Сибирский математический журнал
Июль—август, 2017. Том 58, № 4

УДК 517.95+532.22

КОРРЕКТНОСТЬ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. Н. Белых

Аннотация. В предположении потенциальности движения жидкости доказана локальная теорема существования и единственности аналитического по времени решения в точной математической постановке. Получено строгое описание начальной стадии нестационарного движения осесимметричной жидкой «капли», предшествующей моменту эволюционного разрушения («blow-up») свободной границы.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.402

Ключевые слова: свободная граница, идеальная жидкость, задача Коши, аналитическое решение.

Абстрактное (математическое) направление в классической гидродинамике возникло во второй половине XIX в. благодаря деятельности Коши и Пуассона. Впоследствии и во многом стараниями М. А. Лаврентьева, Л. В. Овсянникова, В. И. Налимова (мы упоминаем лишь некоторые из главных имен) оно развилось в предмет, известный сейчас под названием «нестационарные задачи гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами» (см. [1–5]).

Движение идеальной несжимаемой жидкости, описываемое уравнениями Эйлера, напрямую зависит от краевых и начальных данных — причин, вызвавших это движение [4, 6]. Зачастую именно они определяют весь характер движения жидкости. Поэтому не случайно зародился интерес к математически строгим постановкам задач, приводящим к пониманию того, что́ именно в заданных условиях на границе может осуществляться в жидкости. Математическим итогом этого интереса являются, как правило, теоремы существования и единственности. При этом сам факт корректности задачи составляет важную часть «гидродинамического» знания, извлекаемого из математической постановки.

Теоретический аспект в изучении задач указанного типа является наиболее трудной частью исследования. В итоге нестационарные задачи со свободной границей, находящиеся в повестке дня еще со времен Коши и Пуассона, в своей точной математической постановке до сих пор пребывают в стадии перманентной разработки. Проблема, известная теперь как проблема Коши — Пуассона о волнах, несмотря на бурный к ней интерес в 70-е гг. прошлого века [3, 4], а также сильно возросшее к ней внимание [7] в последние годы в связи с попыткой доказать полную интегрируемость уравнений плоской задачи, до сих пор актуальны [8, 9].

Что касается строгого исследования задач, напрямую не связанных с волновыми процессами, то интерес к ним всегда оставался намного слабее. Первые исследования ряда конкретных задач со свободными границами в точной математической постановке с акцентом на вопросах существования и единственности решений были проведены в [10–14].

Первый строгий результат о неустановившемся движении плоской «капли» идеальной несжимаемой жидкости был получен Л. В. Овсянниковым [13] на основе метода конформных отображений с использованием созданного им аппарата шкал банаховых пространств аналитических функций (см. также [15]). Этапная работа [11] содержала составивший существенную часть всей теории материал вплоть до абстрактной теоремы [15], явившейся несомненно одним из наиболее важных вкладов Л. В. Овсянникова во всю рассматриваемую здесь проблематику. Применение абстрактной теоремы приводит к значительной экономии усилий при проведении доказательств, не устраняя, однако, существо свойственных задаче трудностей. Фактически первое применение аппарата шкал банаховых пространств обозначено в [10], правда, вне связи с задачами гидродинамики. Позже упомянутый аппарат превратился в мощный инструмент доказательства корректности задач, пригодный для многих приложений, особенно в уравнениях с частными производными [16, 17] и, в частности, к задачам гидродинамики со свободной поверхностью [13, 14].

Основная трудность при исследовании нестационарных задач гидродинамики со свободной границей состоит в том, что поле скоростей и давление ищутся вместе с областью движения жидкости. Для определения области имеются два условия: кинематическое и динамическое, связывающие форму жидкой границы области и скорости жидких частиц на ней. Кинематическое условие означает, что жидкая граница области во все моменты времени состоит из одних и тех же частиц, а динамическое равносильно заданию давления вдоль жидкой границы. Оба условия нелинейны, что и создает серьезные математические трудности. Но поскольку давление определяется аддитивно с точностью до произвольной функции времени, его всегда можно положить равным нулю на жидкой границе. В итоге жидкая граница области освобождается от давления, становясь свободной. Отсюда и термин «свободная граница» (поверхность).

В результате жидкую границу области относят к классу искомых объектов. Именно с этой общей особенностью задач гидродинамики со свободной поверхностью связан тот факт, что для доказательства их разрешимости (корректности) потребовались новые специфические подходы, поскольку, как заметил Л. В. Овсянников [5], с переменным временем оператор этих задач не вкладывается ни в одно из банаховых пространств, а решения с ростом времени теряют гладкость и «разрушаются». Препятствием к тому же являются и сильно ощущаемый недостаток теоретических представлений, и неразвитость математического языка для описания режимов поведения решений задач в момент зарождения у них особенностей (сингулярностей). Последнее является наиболее слабым звеном в цепи всех возникающих здесь аналитических трудностей: информация о структуре особенностей решений этих задач изначально, как правило, отсутствует. Поэтому проблема разрушения свободных границ в идеальной несжимаемой жидкости, напрямую связанная с проблемой продолжения «далеко» по времени гладких решений трехмерных уравнений Эйлера, относится в своей точной математической постановке к одной из труднейших в фундаментальной науке и до сих пор находится вне компетенции современных аналитических и численных методов [8, 18, 19].

Интерес к рассматриваемой в статье проблеме возник в связи с конкретной задачей, в предположениях которой, не слишком ограничивающих физический смысл, все сводится к математически менее сложной одномерной задаче. К указанной проблематике непосредственно примыкает задача об эволюции осесимметричной «капли» (конечного объема идеальной несжимаемой жидкости). В предположениях потенциальности и осевой симметричности движения исходная трехмерная задача для уравнений Эйлера редуцируется к ее одномерному аналогу, описываемому системой нелинейных псевдодифференциальных уравнений, дополненной данными Коши.

В отсутствие массовых сил и поверхностного натяжения исследуем неустановившееся потенциальное движение конечного осесимметричного объема идеальной несжимаемой жидкости («капли»), возникающее под действием начального импульса, распределенного по свободной границе области. При этом начальное поле скоростей определяется потенциалом скоростей, возникающим под действием заданного импульса давления на границе.

Основной результат статьи — локальная теорема существования и единственности аналитического по времени решения задачи. В итоге получено строгое описание начальной стадии движения осесимметричной капли, предшествующей ее эволюционному разрушению в момент, когда решение теряет аналитичность. Полученный результат полезен в качестве стартового в доказательных вычислениях [20, 21], организуемых посредством аналитического продолжения решения по времени с целью отыскания особенностей, если они есть, на положительной части вещественной оси времени.

1. Постановка задачи

В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие массовых сил и сил поверхностного натяжения естественна импульсная постановка задач [22]. Суть ее в следующем.

Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченный связный объем идеальной несжимаемой жидкости с гладкой границей $\partial\omega$, а $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$, $\pi(t,\boldsymbol{x})$ и $\varrho(t,\boldsymbol{x}) \equiv 1$ — скорость, давление и плотность жидкой частицы $\boldsymbol{x}$ из ω в момент времени $t \geq 0$ соответственно.

