Сибирский математический журнал
Июль—август, 2017. Том 58, № 4

УДК 510.67:512.56

АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ КЛАССА СЛАБО ИНЪЕКТИВНЫХ ПОЛИГОНОВ

Е. Л. Ефремов, А. А. Степанова

Аннотация. Понятия слабо инъективного, кп-слабо инъективного и гл-слабо инъективного полигонов являются обобщением понятия инъективного полигона. В работе изучаются моноиды S, над которыми классы слабо инъективных, кп-слабо инъективных и гл-слабо инъективных полигонов аксиоматизируемы. Замечается, что класс гл-слабо инъективных полигонов над регулярным моноидом аксиоматизируем.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.407

Ключевые слова: моноид, полигон, слабо инъективный полигон, кп-слабо инъективный полигон, гл-слабо инъективный полигон, аксиоматизируемость.

Введение

Одной из стандартных задач теории моделей полигонов является описание моноидов, над которыми некоторый класс полигонов аксиоматизируем. Вопросы аксиоматизируемости для классов плоских, проективных и свободных полигонов рассмотрены в [1–3], для класса регулярных полигонов такое описание получено в [4, 5]. В [6] доказано, что для коммутативного счетного моноида S аксиоматизируемость класса инъективных полигонов над S эквивалентна конечной порожденности моноида S.

В теории модулей условие инъективности правого R-модуля M эквивалентно следующему условию ($\star$): для любого правого идеала $I \subseteq R$ любой гомоморфизм $\varphi : I \to M$ продолжается до гомоморфизма $\overline{\varphi} : R \to M$ (критерий Бэра [7]). Для полигонов аналог критерия Бэра не имеет места. Полигоны, для которых выполняется аналог условия ($\star$), называются *слабо инъективными*. Обобщением понятия слабо инъективного полигона являются понятия конечно порожденно слабо инъективного (кп-слабо инъективного), главно слабо инъективного (гл-слабо инъективного) полигона. Слабо инъективные, кп-слабо инъективные и гл-слабо инъективные полигоны впервые были рассмотрены в [8–10].

В данной работе описаны моноиды, над которыми классы слабо инъективных, кп-слабо инъективных и гл-слабо инъективных полигонов аксиоматизируемы (теоремы 1, 2, следствие 1). Заметим, что класс гл-слабо инъективных полигонов над регулярным моноидом аксиоматизируем (следствие 2).

1. Предварительные сведения

Приводимые ниже сведения из теории полигонов, теории моделей и универсальной алгебры можно найти в [7–14].

Всюду ниже S будет обозначать моноид, 1 — единицу S.

Моноид S называется *регулярным*, если для любого $s \in S$ существует $t \in S$ такой, что $s = sts$. Моноид S называется *нётеровым слева*, если все его левые идеалы конечно порождены. Нетрудно заметить, что моноид S нётеров слева тогда и только тогда, когда для любой возрастающей цепи

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \dots$$

его левых идеалов существует $n \in \omega$ такой, что $I_n = I_{n+k}$ для любого $k \in \omega$, т. е. любая возрастающая цепь его левых идеалов обрывается.

Алгебраическая система $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ сигнатуры $L_S = \{s \mid s \in S\}$ называется (*левым*) *S-полигоном* (или *полигоном над* S, или просто *полигоном*), если $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ и $1a = a$ для любых $s_1, s_2 \in S$, $a \in A$. Полигон $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ будем обозначать через ${}_SA$. Все рассматриваемые в работе полигоны являются левыми S-полигонами. Подсистема ${}_SB$ полигона ${}_SA$ называется *подполигоном* полигона ${}_SA$. Будем говорить, что гомоморфизм $\varphi : {}_SB \to {}_SC$ полигонов *продолжает* гомоморфизм $f : {}_SA \to {}_SC$ полигонов, где $A \subseteq B$, если $\varphi\mid_A = f$, т. е. $\varphi(a) = f(a)$ для любого $a \in A$. Под *копроизведением полигонов* ${}_SA_i$ $(i \in I)$ будем понимать их дизъюнктное объединение и обозначать его через $\bigsqcup\limits_{i\in I} {}_SA_i$.

