Сибирский математический журнал
Июль—август, 2017. Том 58, № 4

УДК 519.172.2

НИЗКИЕ И ЛЕГКИЕ 5–ЗВЕЗДЫ В 3–МНОГОГРАННИКАХ С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ 5 ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПРЕТОВ НА СТЕПЕНИ СТАРШИХ ВЕРШИН

О. В. Бородин, А. О. Иванова, Д. В. Никифоров

Аннотация. В 1940 г. в попытках решить проблему четырех красок Лебег дал приближенное описание окрестностей 5-вершин в классе $\mathbf{P}_5$ 3-многогранников с минимальной степенью 5. Это описание зависит от 32 главных параметров. Пока получено очень мало точных верхних оценок этих параметров даже для ограниченных подклассов в $\mathbf{P}_5$.

Для данного 3-многогранника P через $h(P)$ обозначим минимум максимальных степеней (высоту) вершин окрестности 5-вершин (младших 5-звезд) в P.

В 1996 г. Йендроль и Мадараш показали, что если многогранник P в $\mathbf{P}_5$ допускает 5-вершины, смежные с четырьмя 5-вершинами (называемыми *младшими* $(5,5,5,5,\infty)$-*звездами*), то $h(P)$ может быть неограниченно большой.

Для каждого P^* в $\mathbf{P}_5$ без вершин степеней от 6 до 8 и без младших $(5,5,5,5,\infty)$-звезд из теоремы Лебега следует, что $h(P^*) \le 17$.

Доказано, в частности, что каждый такой многогранник P^* удовлетворяет неравенству $h(P^*) \le 12$, где оценка 12 точна. Этот результат неулучшаем в том смысле, что если одна из степеней в $\{6,7,8\}$ разрешается, но при этом другие две запрещены, то высота младших 5-звезд в $\mathbf{P}_5$, при отсутствии младших $(5,5,5,5,\infty)$-звезд, может достигать 15, 17 или 14 соответственно.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.405

Ключевые слова: плоская карта, плоский граф, 3-многогранник, структурные свойства, 5-звезда, высота, вес.

1. Введение

Степень вершины или грани x конечного выпуклого 3-мерного многогранника (называемого 3-*многогранником*) обозначим через $d(x)$. k-*Вершиной* называют вершину v с $d(v) = k$, k^+-*вершиной* (k^--*вершиной*) — вершину степени не менее k (не более k). Аналогичные понятия используются для граней. 3-Многогранник с минимальной степенью δ обозначим через P_δ. *Вес* подграфа S некоторого 3-многогранника есть сумма степеней вершин подграфа S в этом 3-многограннике, *высота* подграфа S некоторого 3-многогранника — максимальная степень вершин подграфа S в 3-многограннике. k-Звезда, звезда с k лучами, $S_k(v)$, называется *младшей*, если ее центр v имеет степень не более 5. В частности, окрестности 5-вершин являются младшими 5-звездами, и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 16–11–10054).

наоборот. Все звезды, рассматриваемые в этой статье, младшие. Через $w(S_k)$ и $h(S_k)$ обозначим в данном 3-многограннике минимальные вес и высоту младших k-звезд соответственно.

В 1904 г. Вернике [1] доказал, что каждый P_5 содержит 5-вершину, смежную с 6^--вершиной. Этот результат был усилен Франклином [2] в 1922 г., который доказал существование 5-вершины с двумя 6^--соседями.

В 1940 г. в попытках решить проблему четырех красок Лебег [3] дал приближенное описание окрестностей 5-вершин в $\mathbf{P}_5$. В частности, это описание включает результаты из [1, 2] и показывает, что существует 5-вершина с тремя 7^--соседями.