При импульсном воздействии на жидкость ее частицы в силу инерционности практически не смещаются из своего первоначального положения за время, в течение которого существенно изменяется давление π. Чтобы оценить это воздействие на движение частиц $\boldsymbol{x}$ из ω, рассмотрим в ω уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости (уравнения Эйлера):

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \frac{1}{\varrho}\nabla_x \pi = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \omega, \ \boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \ \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla_x), \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \omega. \tag{1.2}$$

Здесь дифференциальные операции ∇_x и div_x осуществляются по декартовым координатам $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ — переменным Эйлера. Интегрируя обе части уравнения (1.1) по бесконечно малому промежутку времени τ, предполагая, что скорости частиц жидкости в объеме ω конечны, и считая, что такое решение существует, получим

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0 = -\int_0^\tau \frac{1}{\varrho}\nabla_x \pi \, dt.$$

Вследствие малости τ пренебрегаем перемещением частиц жидкости за время τ и, таким образом, скорости $\boldsymbol{u}_0$ до начала и скорости $\boldsymbol{u}$ по окончании импульсного воздействия давления можно отнести к одной и той же частице $\boldsymbol{x}$ из ω. В результате, обозначая импульс мгновенных давлений через $\Pi = \int\limits_0^\tau \pi\, dt$, имеем уравнение

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0 = -\nabla_x \left(\frac{\Pi}{\varrho}\right), \tag{1.3}$$

которое показывает, что действие импульса Π вызывает внезапное изменение скоростей в каждой частице жидкости. При этом ее течение будет иметь потенциал Π/ϱ.

Верно и обратное: внезапное изменение поля скоростей в жидкости (если, например, внезапно изменится граница $\partial\omega$ области течения) вызовет появление в жидкости мгновенных давлений, импульс Π которых связан с изменением скоростей в жидкости уравнением (1.3). В итоге если до начала действия импульса Π движение жидкости было безвихревым, то оно останется безвихревым и по окончании действия Π. В самом деле, если $\boldsymbol{u}_0 = \nabla_x \varphi_0$, то вследствие (1.3) получим $\boldsymbol{u} = \nabla_x(\varphi_0 - \Pi/\varrho)$.

Таким образом, обозначая через φ потенциал скоростей после действия импульса Π, т. е. полагая $\boldsymbol{u} = \nabla_x \varphi$, имеем $\varphi = \varphi_0 - \Pi/\varrho + C$, где C — произвольная постоянная, одинаковая для всех частиц жидкости. Это позволяет заключить, что безвихревое движение идеальной несжимаемой жидкости, характеризуемое потенциалом φ, может возникнуть из состояния покоя $\varphi_0 = \mathrm{const}$ только после воздействия на жидкость мгновенных давлений с импульсом $\Pi = -\varrho\varphi + C$. Последнее свидетельствует о том, что никаким подбором импульса Π нельзя ни образовать, ни уничтожить вихревое движение идеальной несжимаемой жидкости. В противном случае, полагая $\boldsymbol{u} = 0$ в (1.3), имеем $\boldsymbol{u}_0 = \nabla_x(\Pi/\varrho)$, что равносильно условию $\mathrm{rot}_x\, \boldsymbol{u}_0 = 0$.

Импульсная постановка задач гидродинамики не разрушает потенциальности движения идеальной несжимаемой жидкости в области ω. В этой связи к уравнениям (1.1), (1.2) следует добавить условие

$$\mathrm{rot}_x\, \boldsymbol{u} = 0, \quad \mathrm{rot}_x\, \boldsymbol{u}|_{t=0} = \mathrm{rot}_x\, \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{x} \in \omega. \tag{1.4}$$

Специфика исследуемой задачи состоит в том, что область ω заранее не фиксирована, а на ее границе $\partial\omega$ при всех $t \geq 0$ выполнены два условия: граница $\partial\omega$ состоит из одних и тех же частиц жидкости (кинематическое условие) и вдоль всей поверхности $\partial\omega$ задано давление π (динамическое условие). Из уравнения (1.1) давление определяется с точностью до слагаемого, равного произвольной функции времени t. Поэтому без ограничения общности можно принять $\pi(t, \boldsymbol{x})|_{\partial\omega} = 0$, $t \geq 0$. Если искать уравнение жидкой границы $\partial\omega$ в виде $h(t, \boldsymbol{x}) = 0$ и предполагать потенциальность движения жидкости, т. е. равенство $\boldsymbol{u} = \nabla_x \varphi$, то кинематическое и динамическое условия будут равносильны выполнению на $\partial\omega$ следующих равенств:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=0} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla_x \varphi|^2 = 0$$

(интеграл Коши — Лагранжа). К уравнениям (1.1), (1.2) и (1.4) добавляются данные Коши: в области ω_0 с границей $\partial\omega_0$ задается вектор скорости $\boldsymbol{u}_0 = \nabla_x \varphi_0$ при соблюдении необходимых условий: $\mathrm{div}_x\, \boldsymbol{u}_0 = 0$, $\mathrm{rot}_x\, \boldsymbol{u}_0 = 0$ при $t = 0$.

В результате рассматривается задача об отыскании в пространстве $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ неустановившегося движения замкнутой односвязной области $\omega_t \equiv \omega(t)$, занятой невязкой несжимаемой жидкостью постоянной плотности $\varrho \equiv 1$. Предполагается, что на всей границе $\partial\omega_t$ области в отсутствие массовых сил и сил поверхностного натяжения давление π постоянно и равно нулю. Такое движение «по инерции» возникает под действием начального импульса (давления) Π, распределенного по всей жидкой границе $\partial\omega_t$ в начальный момент времени. Предполагается, что движение в ω_t безвихревое: $\mathrm{rot}_x\,\boldsymbol{u} = 0$.

В итоге в эйлеровых переменных $t, \boldsymbol{x}$ задача (1.1)–(1.4) сведена к отысканию потенциала $\varphi(t, \boldsymbol{x})$ скорости $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ в переменной области $\omega(t)$. Точнее, пусть даны область $\omega \subset \mathbb{R}^3$ и гармоническая в ней функция φ. Для $t \geq 0$ требуется найти область ω_t и гармоническую в ω_t функцию $\varphi(t, \boldsymbol{x})$ так, чтобы при $t = 0$ выполнялись условия

$$\omega_0 = \omega, \quad \varphi(0, \boldsymbol{x}) = \varphi_0(\boldsymbol{x}), \quad \Delta_x\varphi_0 = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \omega,$$

а в области ω_t и на свободной границе (поверхности) $\partial\omega_t$, заданной уравнением $h(t, \boldsymbol{x}) = 0$, выполнялись соответственно соотношения

$$\Delta_x\varphi = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \omega_t, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_x h \cdot \nabla_x\varphi = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\omega_t, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla_x\varphi|^2 = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\omega_t. \tag{1.7}$$

В дальнейшем будем считать, что ω_0 — это шар радиуса 1 с центром в точке $(0, 0, 0)$, а геометрия начального поля скоростей $\boldsymbol{u}_0(x)$ определяется потенциалом $\varphi_0(\boldsymbol{x})$: $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) = \nabla_x\varphi_0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \omega$.

Реализовать осесимметричное движение «жидкого» шара можно, инициировав это движение импульсом Π, сосредоточенным в момент времени $t = 0$, например, на экваторе или на полюсах: шар с ростом $t > 0$ будет при этом преобразовываться в «гантель» или в «тор» соответственно.