Инъективным полигоном называется полигон ${}_SQ$ такой, что для любого мономорфизма $\imath : {}_SA \to {}_SB$ и для любого гомоморфизма $\varphi : {}_SA \to {}_SQ$ существует гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SB \to {}_SQ$, продолжающий φ, т. е. такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} {}_SA \arrow[rr, "\imath"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & {}_SB \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\ & {}_SQ & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Ясно, что мономорфизм $\imath : {}_SA \to {}_SB$ в данном определении можно заменить вложением $\imath(A) \subseteq B$, а гомоморфизм $\varphi : {}_SA \to {}_SQ$ — гомоморфизмом $\varphi' : \imath(A) \to {}_SQ$ $(\varphi'(\imath(a)) = \varphi(a)$ для любого $a \in A)$, т. е. имеет место следующее

Замечание 1. Полигон ${}_SQ$ инъективен тогда и только тогда, когда для любого полигона ${}_SB$, для любого подполигона ${}_SA \subseteq {}_SB$ и для любого гомоморфизма $\varphi : {}_SA \to {}_SQ$ существует гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SB \to {}_SQ$, продолжающий φ, т. е. такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} {}_SA \arrow[rr, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & {}_SB \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\ & {}_SQ & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Через **S-Inj** обозначим класс всех инъективных полигонов над S.

Факт 1 [11]. *Каждый полигон может быть вложен в инъективный полигон.*

Полигон ${}_SA$ называется *слабо инъективным полигоном*, если для любого левого идеала I моноида S и любого гомоморфизма $\varphi : {}_SI \to {}_SA$ существует гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SS \to {}_SA$, продолжающий φ, т. е. такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} {}_SI \arrow[rr, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & {}_SS \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\ & {}_SA & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Через **S-WInj** обозначим класс всех слабо инъективных полигонов над S.

Полигон ${}_SA$ называется *конечно порожденно слабо инъективным полигоном* (или *кп-слабо инъективным полигоном*), если для любого конечно порожденного левого идеала $\bigcup\limits_{i\le n} Ss_i$ моноида S и любого гомоморфизма $\varphi : \bigcup\limits_{i\le n} {}_SSs_i \to {}_SA$ существует гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SS \to {}_SA$, продолжающий φ, т. е. такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \bigcup\limits_{i\le n} {}_SSs_i & \subseteq & {}_SS \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\overline{\varphi}} & \\ & {}_SA & \end{array}$$

коммутативна.

Через **S-FGWInj** обозначим класс всех кп-слабо инъективных полигонов над S.

Полигон ${}_SA$ называется *главно слабо инъективным полигоном* (или *гл-слабо инъективным полигоном*), если для любого главного левого идеала Ss моноида S и любого гомоморфизма $\varphi : {}_SSs \to {}_SA$ существует гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SS \to {}_SA$, продолжающий φ, т. е. такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} {}_SSs & \subseteq & {}_SS \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\overline{\varphi}} & \\ & {}_SA & \end{array}$$

коммутативна.

Через **S-PWInj** обозначим класс всех гл-слабо инъективных полигонов над S.

Замечание 2. Для моноида S имеют место следующие включения:

$$\mathbf{S-Inj} \subseteq \mathbf{S-WInj} \subseteq \mathbf{S-FGWInj} \subseteq \mathbf{S-PWInj}.$$

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma\rangle$ — алгебраическая система сигнатуры Σ. Кортежи элементов $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ из A и переменных $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ будем обозначать соответственно через $\bar{a}$ и $\bar{x}$, длину кортежа $\bar{a}$ — через $l(\bar{a})$. Вместо $\bar{a} \in A^n$ будем писать $\bar{a} \in A$, вместо a_i — $\bar{a}(i)$.

Конгруэнция алгебраической системы $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma\rangle$ сигнатуры Σ — это отношение эквивалентности θ на A такое, что для любой n-местной операции $F \in \Sigma$ и любых $\bar{a}, \bar{b} \in A$ из $\langle \bar{a}(i), \bar{b}(i)\rangle \in \theta$ для всех i $(1 \le i \le n)$ следует $\langle F(\bar{a}), F(\bar{b})\rangle \in \theta$. Вместо записи $\langle a, b\rangle \in \theta$ часто будем использовать запись $a\theta b$.