Для класса $\mathbf{P}_5$ оценки $w(S_1) \le 11$ (Вернике [1]) и $w(S_2) \le 17$ (Франклин [2]) точны. Как доказано Лебегом [3], $w(S_3) \le 24$, что было улучшено в 1996 г. Йендролем и Мадарашем [4] до точной оценки $w(S_3) \le 23$. Кроме того, в [4] дано точное описание младших 3-звезд в $\mathbf{P}_5$. Лебег [3] доказал оценку $w(S_4) \le 31$, которая была усилена О. В. Бородиным и Вудалом [5] до точной оценки $w(S_4) \le 30$. Заметим, что оценка $w(S_3) \le 23$ легко влечет оценку $w(S_2) \le 17$ и сразу следует из $w(S_4) \le 30$ (в обоих случаях достаточно удалить вершину максимальной степени из младшей звезды минимального веса). Недавно О. В. Бородин и А. О. Иванова [6] получили точное описание 4-звезд в $\mathbf{P}_5$.

Для произвольных 3-многогранников, т. е. для $\mathbf{P}_3$, известны следующие результаты о $(d-2)$-звездах при d-вершинах, $d \le 5$. Ван ден Хойвел и Макгиннес [7] доказали (в частности), что либо $w(S_1(v)) \le 14$ с $d(v) = 3$, либо $w(S_2(v)) \le 22$ с $d(v) = 4$, либо $w(S_3(v)) \le 29$ с $d(v) = 5$. Балог и др. [8] доказали, что существует 5^--вершина, смежная с не более чем двумя 11^+-вершинами. Харант и Йендроль [9] усилили эти результаты, доказав (в частности), что либо $w(S_1(v)) \le 13$ с $d(v) = 3$, либо $w(S_2(v)) \le 19$ с $d(v) = 4$, либо $w(S_3(v)) \le 23$ с $d(v) = 5$. Недавно О. В. Бородин и А. О. Иванова [10] получили точное описание $(d-2)$-звезд в $\mathbf{P}_3$.

Для $\mathbf{P}_3$ проблема описания $(d-1)$-звезд при d-вершинах, $d \le 5$, называемых *предполными звездами*, представляется сложной. Как следует из двойной n-пирамиды, минимальный вес $w(S_{d-1})$ предполных звезд в $\mathbf{P}_4$ может быть произвольно большим. Даже когда $w(S_{d-1})$ ограничен соответствующими условиями, точные верхние оценки на него неизвестны. О. В. Бородин и др. [11, 12] доказали (в частности), что если плоский граф с $\delta \ge 3$ не содержит ребер, соединяющих две 4^--вершины, то найдется звезда $S_{d-1}(v)$ с $w(S_{d-1}(v)) \le 38 + d(v)$, где $d(v) \le 5$ (см. [12, теорема 2.A]). Йендроль и Мадараш [13] доказали, что если вес $w(S_1)$ каждого ребра в некотором P_3 не менее 9, то найдется предполная звезда высоты не более 20, причем оценка 20 неулучшаема.

Более общая проблема описания d-звезд при d-вершинах, $d \le 5$, называемых *полными звездами*, на данный момент кажется неприступной для произвольных 3-многогранников и трудной даже для $\mathbf{P}_5$.

Лебеговское описание [3] 5-звезд в $\mathbf{P}_5$ зависит от 32 главных параметров. Пока получено очень мало точных верхних оценок этих параметров даже для ограниченных подклассов в $\mathbf{P}_5$.

В [4] показано, что если P_5 содержит 5-вершину, смежную с четырьмя 5-вершинами и называемую *младшей* $(5, 5, 5, 5, \infty)$*-звездой*, то $h(P_5)$ может быть неограниченно велика.

Для каждого P_5, не содержащего ни 6-вершин, ни младших $(5, 5, 5, 5, \infty)$-

звезд, из теоремы Лебега следует, что $h(P_5) \leq 41$. Недавно эта оценка была понижена до $h(P_5) \leq 28$ О. В. Бородиным, А. О. Ивановой и Йенсеном [14], а затем — до $h(P_5) \leq 23$ О. В. Бородиным и А. О. Ивановой [15] и, наконец, — до точной оценки $h(P_5) \leq 17$ авторами в [16].