Важной особенностью задачи (1.5)–(1.7) является то, что занятый жидкостью объем ω_t заранее не фиксирован, состоит из жидких частиц и является искомым объектом. Необходимость поиска области ω_t усугубляет трудности, без того присущие задаче интегрирования уравнений (1.5)–(1.7). Но специфика кинематического условия (1.6) такова, что позволяет преобразовать эту задачу к другой, в которой область определения решения будет фиксирована. Достигается это переходом к лагранжевым переменным [11].

Переход от эйлеровых переменных $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ к лагранжевым $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ осуществляется с помощью уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) \equiv \nabla_x\varphi(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}|_{t=0} = \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \omega(0). \tag{1.8}$$

Отображение $\boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi})$, заданное через зависимость решения этой системы от начальных данных, определено корректно. При этом область $\omega(t)$ получается как образ области $\omega(0)$ при отображении $\boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{x}$ и кинематическое условие $dh/dt|_{h=0} = 0$ выполняется автоматически, поскольку свободная граница $\partial\omega(t)$ при любом $t \geq 0$ является геометрическим местом одних и тех же жидких частиц, которые движутся по закону (1.8). В результате задача со свободной границей рассматривается как задача об отыскании отображения $\boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{x}$.

При этом при известной функции $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi})$ вектор скорости $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ получается из (1.8) дифференцированием, а давление $\pi(t, \boldsymbol{x})$ — интегрированием уравнения (1.1).

В преобразовании уравнений (1.1), (1.2) к лагранжевым переменным важную роль играет матрица Якоби $M = \partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{\xi}$ отображения $\boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi})$ (t — параметр). Для любых гладких $f(\boldsymbol{x}) = \hat{f}(\boldsymbol{\xi})$ и $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\xi}) \equiv (A, B, C)$ справедливы следующие тождества [11]:

$$\nabla_\xi \hat{f} = M^* \nabla_x f, \tag{1.9}$$

$$\operatorname{div}_\xi \hat{\boldsymbol{a}} = \operatorname{div}_x (M\boldsymbol{a}), \quad \text{если } |M| \equiv \det M = 1. \tag{1.10}$$

Для всякой гладкой $f(t, \boldsymbol{x}) = \hat{f}(t, \boldsymbol{\xi})$ верны равенства $df/dt = \partial \hat{f}/\partial t \equiv f_t$. Индексы t и ξ означают, что соответствующие дифференциальные операции выполняются по лагранжевым переменным $(t, \boldsymbol{\xi})$; далее M^* — транспонированная к M матрица.

Тождество (1.9) очевидно. Справедливость (1.10) вытекает из следующих легко проверяемых тождеств (здесь $A(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}))$ — произвольная гладкая функция)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} A = \boldsymbol{x}_\xi \cdot \nabla_x A = \operatorname{div}_x (\boldsymbol{x}_\xi A) - A \operatorname{div}_x \boldsymbol{x}_\xi, \tag{1.11}$$

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{x}_\xi = 3 \frac{\partial}{\partial \xi} \log |M|, \tag{1.12}$$

а также равенства $|M| = \det M = 1$, $t \geq 0$. Последнее получается с помощью теоремы Лиувилля [23] для системы уравнений в вариациях, соответствующей уравнению (1.8):

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} M, \tag{1.13}$$

в силу уравнения неразрывности (1.2) и начального условия $\boldsymbol{x}|_{t=0} = \boldsymbol{\xi}$.

При $|M| = 1$ из (1.12) и (1.11) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi} A = \operatorname{div}_x (\boldsymbol{x}_\xi A), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} B = \operatorname{div}_x (\boldsymbol{x}_\eta B), \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} C = \operatorname{div}_x (\boldsymbol{x}_\zeta C).$$

Поэтому для любого вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\xi}) = (A, B, C)$ справедливо (1.10).

Преобразуем к лагранжевым переменным уравнение (1.2). Выше было показано, что выполнение уравнения (1.2) влечет равенство $|M| = 1$. Поэтому, подставив $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{u}$ в (1.2) и использовав тождество (1.11), получим уравнение неразрывности в лагранжевых переменных:

$$\operatorname{div}_\xi (M^{-1} \boldsymbol{x}_t) = 0. \tag{1.14}$$

Справедливо и обратное утверждение: из уравнения (1.14) следует равенство $|M| = 1$. Действительно, в силу теоремы Лиувилля из (1.13) вытекает

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{u} = \frac{|M|_t}{|M|}. \tag{1.15}$$

Равенство (1.11) для вектора $\boldsymbol{a} = M^{-1} \boldsymbol{x}_t$ и (1.12) приводит к соотношению

$$\operatorname{div}_\xi M^{-1} \boldsymbol{x}_t = \operatorname{div}_x \boldsymbol{u} - 3 \frac{M^{-1} \boldsymbol{x}_t}{|M|} \cdot \nabla_\xi |M|,$$

которое вместе с (1.14) и (1.15) дает линейное дифференциальное уравнение для определителя матрицы M: $|M|_t - 3\boldsymbol{a}\cdot\nabla_\xi|M| = 0$. Начальным условием для этого уравнения будет $|M| = 1$ при $t = 0$. По теореме единственности решения задачи Коши заключаем, что $|M| = 1$ для всех $t \geq 0$. Таким образом, уравнение неразрывности (1.14) в лагранжевых координатах равносильно условию $|M| = 1$.

Далее, подстановка $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_t$ в (1.1) с использованием (1.9) приводит к уравнению

$$M^*\boldsymbol{x}_{tt} + \nabla_\xi\hat{\pi} = 0, \tag{1.16}$$

которое с помощью тождества [11]

$$M^*\boldsymbol{x}_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(M^*\boldsymbol{x}_t) - \frac{1}{2}\nabla_\xi|\boldsymbol{x}_t|^2$$

преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(M^*\boldsymbol{x}_t) + \nabla_\xi\left(\hat{\pi} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_t|^2\right) = 0.$$

Применив к нему последовательно операции rot_ξ и интегрирования по времени, а также учитывая начальное условие, получим $\operatorname{rot}_\xi M^*\boldsymbol{x}_t = \operatorname{rot}_x \boldsymbol{u}_0 = 0$. Но для безвихревого поля существует потенциал $\varphi(t,\boldsymbol{x})$ с условием $\boldsymbol{u} = \nabla_x\varphi$. Поэтому уравнение импульса в лагранжевых переменных в силу (1.9) имеет вид

$$M^*\boldsymbol{x}_t = \nabla_\xi\hat{\varphi} \quad \text{или } \boldsymbol{x}_t = {M^*}^{-1}\nabla_\xi\hat{\varphi}. \tag{1.17}$$

Уравнения (1.16), (1.17) образуют замкнутую систему уравнений для определения величин $\boldsymbol{x}$, π в лагранжевых переменных $t, \boldsymbol{\xi}$.

Сформулируем дополнительные условия в лагранжевых переменных, которые необходимо наложить на функции $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})$, $\pi(t,\boldsymbol{\xi})$ для того, чтобы искомое решение описывало потенциальное движение конечного объема идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Заметим, что свободная граница есть фиксированная поверхность $\partial\omega_0$ в пространстве лагранжевых координат. Поэтому кинематическое условие (1.6) выполняется автоматически. Что касается динамического условия (1.7), то оно преобразуется к следующему виду:

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla_x\varphi|^2 = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}|\nabla_x\varphi|^2.$$

Эквивалентность указанных эйлерова и лагранжева подходов к описанию безвихревого движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей установлена Л. В. Овсянниковым в [11].