Пусть $n \in \omega$. Через ${}_SS^{(n)}$ обозначим полигон $\coprod\limits_{i=1}^{n} {}_SS_i$, где ${}_SS_i$ — копия полигона ${}_SS$ $(1 \le i \le n)$, через $r^i \in S_i$ — копию элемента $r \in S$ $(1 \le i \le n)$. Пусть $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle \in S$. Через $\theta_{\bar{s}}$ обозначим множество

$$\{\langle t^k, r^m\rangle \in (S^{(n)})^2 \mid ts_k = rs_m,\ k, m \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Ясно, что $\theta_{\bar{s}}$ — конгруэнция полигона ${}_SS^{(n)}$.

Говорят, что конгруэнция θ алгебраической системы $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma\rangle$ *порождается множеством* $B \subseteq A^2$, если θ — наименьшая относительно включения конгруэнция алгебраической системы $\mathfrak{A}$, содержащая множество B. Конгруэнция θ алгебраической системы $\mathfrak{A}$ называется *конечно порожденной*, если существует конечное подмножество множества A^2, порождающее конгруэнцию θ.

Факт 2 (лемма Мальцева [12]). *Пусть $\rho(X)$ — наименьшая конгруэнция алгебраической системы $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma\rangle$, содержащая $X \subseteq A^2$, и $\rho = \rho(X)$. Тогда для любых $a, b \in A$ имеет место $a\rho b$ в том и только том случае, когда существуют $m \geq 1$, элементы $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_m, \bar{d}'_1, \dots, \bar{d}'_m, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m \in A$, $l(\bar{d}_i) = l(\bar{d}'_i) = l(\bar{x})$, $l(\bar{c}_i) = l(\bar{y})$ $(1 \leq i \leq m)$ и термы $t_1(\bar{x}, \bar{y}), \dots, t_m(\bar{x}, \bar{y})$, $t'_1(\bar{x}, \bar{y}), \dots, t'_m(\bar{x}, \bar{y})$ сигнатуры Σ такие, что $\langle \bar{d}_i, \bar{d}'_i\rangle \in X$ или $\langle \bar{d}'_i, \bar{d}_i\rangle \in X$ для любых i, $1 \leq i \leq m$, и*

$$a = t_1(\bar{d}_1, \bar{c}_1), \quad t_i(\bar{d}'_i, \bar{c}_i) = t_{i+1}(\bar{d}_{i+1}, \bar{c}_{i+1}) \ (1 \leq i < m), \quad t_m(\bar{d}'_m, \bar{c}_m) = b.$$

Пусть $\mathscr{K}$ — класс алгебраических систем сигнатуры Σ. Класс $\mathscr{K}$ называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество предложений Z сигнатуры Σ, что для любой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ

$$\mathfrak{A} \in \mathscr{K} \iff \mathfrak{A} \models \Phi \quad \text{для всех } \Phi \in Z.$$

Алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ сигнатуры Σ называются *элементарно эквивалентными* (обозначение: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), если для любого предложения Φ сигнатуры Σ

$$\mathfrak{A} \models \Phi \iff \mathfrak{B} \models \Phi.$$

Подсистема $\mathfrak{A}$ алгебраической системы $\mathfrak{B}$ сигнатуры Σ называется *элементарной* (обозначение: $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$), если для любой формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ и любых $b_1, \dots, b_n \in B$

$$\mathfrak{A} \models \Phi(b_1, \dots, b_n) \iff \mathfrak{B} \models \Phi(b_1, \dots, b_n).$$

Заметим, что если $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Будем говорить, что класс $\mathscr{K}$ алгебраических систем *замкнут относительно элементарной эквивалентности* (*ультрапроизведений*), если алгебраическая система, элементарно эквивалентная алгебраической системе из класса $\mathscr{K}$ (являющаяся ультрапроизведением алгебраических систем из класса $\mathscr{K}$), принадлежит $\mathscr{K}$.

Факт 3 (критерий аксиоматизируемости) [13]. *Класс $\mathscr{K}$ алгебраических систем сигнатуры Σ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.*

Пусть α — кардинал. Алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma\rangle$ называется *α-насыщенной*, если для каждого подмножества $X \subseteq A$ мощности, меньшей α, обогащение $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$ реализует каждый тип $\Gamma(v)$ сигнатуры $\Sigma \cup \{c_a \mid a \in X\}$, который совместен с теорией алгебраической системы $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$.