Для каждого P_5 из $\mathbf{P}_5$, не содержащего ни младших $(5,5,5,5,\infty)$-звезд, ни вершин степеней от 6 до 9, лебеговские оценки $h(P_5) \leq 14$ и $w(P_5) \leq 44$ были недавно улучшены О. В. Бородиным и А. О. Ивановой в [17] до точных оценок $h(P_5) \leq 12$ и $w(P_5) \leq 42$.

Для каждого P_5 из $\mathbf{P}_5$, не содержащего ни младших $(5,5,5,5,\infty)$-звезд, ни вершин степеней от 6 до 8, из теоремы Лебега следует, что $h(P_5) \leq 17$ и $w(P_5) \leq 46$.

Целью данной статьи является доказательство следующего факта, который улучшает вышеупомянутые результаты.

Теорема 1. *Каждый* 3*-многогранник с минимальной степенью* 5*, не содержащий ни вершины степеней от* 6 *до* 8*, ни* 5*-вершины, смежные с четырьмя* 5*-вершинами, содержит младшую* 5*-звезду* S_5 *такую, что* $h(S_5) \leq 12$ *и* $w(S_5) \leq 42$*, причем обе оценки неулучшаемы.*

Этот результат является точным также в том смысле, что если вершины одной из степеней в $\{6,7,8\}$ разрешены, а другие две при этом запрещены, то максимальная высота младших 5-звезд в $\mathbf{P}_5$ при отсутствии младших $(5,5,5,5,\infty)$-звезд может достигать 15, 17 или 14 соответственно (первые две оценки см. в [16, 18], а третья конструкция уже фольклор).

2. Доказательство теоремы 1

2.1. Точность оценок 12 и 42. Возьмем $(5,6,6)$-архимедово тело, т. е. кубический 3-многогранник, каждая вершина которого инцидентна 5-грани и двум 6-граням, и заменим все его вершины маленькими 3-гранями, а затем вставим новую вершину в каждую 10^+-грань.

Полученный в результате 3-многогранник имеет $\delta = 5$, а каждая его 5-вершина имеет 12^+-соседа и отличного от него 10^+-соседа, что и требовалось.

2.2. Перераспределение зарядов. Предположим, что 3-многогранник P'_5 является контрпримером к главному утверждению теоремы 1. Таким образом, каждая 5-вершина в P'_5 имеет не более трех 5-соседей и либо смежна с 13^+-вершиной, либо имеет вес не менее 43.

Пусть P_5 — контрпример с наибольшим числом ребер на том же множестве вершин, что и P'_5.

Замечание 1. В P_5 нет 4^+-грани с двумя несоседними 9^+-вершинами вдоль границы, так как в противном случае добавление диагонали между такими вершинами дало бы контрпример с большим, чем в P_5, числом ребер.

Пусть V, E и F — множества вершин, ребер и граней графа P_5 соответственно. Из формулы Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ следует, что

$$\sum_{v \in V}(d(v) - 6) + \sum_{f \in F}(2d(f) - 6) = -12. \quad (1)$$

Зададим *начальный заряд* формулами $\mu(v) = d(v) - 6$ для каждого $v \in V$ и $\mu(f) = 2d(f) - 6$ для каждой $f \in F$ так, что только 5-вершины имеют отрицательный заряд. Используя свойства контрпримера P_5 к теореме 1, локально перераспределим заряды, при этом сохраняя их сумму, так, что финальный заряд $\mu'(x)$ будет неотрицательным для всех $x \in V \cup F$. Это будет противоречить тому факту, что сумма финальных зарядов равна -12 согласно (1).

Финальный заряд для всех $x \in V \cup F$ определяется по правилам R1–R7 (рис. 1).

Для вершины v через $v_1, \dots, v_{d(v)}$ обозначим смежные с v вершины в фиксированном циклическом порядке.