В результате задача (1.1)–(1.4) о безвихревом движении жидкой области ω_t с помощью отображения $\boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})$ сведена к эквивалентной задаче, но уже с фиксированной областью $\omega(0)$. При этом если в дальнейшем для краткости знак $\hat{}$ в равенстве $\hat{f}(t,\boldsymbol{\xi}) = f(t,\boldsymbol{x})$ опустить, то на основании тождеств (1.9), (1.10) получается следующая постановка задачи в форме Овсянникова [11]:

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\boldsymbol{W}, \quad \boldsymbol{W} = (M^* - M^{-1})\boldsymbol{x}_t, \quad \boldsymbol{\xi} \in \omega_0, \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{x}_t = {M^*}^{-1}\nabla\varphi, \quad \boldsymbol{\xi} \in \omega_0, \tag{1.19}$$

$$\varphi_t = \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_t|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \partial\omega_0. \tag{1.20}$$

$$t = 0: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}, \quad \varphi = \varphi_0(\boldsymbol{\xi}), \quad \Delta\varphi_0 = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \omega_0. \tag{1.21}$$

Здесь все операции выполняются по лагранжевым координатам $(t, \boldsymbol{\xi})$, $M = \partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{\xi}$ — матрица Якоби, M^* и M^{-1} — транспонированная и обратная к M матрицы соответственно, $\omega_0 = \{\boldsymbol{\xi} \mid 0 \le |\boldsymbol{\xi}| \le 1\}$, $\partial\omega_0 = \{\boldsymbol{\xi} \mid |\boldsymbol{\xi}| = 1\}$.

Аналитическим решением задачи (1.18)–(1.21) назовем решение, представимое в виде степенных рядов по времени $t \ge 0$.

Отметим простой факт, непосредственно вытекающий из анализа системы уравнений (1.18)–(1.21). Осевая симметрия относительно оси z, заданная в момент времени $t = 0$, сохраняется на аналитическом решении для всех $t \ge 0$, при которых решение определено. Благодаря этому матрицы Якоби, присутствующие в формулах (1.18)–(1.21), будут матрицами второго порядка, если в качестве искомых функций и независимых переменных выбрать инварианты групп вращений вокруг осей z и ζ.

2. Представление решения

В пространствах точек $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ и $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ введем сферические (лагранжевы) координаты по формулам

$$\xi = \sigma\sqrt{1-\lambda^2}\cos\vartheta, \quad \eta = \sigma\sqrt{1-\lambda^2}\sin\vartheta, \quad \zeta = \sigma\lambda, \quad 0 \le \sigma < \infty, \ -1 \le \lambda \le 1,$$

$$x = r\sqrt{1-p^2}\cos s, \quad y = r\sqrt{1-p^2}\sin s, \quad z = rp, \quad 0 \le r < \infty, \ -1 \le p \le 1.$$

Азимутальные переменные ϑ и s изменяются в промежутке $[0, 2\pi)$.

Преобразуем (1.18)–(1.21) в систему уравнений для новых переменных $\boldsymbol{\lambda} = (\sigma, \lambda)$ и новых искомых функций $\varphi \equiv \varphi(t, \boldsymbol{\lambda})$ и $\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{p}(t, \boldsymbol{\lambda}) = (r, p)$:

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\boldsymbol{W}, \quad \boldsymbol{W} = (M^* - M^{-1})\boldsymbol{p}_t, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \overline{\omega}, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{p}_t = M^{*-1}\nabla\varphi, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \overline{\omega}, \tag{2.2}$$

$$\varphi_t = \frac{1}{2}|\boldsymbol{p}_t|^2, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \partial\omega, \tag{2.3}$$

$$t = 0: \quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{\lambda}, \quad \varphi = \varphi_0(\boldsymbol{\lambda}), \quad \Delta\varphi_0 = 0, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \overline{\omega}, \tag{2.4}$$

где

$$M = \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{\lambda}} = \begin{pmatrix} r_\sigma & r_\lambda \\ p_\sigma & p_\lambda \end{pmatrix},$$

$$\overline{\omega} = \{(\sigma, \lambda) \mid 0 \le \sigma \le 1, \ -1 \le \lambda \le 1\}, \quad \partial\omega = \{(1, \lambda) \mid -1 \le \lambda \le 1\}.$$

Здесь индексы σ, λ, t обозначают частные производные по соответствующим переменным, а дифференциальные операции имеют вид

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial\sigma}, \frac{\partial}{\partial\lambda}\right), \quad \operatorname{div}(\cdot) = \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}\sigma^2(\cdot) + \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\lambda}(1-\lambda^2)(\cdot).$$

Поверхность $\partial\omega_t$, ограничивающая движущийся объем жидкости ω_t, во все моменты времени состоит из одних и тех же частиц. Поэтому при любом $t \ge 0$ ей соответствует единичная сфера $\sigma = 1$.

Решение системы уравнений (2.1)–(2.4) будем искать в виде

$$\varphi(t, \boldsymbol{\lambda}) = \varphi_0(\boldsymbol{\lambda}) + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\boldsymbol{\lambda})t^n, \quad \boldsymbol{p}(t, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{\lambda})t^n. \tag{2.5}$$

Подставив ряды (2.5) в (2.1)–(2.3), придем к уравнениям

$$\Delta\varphi_n = \operatorname{div}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(M^*_{n-k} - N_{n-k})\boldsymbol{p}_{k+1}\right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{2.1$_n$}$$

$$(n+1)\boldsymbol{p}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} N^*_{n-k}\nabla\varphi_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.2$_n$}$$

$$(n+1)\varphi_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(k+1)(n+1-k)(\boldsymbol{p}_{k+1}\cdot\boldsymbol{p}_{n+1-k}), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{2.3$_n$}$$

Здесь $M_n = \partial\boldsymbol{p}_n/\partial\boldsymbol{\lambda}$ — матрицы Якоби, аналогичные матрице M, а N_n — матрицы, получаемые при разложении в ряд по степеням t матрицы M^{-1} и определяемые уравнениями

$$N_0 = I, \quad N_n = -\sum_{k=0}^{n-1} M_{n-k}N_k, \; n = 1, 2, 3, \dots,$$

I — единичная матрица.

Система $(2.1)_n$–$(2.3)_n$ рекуррентна: если известны $\boldsymbol{p}_{k+1}, \varphi_k$ при $0 \le k \le n-1, n \ge 1$, то уравнение $(2.1)_n$ будет уравнением Пуассона относительно φ_n с известной правой частью, а $(2.3)_{n-1}$ определит известные значения φ_n на границе $\partial\omega$. После этого уравнение $(2.2)_n$ определяет $\boldsymbol{p}_{n+1}$.