Факт 4 [14]. *Пусть $|\Sigma| \leq \alpha$ и $\omega \leq |A| \leq 2^\alpha$. Тогда существует α^+-насыщенное элементарное расширение $\mathfrak{B}$ алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ мощности 2^α.*

Факт 5 (теорема компактности) [13]. *Каждое локально совместное множество формул Γ сигнатуры Σ совместно.*

2. Аксиоматизируемость класса S-FGWInj

Напомним, что через $\theta_{\bar{s}}$, где $\bar{s} = \langle s_1, \dots s_n\rangle \in S$ $(n \in \omega)$, обозначается конгруэнция

$$\theta_{\bar{s}} = \{\langle t^k, r^m\rangle \mid ts_k = rs_m, k, m \in \{1, \dots, n\}\}$$

полигона ${}_SS^{(n)} = \coprod_{i=1}^{n} {}_SS_i$, где ${}_SS_i$ — копия полигона ${}_SS$, r^i — копия элемента $r \in S$ $(i \in \{1, \dots, n\})$.

Теорема 1. *Пусть S — счетный моноид. Класс* **S-FGWInj** *кп-слабо инъективных полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любого $n \in \omega$ и для любого $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона $_SS^{(n)}$ конечно порождена.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует такой кортеж $\bar{s} \in S^n$, что конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона $_SS^{(n)}$ не конечно порождена. Тогда найдутся пары $\langle t_i \cdot 1^{k_i}, r_i \cdot 1^{m_i}\rangle \in \theta_{\bar{s}}$ $(i \in \omega)$ такие, что для конгруэнций θ_i полигона $_SS^{(n)}$, порожденных множеством $\{\langle t_j \cdot 1^{k_j}, r_j \cdot 1^{m_j}\rangle \mid j \leq i\}$, выполняются следующие соотношения:

$$\langle t_{i+1} \cdot 1^{k_{i+1}}, r_{i+1} \cdot 1^{m_{i+1}}\rangle \notin \theta_i \quad \text{и} \quad \bigcup_{i\in\omega} \theta_i = \theta_{\bar{s}}.$$

Пусть $i \in \omega$ и $_SA_i = {}_SS^{(n)}/\theta_i$. Тогда по факту 1 и замечанию 2 существует кп-слабо инъективный полигон $_SQ_i$ такой, что $A_i \subseteq Q_i$.

Пусть D — неглавный ультрафильтр на ω, $\bar{1}^l/D \in \prod\limits_{i\in\omega} Q_i/D$, $\bar{1}^l(i) = 1^l/\theta_i$ $(i \in \omega, 1 \leq l \leq n)$ и отображение

$$\varphi : Ss_1 \cup \dots \cup Ss_n \to \prod_{i\in\omega} Q_i/D$$

задается следующим образом:

$$\varphi(ts_l) = t \cdot \bar{1}^l/D \quad (1 \leq l \leq n).$$

Покажем корректность определения отображения φ. Пусть $t, r \in S$ и $ts_k = rs_m$, где $k, m \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $\langle t \cdot 1^k, r \cdot 1^m\rangle \in \theta_{\bar{s}}$. Следовательно, существует $i_0 \in \omega$ такое, что $\langle t \cdot 1^k, r \cdot 1^m\rangle \in \theta_{i_0}$. Тогда $\langle t \cdot 1^k, r \cdot 1^m\rangle \in \theta_j$ для всех $j \geq i_0$, т. е. $t \cdot 1^k/\theta_j = r \cdot 1^m/\theta_j$ для любого $j \geq i_0$. Поскольку D — неглавный ультрафильтр на ω, то $\{j \in \omega \mid j \geq i_0\} \in D$. Тогда $\{j \in \omega \mid t \cdot 1^k/\theta_j = r \cdot 1^m/\theta_j\} \in D$, т. е. $t \cdot \bar{1}^k/D = r \cdot \bar{1}^m/D$. Таким образом, корректность определения отображения φ показана. Нетрудно заметить, что φ — гомоморфизм полигонов.