Вершина называется *симплициальной*, если она полностью окружена 3-гранями, 5-вершина v — *сильной*, если $d(v_1) = d(v_2) = 5$, $d(v_3) \geq 9$, $d(v_4) \geq 9$, $d(v_5) \geq 9$, и существует 3-грань vv_1v_2. Заметим, что v также инцидентна 3-граням v_3vv_4 и v_4vv_5 согласно замечанию 1. Не исключено, что сильная вершина симплициальна. Симплициальная 5-вершина v такая, что $d(v_1) = d(v_2) = d(v_4) = 5$, $9 \leq d(v_3) \leq 10$ и $d(v_5) \geq 13$, называется *бедной*, а v_1 — *парной* к v. Заметим, что бедные и парные соседи каждой 13^+-вершины взаимно однозначно соответствуют друг другу.

R1. 4^+-Грань $f = v_1 \dots v_{d(f)}$ каждой инцидентной 5-вершине v_2 дает

(a) $\frac{1}{2}$, если $d(v_1) = d(v_3) = 5$,

или

(b) $\frac{3}{4}$, если $d(v_1) \geq 9$ и $d(v_3) = 5$.

R2. 5-Вершина v с $d(v_1) \geq 9$ получает следующий заряд от своего 9^+-соседа v_2:

(a) если $d(v_3) = 5$, то $\frac{1}{2}$ в случае, когда $d(v_2) \leq 12$, и $\frac{7}{12}$ в противном случае,

или

(b) $\frac{1}{2}$, если $d(v_3) \geq 9$.

R3. Несимплициальная 5-вершина v с $d(v_1) = d(v_3) = d(v_4) = 5$ получает $\frac{1}{4}$ от каждого из своих 9^+-соседей v_2 и v_5.

R4. Сильная 5-вершина дает $\frac{1}{6}$ каждому из двух своих 5-соседей.

R5. Симплициальная 5-вершина v с $d(v_1) = d(v_2) = d(v_4) = 5$ от v_5 получает

(a) $\frac{1}{3}$, если $9 \leq d(v_5) \leq 10$,

(b) $\frac{1}{2}$, если $11 \leq d(v_5) \leq 12$.

R6. Если симплициальная вершина v имеет $d(v_1) = d(v_2) = 5$ и $d(v_5) \geq 13$, то v_5 дает $\frac{1}{2}$ вершине v, за следующими двумя исключениями:

(ex1) если $9 \leq d(v_3) \leq 10$ (т. е. v бедная) и v_2 не является сильной, то v_5 дает $\frac{7}{12}$ вершине v;

(ex2) если $d(v_3) \geq 13$, v_2 не сильная, а v_1 бедная (т. е. v парная к v_1), то v_5 также дает $\frac{7}{12}$ вершине v.

R7. Каждая бедная 5-вершина v получает $\frac{1}{12}$ от своей парной вершины v_1, если v_2 не является сильной.

2.3. Проверка неравенства $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$. Если f является 4^+-гранью, то передачу заряда $\frac{3}{4}$ по правилу R1b можно интерпретировать как передачу заряда $\frac{1}{2}$ на 5-вершину и заряда $\frac{1}{4}$ соседней 9^+-вершине вдоль границы $\partial(f)$ грани f. В результате каждая вершина в $\partial(f)$ получает не более $\frac{1}{2}$ от f, откуда имеем

$$\mu'(f) \geq 2d(f) - 6 - d(f) \times \frac{1}{2} = \frac{3(d(f) - 4)}{2} \geq 0.$$