Следовательно, для функции $v = \varphi_n(\boldsymbol{\lambda})$ в шаре ω имеем задачу Дирихле

$$\Delta v = \operatorname{div}\boldsymbol{W}, \quad \boldsymbol{W} \equiv \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\lambda}) = (W^1, W^2), \quad \boldsymbol{\lambda} \in \omega, \quad v|_{\partial\omega} = f(\lambda). \tag{2.6}$$

3. Шкала банаховых пространств

Проблема существования аналитического по t решения задачи (2.1)–(2.4) сводится к доказательству сходимости рядов (2.5). Возникающие на этом пути трудности, связанные с нелинейностью и нелокальностью задачи, заключаются в нетривиальности получения воспроизводимой априорной оценки решения задачи (2.6). Результат получается с помощью специального метода оценок, который опирается на понятие шкалы банаховых пространств аналитических функций [5, 10, 11, 15].

Каждой абсолютно интегрируемой функции $f(\lambda)$ $(-1 \le \lambda \le 1)$ поставим в соответствие разложение по полиномам Лежандра $P_n(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(\lambda), \quad f_k \equiv \{f(\lambda)\}_k = \int_{-1}^{1} f(\lambda)P_k(\lambda)\,d\lambda, \quad \int_{-1}^{1} P_k^2(\lambda)\,d\lambda = 1.$$

Пусть $\rho > 0$ — положительное число. *Пространством* $B_\rho(\partial\omega)$ назовем множество абсолютно интегрируемых функций $f(\lambda)$, для которых

$$\|f, \partial\omega\|_\rho = 3\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|f_n|e^{n\rho} < \infty. \tag{3.1}$$

Ясно, что $B_\rho(\partial\omega)$ — банахово пространство. Объединение $S^\partial = \bigcup\limits_{\rho>0} B_\rho(\partial\omega)$ образует шкалу банаховых пространств [5].

Лемма 1. *Норма* (3.1) *обладает следующими свойствами:*

$$\|fg, \partial\omega\|_\rho \le \|f, \partial\omega\|_\rho \|g, \partial\omega\|_\rho, \tag{3.2}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial\lambda} f, \partial\omega \right\|_\rho \le 2\frac{\partial}{\partial\rho}\|f, \partial\omega\|_\rho. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $f, g \in B_\rho(\partial\omega)$,

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(\lambda), \quad g(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k P_k(\lambda).$$

Найдем коэффициент Фурье произведения fg и обозначим

$$c_{nm\alpha} = \int_{-1}^{1} P_n(\lambda) P_m(\lambda) P_\alpha(\lambda)\, d\lambda.$$

Заметив, что $c_{nm\alpha} \neq 0$ только для $|m-n| \le \alpha \le m+n$, получим

$$\|fg, \partial\omega\|_\rho \le 3\sqrt{3} \sum_{n,m=0}^{\infty} (n+1)|f_n|(m+1)|g_n| E(n,m). \tag{3.4}$$

Покажем, что для любого $\rho \ge 0$

$$E(n,m) \equiv \sum_{\alpha=|m-n|}^{m+n} \frac{\alpha+1}{(m+1)(n+1)} |c_{nm\alpha}| e^{[\alpha-(m+n)]\rho} \le 3\sqrt{3}. \tag{3.5}$$

Для этого воспользуемся известным соотношением [24]

$$P_n(\lambda)P_m(\lambda) = 2^{-1/2} \sum_{\alpha=|m-n|}^{m+n} \frac{\sqrt{(2n+1)(2m+1)(2\alpha+1)}}{n+m+\alpha+1} R_{nm\alpha} P_\alpha(\lambda),$$

где

$$R_{nm\alpha} = \frac{A_{\frac{m-n+\alpha}{2}} A_{\frac{m+n-\alpha}{2}} A_{\frac{n-m+\alpha}{2}}}{A_{\frac{n+m+\alpha}{2}}}, \quad A_k = \frac{(2k-1)!!}{k!}.$$

Это дает

$$c_{nm\alpha} = 2^{-1/2} \frac{\sqrt{(2n+1)(2m+1)(2\alpha+1)}}{n+m+\alpha+1} R_{nm\alpha}.$$

Воспользовавшись неравенствами

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2s}} < \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} < \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2s}}, \quad s \ge 1,$$

следующими из равенств

$$\frac{1}{4}\prod_{m=2}^{s} \frac{(2m-1)^2}{(2m-2)2m} = s\left(\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}\right)^2 = \frac{3}{8}\frac{2s-1}{2s}\prod_{m=2}^{s-1}\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2},$$

а также оценкой

$$\sqrt{\frac{m+n+\alpha}{(m+n-\alpha)[\alpha^2-(m-n)^2]}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m+n+\alpha}{\sqrt{mn\alpha}}, \quad |m-n| < \alpha < m+n,$$

получим

$$R_{nm\alpha} \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{m+n+\alpha}{\sqrt{mn\alpha}}, \quad |m-n| \le \alpha \le m+n$$

(случаи $\alpha = |m-n|, m+n$ рассматриваются отдельно). Собирая вместе все полученные здесь оценки, придем к (3.5). Из (3.5) в силу (3.4) получаем (3.2).

Докажем (3.3). Пусть даны разложения

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\lambda), \quad f'(\lambda) = \frac{df}{d\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^* P_n(\lambda).$$

Дифференцируя первое из них и вычисляя коэффициент Фурье для производной

$$f'(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} P'_{n+1}(\lambda), \quad P'_0(\lambda) = 0,$$

приходим к соотношениям

$$|f_\alpha^*| = \left| \int_{-1}^{1} f'(\lambda) P_\alpha(\lambda)\, d\lambda \right| = \left| f_{\alpha+1} \int_{-1}^{1} P'_{\alpha+1}(\lambda) P_\alpha(\lambda)\, d\lambda \right| = 2|f_{\alpha+1} P_{\alpha+1}(1) P_\alpha(1)|$$
$$= |f_{\alpha+1}\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2\alpha+1}| \le 2(\alpha+1)|f_{\alpha+1}|.$$

Переходя к нормам, получаем (3.3). Лемма 1 доказана.

4. Априорная оценка

Рассмотрим множество функций $F(\sigma, \lambda)$, имеющих в $\overline{\omega}$ поточечно сходящиеся разложения

$$F(\boldsymbol{\lambda}) \equiv F(\sigma, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\sigma) P_n(\lambda), \quad \boldsymbol{\lambda} \equiv (\sigma, \lambda) \in \overline{\omega},$$

с коэффициентом Фурье $F_n(\sigma) \equiv \{F(\boldsymbol{\lambda})\}_n = \int\limits_{-1}^{1} F(\sigma, \lambda) P_n(\lambda)\, d\lambda$.

Пусть ρ — положительное число. Множество функций $F(\boldsymbol{\lambda})$, для которых

$$\|F, \overline{\omega}\|_\rho = 3\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \max_{0 \le \sigma \le 1} |F_n(\sigma)| e^{n\rho} < \infty, \tag{4.1}$$

обозначим через $B_\rho(\overline{\omega})$. Это банахово пространство; семейство $S = \bigcup\limits_{\rho > 0} B_\rho(\overline{\omega})$ образует шкалу банаховых пространств. Ясно, что $S|_{\partial\omega} = S^\partial$.

Из леммы 1 и определения (4.1) следует, что для любых F, G из $B_\rho(\overline{\omega})$ верно

$$\|FG, \overline{\omega}\|_\rho \le \|F, \overline{\omega}\|_\rho \|G, \overline{\omega}\|_\rho, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \lambda} F, \overline{\omega} \right\|_\rho \le 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \|F, \overline{\omega}\|_\rho.$$

Пусть $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — формальные ряды по возрастающим степеням параметра t. Предположим, что каждый из коэффициентов ряда $\psi_2(t)$ действителен, положителен и превосходит по величине соответствующий коэффициент ряда $\psi_1(t)$; тогда пишем $\psi_1(t) \ll \psi_2(t)$.

