366.

11. *Banaru M.* On the Gray–Hervella classes of AH-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra // God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Inform. 2004. V. 95. P. 125–131.

12. *Степанова Л. В.* Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий // Науч. тр. МПГУ им. В. И. Ленина. 1995. С. 187–191.

13. *Abu-Saleem A., Banaru M.* Some applications of Kirichenko tensors // An. Univ. Oradea, Fasc. Mat. 2010. V. 17, N 2. P. 201–208.

14. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 5. С. 3–16.

15. *Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестн. МГУ. Сер. I. Математика. Механика. 1994. № 3. С. 6–13.

16. *Банару М. Б., Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 1. С. 205–206.

17. *Abu-Saleem A., Banaru M. B.* On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Malaysian J. Math. Sci. 2014. V. 8, N 1. P. 35–46.

18. *Banaru M. B., Banaru G. A.* A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kahlerian 6-sphere // Bull. Transilv. Univ. Braşov, Ser. III. Mathematics, Informatics, Physics. 2015. V. 8, N 2. P. 21–28.

Статья поступила 30 августа 2016 г.

Банару Михаил Борисович
Смоленский гос. университет,
ул. Пржевальского, 4, Смоленск 214000
mihail.banaru@yahoo.com