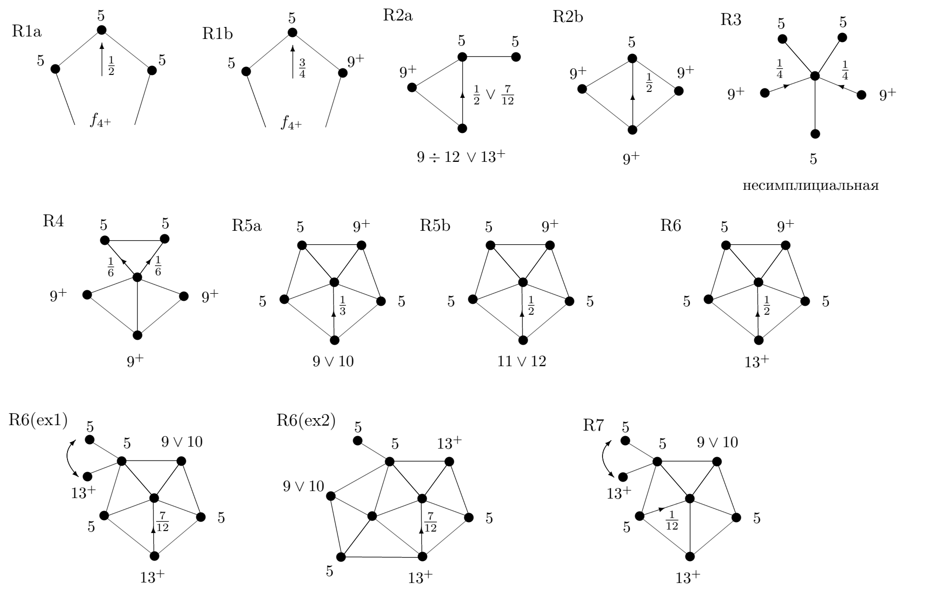

Рис. 1. Правила перераспределения зарядов

Далее предположим, что $v \in V$.

Случай 1. $d(v) = 5$. Если v смежна с не менее чем четырьмя 9^+-вершинами, то $\mu'(v) \geq 5 - 6 + 4 \times \frac{1}{2} \geq 0$ по R2a,b.

Предположим, что v имеет в точности три 9^+-соседа. Если они являются соседними в окружении вершины v, то v получает не менее $3 \times \frac{1}{2}$ от них по R2a,b и может давать $2 \times \frac{1}{6}$ двум 5-соседям по R4 при условии, что v сильная; таким образом, $\mu'(v) > 0$. Если $d(v_1) = d(v_3) = 5$, то v получает не менее $2 \times \frac{1}{2}$ от v_4 и v_5 по R2a и не дает ничего вершинам v_1 и v_3 по R4 и R7, откуда следует $\mu'(v) \geq 0$.

Далее достаточно предположить, что v имеет в точности двух 9^+-соседей. Сначала допустим, что $d(v_1) \geq 9$ и $d(v_2) \geq 9$. Если $d(v_1) \leq 12$, то v не является парной к v_5, следовательно, v просто получает $\frac{1}{2}$ от v_1 по R2a. Если $d(v_1) \geq 13$, то v_1 дает $\frac{7}{12}$ вершине v по R2a и v дает вершине v_5 либо $\frac{1}{12}$ по R7, если v парная к v_5, либо ничего в противном случае. В обоих случаях v_1 приносит вершине v суммарно не менее $\frac{1}{2} = \frac{7}{12} - \frac{1}{12}$. То же верно для v_2, следовательно, $\mu'(v) \geq -1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

Теперь предположим, что $d(v_1) \geq 9$ и $d(v_3) \geq 9$. Если v не является симплициальной, то v получает $2 \times \frac{1}{4}$ от v_1 и v_3 по R3 и не менее $\frac{1}{2}$ от инцидентной 4^+-грани по R1. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда v дает $\frac{1}{12}$ не менее чем одной из вершин v_4 и v_5 по R7, что может иметь место, только если грань $f = \ldots v_4 v v_5$ является треугольником. Однако тогда v в действительности получает $\frac{3}{4}$ по R1b не менее одного раза, откуда имеем $\mu'(v) \geq -1 + \frac{3}{4} + 2 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{12} > 0$.

Наконец, пусть v симплициальная (и по-прежнему $d(v_1) \geq 9$ и $d(v_3) \geq 9$); это ключевой момент в нашем доказательстве.