Для вектора $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{\lambda}$ построим формальные (мажорантные) нормы

$$\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{\lambda}, \overline{\omega}\|_\rho(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \|\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{\lambda}), \overline{\omega}\|_\rho t^n, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \overline{\omega}. \tag{4.2}$$

Здесь и далее норма вектора понимается как сумма норм его компонент.

Лемма 2. *Если* $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\lambda}$ *удовлетворяют системе* (2.1)–(2.3), *то*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\sigma}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\lambda}),\overline{\omega}\right\|_\rho(t)\ll 2\varkappa(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\lambda},t)\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\lambda},\overline{\omega}\|_\rho(t),\tag{4.3}$$

где $\varkappa(\boldsymbol{h},t)=\left[1-2\frac{\partial}{\partial\rho}\|\boldsymbol{h},\overline{\omega}\|_\rho(t)\right]^{-1}$.

Доказательство. Для получения оценки (4.3) воспользуемся уравнением неразрывности

$$r_\sigma p_\lambda - p_\sigma r_\lambda = 1\tag{4.4}$$

и законом сохранения вихря

$$r_\sigma r_{t\lambda}+p_\sigma p_{t\lambda}=r_\lambda r_{t\sigma}+p_\lambda p_{t\sigma}.\tag{4.5}$$

Здесь и ниже индексы σ,λ,t обозначают частные производные по соответствующим переменным. Подставляя (2.5) в (4.4) и (4.5), найдем

$$r_{n,\sigma}=-p_{n,\lambda}-\sum_{\nu=1}^{n-1}(r_{\nu,\sigma}p_{n-\nu,\lambda}-p_{\nu,\sigma}r_{n-\nu,\lambda}),\tag*{$(4.4)_n$}$$

$$p_{n,\sigma}=r_{n,\lambda}-\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\frac{n-2\nu}{n}\right)(r_{\nu,\sigma}r_{n-\nu,\lambda}+p_{\nu,\sigma}p_{n-\nu,\lambda}).\tag*{$(4.5)_n$}$$

Из соотношений $(4.4)_n$ и $(4.5)_n$ следует, что

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\sigma}\boldsymbol{p}_n,\overline{\omega}\right\|_\rho\le 2\frac{\partial}{\partial\rho}\|\boldsymbol{p}_n,\overline{\omega}\|_\rho+A_n,\tag*{$(4.6)_n$}$$

$$A_0=0,\quad A_n=2\sum_{\nu=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial}{\partial\sigma}\boldsymbol{p}_\nu,\overline{\omega}\right\|_\rho\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\|\boldsymbol{p}_{n-\nu},\overline{\omega}\|_\rho.\tag*{$(4.7)_n$}$$

Умножив обе части неравенства $(4.6)_n$ на t^n, просуммировав по n и положив $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nt^n$, получим

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\sigma}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\lambda}),\overline{\omega}\right\|_\rho(t)\ll 2\frac{\partial}{\partial\rho}\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\lambda},\overline{\omega}\|_\rho(t)+A.$$

С другой стороны, из $(4.4)_n$, $(4.7)_n$, $(4.6)_m$ при $0\le m\le n-1$ следует оценка

$$A\ll 2\frac{\partial}{\partial\rho}\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\lambda},\overline{\omega}\|_\rho(t)\cdot\frac{2\frac{\partial}{\partial\rho}\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\lambda},\overline{\omega}\|_\rho(t)}{1-2\frac{\partial}{\partial\rho}\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\lambda},\overline{\omega}\|_\rho(t)}.$$

Это соотношение вместе с предыдущей оценкой приводит к (4.3). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* v, $\boldsymbol{W}$, f *удовлетворяют соотношениям* (2.6). *Существуют положительное число* ρ_0 *и абсолютная постоянная* $c>0$ *такие, что для всех* $\rho<\rho_0$ *верно*

$$\frac{1}{c}\|\nabla v,\overline{\omega}\|_\rho(t)\ll\frac{\partial}{\partial\rho}\|f,\partial\omega\|_\rho(t)+\|\boldsymbol{V},\overline{\omega}\|_\rho(t),\quad \boldsymbol{V}=(W^1,(1-\lambda^2)W^2).\tag{4.8}$$

Доказательство. Решение задачи (2.6) ищем в виде

$$v(\boldsymbol{\lambda}) \equiv v(\sigma,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} v_k(\sigma)P_k(\lambda), \quad v_k(\sigma) \equiv \{v(\boldsymbol{\lambda})\}_k = \int_{-1}^{1} v(\sigma,\lambda)P_n(\lambda)\,d\lambda, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \overline{\omega}.$$

Подставляя $v(\sigma,\lambda)$ в (2.6), отделяя «угловую» часть оператора Лапласа и учитывая классическое уравнение Лежандра [24]

$$(1-\lambda^2)\frac{d^2P_k}{d\lambda^2} - 2\lambda\frac{dP_k}{d\lambda} + k(k+1) = 0, \quad k \geq 0,$$

для коэффициента Фурье $v_k \equiv v_k(\sigma)$ получаем краевую задачу на отрезке $[0,1]$:

$$\sigma^2\frac{d^2v_k}{d\sigma^2} + 2\sigma\frac{dv_k}{d\sigma} - k(k+1)v_k = D_k(\sigma), \quad |v_k(0)| < \infty, \quad v_k(1) = f_k, \quad k \geq 0. \tag{4.9}$$

Здесь f_k, $D_k(\sigma)$ — коэффициенты Фурье функций $f(\lambda)$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\lambda})$ соответственно:

$$f_k \equiv \{f(\lambda)\}_k, \quad D_k(\sigma) \equiv \{\operatorname{div}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\lambda})\}_k = \frac{\partial}{\partial\sigma}\big(\sigma^2W_k^1(\sigma)\big) + \left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}((1-\lambda^2)W^2(\sigma,\lambda))\right\}_k.$$

Соответствующее (4.9) однородное линейное дифференциальное уравнение — это уравнение Эйлера с общим решением $v_k(\sigma) = c_1\sigma^k + c_2\sigma^{-(k+1)}$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения (4.9), для чего воспользуемся функцией Грина [23] этой задачи. Пусть параметр ξ из $[0,1]$ зафиксирован.

Принимая во внимание условие конечности решения при $\sigma = 0$, мы должны в промежутке $0 \leq \sigma \leq \xi$ взять для функции Грина выражение $g_1(\sigma,\xi) = c_1(\xi)\sigma^k$, а в промежутке $\xi \leq \sigma \leq 1$ составить такую линейную комбинацию указанных выше решений, которая обращается в нуль при $\sigma = 1$, т. е. в этом промежутке мы должны взять для функции Грина выражение вида $g_2(\sigma,\xi) = c_2(\xi)(\sigma^k - \sigma^{-(k+1)})$. Постоянные $c_1 \equiv c_1(\xi)$ и $c_2 \equiv c_2(\xi)$ будут определяться из условий

$$g_1(\xi,\xi) = g_2(\xi,\xi), \quad \frac{dg_1}{d\sigma}(\xi,\xi) - \frac{dg_2}{d\sigma}(\xi,\xi) = 1.$$

Решая эту систему линейных уравнений, получим

$$c_1 = -\frac{\xi^2}{2k+1}\cdot(\xi^k - \xi^{-(k+1)}), \quad c_2 = -\frac{\xi^2}{2k+1}\cdot\xi^k.$$

Следовательно, функция Грина краевой задачи (4.9) имеет вид

$$G(\sigma,\xi) = -\frac{\xi^2}{2k+1}\cdot\begin{cases} (\xi^k - \xi^{-(k+1)})\cdot\sigma^k & \text{при } 0 \leq \sigma \leq \xi, \\ (\sigma^k - \sigma^{-(k+1)})\cdot\xi^k & \text{при } \xi \leq \sigma \leq 1. \end{cases}$$

В итоге решение краевой задачи (4.9) примет вид

$$v_k(\xi) = f_k\xi^k + \int_0^1 G(\sigma,\xi)D_k(\sigma)\,d\sigma \equiv f_k\xi^k + \int_0^1 G(\sigma,\xi)\big(D_k^{(\sigma)}(\sigma) + D_k^{(\lambda)}(\sigma)\big)\,d\sigma, \tag{4.10}$$

где

$$D_k^{(\sigma)}(\sigma) = \frac{\partial}{\partial\sigma}\big(\sigma^2W_k^1(\sigma)\big), \quad D_k^{(\lambda)}(\sigma) = \left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}((1-\lambda^2)W^2(\sigma,\lambda))\right\}_k.$$

Разобьем промежуток $[0,1]$ в (4.10) на две части:

$$v_k(\xi) = f_k\xi^k + \int\limits_0^\xi G(\sigma,\xi)D_k(\sigma)\,d\sigma + \int\limits_\xi^1 G(\sigma,\xi)D_k(\sigma)\,d\sigma.$$

Дифференцируя полученное равенство по ξ и пользуясь непрерывностью функции Грина, получаем

$$\frac{dv_k}{d\xi} = kf_k\xi^{k-1} + \int\limits_0^1 G'_\xi(\sigma,\xi)D_k(\sigma)\,d\sigma. \tag{4.11}$$

Применяя (4.10) для производной решения, приходим к представлению

$$\frac{dv_k}{d\xi} = kf_k\xi^{k-1} - \frac{1}{2k+1}\frac{d}{d\xi}(\xi^{k+2} - \xi^{-(k-1)})\int\limits_0^\xi \sigma^k D_k(\sigma)\,d\sigma - \frac{1}{2k+1}\frac{d}{d\xi}\xi^{k+2}\int\limits_0^\xi (\sigma^k - \sigma^{(k+1)})D_k(\sigma)\,d\sigma. \tag{4.12}$$

Оценим интегралы в правой части (4.12).

Для оценки интеграла в (4.12) с функцией $D_k^{(\sigma)}(\sigma) = \frac{\partial}{\partial\sigma}\big(\sigma^2 W_k^1(\sigma)\big)$ воспользуемся следующими соотношениями:

$$\int\limits_0^\xi \sigma^k \frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma^2 h(\sigma))\,d\sigma = h(\xi)\xi^{k+2} - k\int\limits_0^\xi h(\sigma)\sigma^{k+1}\,d\sigma,$$

$$\int\limits_\xi^1 \sigma^{-(k+1)} \frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma^2 h(\sigma))\,d\sigma = h(1) - h(\xi)\xi^{-(k-1)} + (k+1)\int\limits_\xi^1 h(\sigma)\sigma^{-k}\,d\sigma,$$

$$\int\limits_\xi^1 \sigma^k \frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma^2 h(\sigma))\,d\sigma = h(1) - h(\xi)\xi^{k+2} - k\int\limits_\xi^1 h(\sigma)\sigma^{k+1}\,d\sigma.$$

Положив здесь $h(\sigma) = W_k^1(\sigma)$, придем к первой требуемой оценке

$$\max_{0\le\sigma\le1}\left|\int\limits_0^1 G'_\xi(\sigma,\xi)D_k^{(\sigma)}(\sigma)\,d\sigma\right| \le 12\max_{0\le\sigma\le1}\big|W_k^1(\sigma)\big|.$$

Для оценки интеграла в (4.12) с функцией $D_k^{(\lambda)}(\sigma) = \big\{\frac{\partial}{\partial\lambda}((1-\lambda^2)W^2(\sigma,\lambda))\big\}_k$ поступим следующим образом. Заметим, что справедливо равенство

$$\int\limits_0^1 G'_\xi(\sigma,\xi)D_k^{(\lambda)}(\sigma)\,d\sigma = -\frac{1}{2k+1}\frac{d}{d\xi}(\xi^{k+2} - \xi^{-(k-1)})\int\limits_0^\xi \sigma^k D_k^{(\lambda)}(\sigma)\,d\sigma - \frac{1}{2k+1}\frac{d}{d\xi}\xi^{k+2}\int\limits_0^\xi (\sigma^k - \sigma^{(k+1)})D_k^{(\lambda)}(\sigma)\,d\sigma.$$

Обозначив $m = \max\limits_{0\le\sigma\le 1} |\{(1-\lambda^2)W^2(\sigma,\lambda)\}_k|$ далее получим

$$\max_{0\le\sigma\le 1}\left|\int\limits_0^1 G'_\xi(\sigma,\xi)D_k^{(\lambda)}(\sigma)\,d\sigma\right| \le m\left\{\frac{k+2}{2k+1}\xi^{k+1}\int\limits_0^\xi \sigma^k\,d\sigma\right.$$

$$\left.+\frac{k+2}{2k+1}\xi^{-(k-2)}\int\limits_0^\xi \sigma^k\,d\sigma+\frac{k+2}{2k+1}\xi^{k+1}\int\limits_\xi^1 \sigma^k\,d\sigma+\frac{k+2}{2k+1}\xi^{k+1}\int\limits_\xi^1 \sigma^{-(k+1)}\,d\sigma\right\}_k$$

$$\le \frac{6}{k+1}\max_{0\le\sigma\le 1}|\{(1-\lambda^2)W^2(\sigma,\lambda)\}_k|.$$

Собирая вместе все полученные здесь оценки и переходя к нормам (3.1), (4.1) с выбором в неравенствах наибольшей из констант $c \ge 12$, имеем требуемую оценку (4.8). Следует учесть также, что оценка производной $\partial v(\boldsymbol{\lambda})/\partial\lambda$ обеспечивается леммой 1. Лемма 3 доказана.

5. Основной результат

Теорема. *Существуют число ρ_0 и убывающая функция $\theta(\rho)$, $\theta(\rho_0) = 0$, такие, что решение $\nabla\varphi(t,\boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\lambda})$ задачи (2.1)–(2.4) принадлежит $B_\rho(\overline{\omega})$ при $\rho < \rho_0$ для значений t, удовлетворяющих неравенству $t < \theta(\rho)$. Решение единственно в шкале S.*

Доказательство. Рассмотрим мажоранту функции $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\lambda}$ (см. (4.2)):

$$\nu(t,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty}\|\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{\lambda}),\overline{\omega}\|_\rho t^n. \tag{5.1}$$

Из лемм 1 и 2 следует, что аналогичная мажоранта функции $\boldsymbol{W} = (M^*-M^{-1})\boldsymbol{p}_t$ имеет вид

$$W(t,\rho) \ll 4d(\rho)(1+\varkappa)\nu_\rho\nu_t, \quad d(\rho) = 2\sqrt{3}(1+3e^{2\rho}). \tag{5.2}$$

Здесь и ниже использованы обозначения $\nu_\rho = \partial\nu/\partial\rho$, $\nu_t = \partial\nu/\partial t$.