Если v дает $\frac{1}{12}$ вершине v_5 по R7, т. е. v и v_5 — парные соседи вершины v_1, то $d(v_1) \geq 13$, v_5 бедная, а v_4 не является сильной. Последнее влечет, что v_4 имеет

5-соседа, отличного от v и v_5. Отсюда, в свою очередь, следует, что $d(v_3) \geq 13$, поскольку иначе имели бы $h(S_5(v_4)) \leq 12$ и $w(S_5(v_4)) \leq 42$; противоречие.

Таким образом, v получает $\frac{7}{12}$ от v_1 по R6ex2, следовательно, v_1 приносит в целом $\frac{7}{12} - \frac{1}{12}$ вершине v. С учетом симметрии это же верно для v_3: независимо от того, парная она к v_4 или нет, она приносит $\frac{1}{2}$ либо по R6, либо по R6ex2 в сочетании с R7.

Отсюда получаем $\mu'(v) = -1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$ при условии, что v отдает $\frac{1}{12}$ не менее раза по R7; поэтому далее можем считать, что v не дает заряд $\frac{1}{12}$ по R7.

Известно, что каждый 11^+-сосед дает v не менее $\frac{1}{2}$ по R5b и R6, поэтому достаточно предположить, что $d(v_1) \leq 10$. Следовательно, $d(v_3) \geq 13$, поскольку $w(S_5(v)) \geq 43$ по предположению.

Если v_5 сильная, то v получает $\frac{1}{6}$ от v_5 по R4, $\frac{1}{3}$ от v_1 по R5a, $\frac{1}{2}$ от v_3 по R6 и имеем $\mu'(v) = 0$. В противном случае v получает $\frac{1}{12}$ от v_4 по R7, $\frac{1}{3}$ от v_1 и $\frac{7}{12}$ от v_3 по R6ex1, что снова дает требуемое $\mu'(v) = 0$.

Случай 2. $9 \leq d(v) \leq 10$. Можно усреднить передачи вершины v ее 5-соседям, соответствующие правилу R2a,b, следующим образом. Вместо передачи заряда $\frac{1}{2}$ своему 5-соседу v_2 по R2b наша v дает $\frac{1}{6}$ каждой из вершин v_1, v_2 и v_3. Если $d(v_1) = d(v_2) = 5$ и $d(v_3) \geq 9$, что имеет место в ситуации R2a, то v вместо этого дает $\frac{1}{3}$ вершине v_2 и $\frac{1}{6}$ — v_3. В результате каждый сосед получает не более $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$ от v, откуда $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - \frac{d(v)}{3} = \frac{2(d(v)-9)}{3} \geq 0$, что и требовалось.

Случай 3. $11 \leq d(v) \leq 12$. Заметим, что v дает каждому соседу не более $\frac{1}{2}$ по R2 и R5b, отсюда $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - \frac{d(v)}{2} = \frac{d(v)-12}{2}$, что доказывает случай $d(v) = 12$.

Поэтому пусть далее $d(v) = 11$. Если v имеет 9^+-соседа, то $\mu'(v) \geq 11 - 6 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$. Таким образом, можно предположить, что v полностью окружена 5-вершинами. Если v инцидентна 4^+-грани $\dots v_1 v v_2$, то каждая из v_1 и v_2 получает $\frac{1}{4}$ от v по R3. Отсюда следует $\mu'(v) \geq 5 - 2 \times \frac{1}{4} - (11-2) \times \frac{1}{2} = 0$ согласно R3 и R5.

Остается предположить, что v симплициальная. Если при этом существует 4^+-грань $\dots v_1' v_1 v_2 v_2'$, то используем доводы из разд. 1.

Таким образом, все доказано, кроме случая, когда найдутся вершины w_1, $\dots, w_{11}$ такие, что существуют 3-грани $w_k v_k v_{k+1}$ для всех $1 \leq k \leq 11$ (сложение ведется по модулю 11 на протяжении всего абзаца). Если так, то не может быть $d(w_k) = d(w_{k+1}) = 5$ для любого k, так как в противном случае v_k будет иметь только одного 9^+-соседа, что невозможно. Из нечетности числа 11 без ограничения общности следует, что $d(w_1) \geq 9$ и $d(w_2) \geq 9$, и в этом случае достаточно заметить, что по нашим правилам v не дает ничего вершине v_2. Отсюда снова получаем $\mu'(v) \geq 5 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$.

Случай 4. $d(v) \geq 13$. Известно, что v дает не более $\frac{7}{12}$ каждой смежной 5-вершине по R1–R7. Поскольку $\mu(v) = d(v) - 6 - \frac{7d(v)}{12} = \frac{5d(v)-72}{12}$, то $\mu'(v) > 0$ для $d(v) \geq 15$, $\mu'(v) \geq -\frac{2}{12}$ для $d(v) = 14$ и $\mu'(v) \geq -\frac{7}{12}$ для $d(v) = 13$. Таким образом, уже все доказано для $d(v) \geq 15$, и далее используем дополнительные соображения для доказательства случая $13 \leq d(v) \leq 14$.

Во-первых, предположим, что v полностью окружена 5-вершинами, поскольку иначе $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - \frac{7(d(v)-1)}{12} = \frac{5(d(v)-13)}{12} \geq 0$, что и требуется.

Во-вторых, если v не симплициальна, то она дает не более $\frac{1}{4}$ не менее чем дважды каждой из вершин, инцидентных общей 4^+-грани с вершиной v по тем же соображениям, что и в случае 2, что фактически дает

$$\mu'(v) \geq d(v) - 6 - 2 \times \frac{1}{4} - \frac{7(d(v)-2)}{12} \geq \frac{5(d(v)-13)}{12} + \frac{1}{12} > 0.$$

Тем самым остается рассмотреть случай, когда v симплициальная и полностью окружена 5-вершинами. Если найдется 4^+-грань $\dots v_1'v_1v_2v_2'$, то легко получаем $\mu'(v) \geq \frac{1}{12}$ благодаря R3.

Пусть существует циклическая последовательность $W_{d(v)} = w_1, \dots, w_{d(v)}$ такая, что найдутся 3-грани $w_kv_kv_{k+1}$ при всех $1 \leq k \leq d(v)$ (сложение ведется по модулю $d(v)$). Отметим, что не существует двух последовательных 5-вершин в $W_{d(v)}$, поскольку каждая v_k должна иметь 9^+-соседа, отличного от v.

Если имеются две последовательные 9^+-вершины в $W_{d(v)}$, скажем w_1 и w_2, то v_2 не получает ничего от v по R1–R7, поэтому можем улучшить грубую прикидку $\mu'(v) \geq -\frac{7}{12}$ до $\mu'(v) \geq -\frac{7}{12} + \frac{7}{12} \geq 0$, что и требовалось.

Чтобы завершить доказательство для $d(v) = 13$, достаточно заметить, что такие вершины w_1 и w_2 найдутся благодаря нечетности.

Итак, остается доказать случай $d(v) = 14$. Если v имеет хотя бы одного несимплициального 5-соседа v_k, то v_k получает не более $\frac{1}{4}$ от v по R3, следовательно, $\mu'(v) \geq 8 - \frac{1}{4} - 13 \times \frac{7}{12} > 0$. Таким образом, можно предположить, что v полностью окружена симплициальными 5-вершинами, откуда следует, что W_{14} в действительности является 14-циклом.

Поскольку нет соседних 9^+-вершин в W_{14}, можем считать, что $d(w_1) = d(w_3) = \dots = d(w_{13}) = 5$.