Для мажоранты $\mu(t,\rho)$ функции φ из (2.3) тем же путем находим оценку

$$\mu_t \ll \frac{1}{2}\nu_t^2 + a(\rho), \quad a(\rho) = \|\varphi_0(\lambda),\partial\omega\|_\rho. \tag{5.3}$$

Если взять аналогичную (5.1) мажоранту $\Phi(t,\rho)$ функции $\nabla\varphi(t,\boldsymbol{\lambda})$, то из уравнения (2.2) получим

$$\nu_t \ll 2(1+\varkappa)\nu_\rho\Phi + b(\rho), \quad b(\rho) = \frac{3\sqrt{6}}{2}(1+\sqrt{3}e^\rho). \tag{5.4}$$

Из леммы 3 заключаем, что

$$\frac{1}{c}\Phi \ll \mu_\rho + W. \tag{5.5}$$

Отсюда следует вторая оценка:

$$\nu_t \ll \frac{2c(1+\varkappa)\nu_\rho\mu_\rho + b(\rho)}{1-8cd(1+\varkappa)^2\nu_\rho^2}. \tag{5.6}$$

Окончательно, заменив в (5.3) и (5.6) знак неравенства знаком равенства (отчего мажоранты могут только возрасти) и присоединив начальные условия, получим следующую мажорантную систему уравнений для (2.1)–(2.4):

$$\nu_t = K(\rho,\nu_\rho,\mu_\rho), \quad \nu(0,\rho) = 0,$$

$$\mu_t = \frac{1}{2}K^2(\rho,\nu_\rho,\mu_\rho) + a(\rho), \quad \mu(0,\rho) = 0,$$

где

$$K(\rho,\nu_\rho,\mu_\rho) = \frac{2c(1+\varkappa)\nu_\rho\mu_\rho + b(\rho)}{1 - 8cd(1+\varkappa)^2\nu_\rho^2}. \tag{5.7}$$

Знаменатель в окрестности $t = 0$ в (5.7) положителен, так как $\nu_\rho(0,\rho) = 0$. Доказательство существования аналитического решения задачи (2.1)–(2.4) завершается применением теоремы Коши — Ковалевской. Единственность решения следует из однозначности определения коэффициентов φ_n и $\boldsymbol{p}_n$ на каждом шаге рекуррентной системы $(2.1)_n$–$(2.3)_n$. Теорема доказана.

Нестационарные задачи идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью до сих пор остаются малоизученными, хотя уже давно служат предметом интенсивных исследований. Побудительным мотивом к проведенному выше исследованию послужила известная гидродинамическая проблема «разрушения» свободных границ в идеальной несжимаемой жидкости. Проблема все еще находится вне компетенции современных аналитических и численных методов. Интерес к ней сформировался у автора под влиянием академика Л. В. Овсянникова. В своей точной математической постановке эта проблема примыкает к проблеме продолжения «далеко» по времени гладких решений трехмерных уравнений Эйлера, которая до сих пор является фундаментальной и глубоко интригующей математической задачей [8, 18]. Наибольший интерес вызывает эффект возникновения за конечное время особенностей у комплексных (по времени t) решений этих уравнений.

Полученный результат позволяет мотивированно формулировать конструктивные гипотезы о возможном характере зарождения сингулярностей решений в задаче о неустановившемся движении конечного осесимметричного объема идеальной несжимаемой жидкости. Тем самым обозначается реальная перспектива для получения строгих результатов посредством организации на компьютере доказательных вычислений [20, 21].

Обратим внимание, что в недавно появившейся интересной работе [25] указано точное решение плоской нестационарной задачи о движении идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, демонстрирующее в явном виде появление особых точек решения задачи и, что самое интересное, их выход с ростом времени $t \geq 0$ на свободную поверхность.

Автор благодарен профессору В. Л. Васкевичу, тщательно просмотревшему статью и сделавшему ряд ценных уточнений и замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А.* К теории длинных волн // Докл. АН СССР. 1943. Т. 41, № 7. С. 289–291.
2. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде: математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
3. *Овсянников Л. В.* К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды. Новосибирск. 1973. Вып. 15. С. 104–125.
4. *Налимов В. И.* Задача Коши — Пуассона // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1974. Вып. 18. С. 104–210.
5. *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн* / Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Новосибирск: Наука, 1985.
6. *Плотников П. И.* Некорректность нелинейной задачи о развитии неустойчивости Релея — Тейлора // Зап. науч. семинаров/ Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд-ние. 1980. Т. 96. С. 240–246.

7. *Zakharov V. E.* Are equations of deep fluid with free surface integrable? // Russian–French Workshop "Mathematical Hydrodynamics" (Novosibirsk, Aug. 22–27, 2016): Abstracts. 2016. P. 55. (http://conf.nsc.ru/mathhydro/en).

8. *Крейг В., Вейн К. Е.* Математические аспекты поверхностных волн на воде // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 3. С. 95–116.

9. *Налимов В. И.* Дифференциальные свойства оператора Дирихле — Неймана // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 355–388.

10. *Овсянников Л. В.* Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 4. С. 819–822.

11. *Овсянников Л. В.* Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука, 1967. С. 3–75.

12. *Налимов В. И.* Задача Коши — Пуассона в классах Жеврея // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1969. Вып. 1. С. 258–263.

13. *Овсянников Л. В.* Плоская задача о неустановившемся движении жидкости со свободными границами // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1971. Вып. 8. С. 22–26.

14. *Белых В. Н.* Теорема существования и единственности решения задачи о сферическом пузыре // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1972. Вып. 12. С. 63–76.

15. *Овсянников Л. В.* Задача Коши в шкале банаховых пространств. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 281. С. 7–15.

16. *Tréves F.* Ovsyannikov theorem and hyperdifferential operators. Rio de Janeiro: Inst. Mat. Pura Apl., 1968. (Notas Mat.; V. 46).

17. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977.

18. *Бардос К., Тити Э. С.* Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 3. С. 3–46.

19. *Dyachenko A. I., Zakharov V. E.* On the formation of freak waves on the surface of deep water // Письма в ЖЭТФ. 2008. V. 88, N 5. P. 356–359.

20. *Бабенко К. И., Петрович В. Ю.* О доказательных вычислениях на ЭВМ. М., 1983. 28 с. (Препринт/Ин-т прикл. математики; № 133).

21. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. (2-е изд. М.; Ижевск: РХД, 2002).

22. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика 6-е изд., испр., доп. М.: Физматлит, 1963. Ч. 1.

23. *Фадеев С. И., Когай В. В.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2012.

24. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963. Т. 2.

25. *Карабут Е. А., Журавлева Е. Н.* Размножение решений в плоской задаче о движении жидкости со свободной границей // Докл. АН. 2016. Т. 469, № 3. С. 295–298.

Статья поступила 24 ноября 2016 г.

Белых Владимир Никитич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
belykh@math.nsc.ru