Если хотя бы одна 5-вершина в W_{14}, скажем w_1, сильная, т. е. w_1 имеет 9^+-соседа вне W_{14}, $d(w_2) \geq 9$ и $d(w_{14}) \geq 9$, то каждая из v_1 и v_2 получает $\frac{1}{2}$ по R6, а не $\frac{7}{12}$ по R6ex1 или R6ex1, что дает $\mu'(v) \geq 8 - 2 \times \frac{1}{2} - 12 \times \frac{7}{12} = 0$.

Пусть далее ни одна из вершин $w_1, w_3, \dots, w_{13}$ не является сильной, т. е. каждая из них имеет 5-соседа вне W_{14}. Среди семи 9^+-вершин $w_2, w_4, \dots, w_{14}$ не существует двух последовательных (циклически) 10^--вершин, так как в противном случае получили бы младшую 5-звезду высоты не более 10 и веса не более 40, что невозможно.

По соображениям четности и симметрии можем считать, что $d(w_{14}) \geq 11$ и $d(w_2) \geq 11$. В данной ситуации каждая из v_1 и v_2 подчиняется общему правилу R6, а не его исключениям R6ex1 или R6ex2. Это означает, что снова $\mu'(v) \geq 8 - 2 \times \frac{1}{2} - 12 \times \frac{7}{12} = 0$, что и требовалось.

Таким образом, доказали, что $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$, что противоречит формуле (1) и завершает доказательство теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wernicke P.* Über den kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. V. 58. P. 413–426.
2. *Franklin Ph.* The four colour problem // Amer. J. Math. 1922. V. 44. P. 225–236.
3. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
4. *Jendrol' S., Madaras T.* On light subgraphs in plane graphs of minimal degree five // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16. P. 207–217.
5. *Borodin O. V., Woodall D. R.* Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 1998. V. 18, N 2. P. 159–164.
6. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 4-stars at 5-vertices in normal plane maps with minimum degree 5 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 17. P. 1710–1714.

7. *Van den Heuvel J., McGuinness S.* Coloring the square of a planar graph // J. Graph Theory. 2003. V. 42. P. 110–124.
8. *Balogh J., Kochol M., Pluhár A., Yu X.* Covering planar graphs with forests // J. Comb. Theory, Ser. B. 2005. V. 94. P. 147–158.
9. *Harant J., Jendrol' S.* On the existence of specific stars in planar graphs // Graphs Comb. 2007. V. 23. P. 529–543.
10. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing $(d-2)$-stars at d-vertices, $d \le 5$, in normal plane maps // Discrete Math. 2013. V. 313, N 17. P. 1700–1709.
11. *Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-Ден-Хойвел Я.* Строение плоских триангуляций в терминах пучков и звезд // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 2. С. 15–39.
12. *Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-Ден-Хойвел Я.* Минимальная степень и хроматическое число квадрата плоского графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 4. С. 9–33.
13. *Jendrol' S., Madaras T.* Note on an existence of small degree vertices with at most one big degree neighbour in planar graphs // Tatra Mt. Math. Publ. 2005. V. 30. P. 149–153.
14. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Jensen T. R.* 5-Stars of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 2014. V. 34, N 3. P. 539–546.
15. *Бородин О. В., Иванова А. О.* Легкие и низкие 5-звезды в нормальных плоских картах с минимальной степенью 5 // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 3. С. 596–602.
16. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Nikiforov D. V.* Low minor 5-stars in 3-polytopes with minimum degree 5 and no 6-vertices // (submitted).
17. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Light neighborhoods of 5-vertices in 3-polytopes with minimum degree 5 // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2016. V. 13. P. 584–591.
18. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Kazak O. N.* Describing neighborhoods of 5-vertices in 3-polytopes with minimum degree 5 and without vertices of degrees from 7 to 11 // Discuss. Math., Graph Theory (accepted).

Статья поступила 20 октября 2016 г.

Бородин Олег Вениаминович, Иванова Анна Олеговна,
Никифоров Дмитрий Владиславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
brdnoleg@math.nsc.ru, shmgnanna@mail.ru, zerorebelion@mail.ru