Так как $_SQ_i$ — кп-слабо инъективный полигон для любого $i \in \omega$, в силу аксиоматизируемости класса кп-слабо инъективных полигонов по факту 3 $\prod\limits_{i\in\omega} {}_SQ_i/D$ — кп-слабо инъективный полигон. Следовательно, существует гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SS \to \prod\limits_{i\in\omega} {}_SQ_i/D$ такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} {}_SSs_1 \cup \dots \cup {}_SSs_n & \subseteq & {}_SS \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\overline{\varphi}} & \\ & \prod\limits_{i\in\omega} {}_SQ_i/D & \end{array}.$$

Пусть $\overline{\varphi}(1) = \bar{q}/D$, $\bar{q}(i) = q_i$ $(i \in \omega)$, $1 \leq l \leq n$. Тогда

$$\bar{1}^l/D = \varphi(s_l) = \overline{\varphi}(s_l) = \overline{\varphi}(s_l \cdot 1) = s_l\overline{\varphi}(1) = s_l\bar{q}/D.$$

Стало быть,

$$I_l = \{i \in \omega \mid 1^l/\theta_i = s_l q_i\} \in D.$$

Пусть $i_0 \in I_1 \cap \dots \cap I_n \in D$. Тогда $s_l q_{i_0} = 1^l/\theta_{i_0}$ для любого l $(1 \leq l \leq n)$. Так как $\langle t_{i+1} \cdot 1^{k_{i+1}}, r_{i+1} \cdot 1^{m_{i+1}}\rangle \in \theta_{i+1} \subset \theta_{\bar{s}}$, то $t_{i+1}s_{k_{i+1}} = r_{i+1}s_{m_{i+1}}$. Следовательно, $t_{i+1}s_{k_{i+1}}q_{i_0} = r_{i+1}s_{m_{i+1}}q - i_0$, т. е. $t_{i+1}1^{k_{i+1}}/\theta_i = r_{i+1}1^{m_{i+1}}/\theta_i$. Это означает, что $\langle t_{i+1} \cdot 1^{k_{i+1}}, r_{i+1} \cdot 1^{m_{i+1}}\rangle \in \theta_i$; противоречие с построением конгруэнции θ_i.

Достаточность. Пусть для любых $n \in \omega$, $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_SS^{(n)}$ порождается множеством пар

$$\big\langle t_0^{\bar{s}} \cdot 1^{k_0}, r_0^{\bar{s}} \cdot 1^{m_0} \big\rangle, \dots, \big\langle t_{n_{\bar{s}}}^{\bar{s}} \cdot 1^{k_{n_{\bar{s}}}}, r_{n_{\bar{s}}}^{\bar{s}} \cdot 1^{m_{n_{\bar{s}}}} \big\rangle \in (S^{(n)})^2 \quad (k_0, \dots, k_{n_s}, m_0, \dots, m_{n_s} \in \{1, \dots, n\})$$

и

$$\Gamma = \{\Phi_{\bar{s}} \mid \bar{s} = \langle s_1, \dots s_n \rangle \in S^n,\ n \in \omega\},$$

где

$$\Phi_{\bar{s}} \leftrightharpoons \forall x_1 \dots x_n \left(\bigwedge_{i=0}^{n_{\bar{s}}} t_i^{\bar{s}} x_{k_i} = r_i^{\bar{s}} x_{m_i} \to \exists y \bigwedge_{j=1}^{n} (x_j = s_j y) \right).$$

Докажем, что

$${}_SA \in \textbf{S-FGWInj} \iff \forall n \in \omega\ \forall \bar{s} \in S^n ({}_SA \models \Phi_{\bar{s}}).$$

Предположим, что ${}_SA$ — кп-слабо инъективный полигон, $n \in \omega$, $\bar{s} \in S^n$, $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in A^n$,

$${}_SA \models \bigwedge_{i=0}^{n_{\bar{s}}} t_i^{\bar{s}} a_{k_i} = r_i^{\bar{s}} a_{m_i}$$

и $\varphi : Ss_1 \cup \dots \cup Ss_n \to A$ — отображение такое, что

$$\varphi(ts_l) = ta_l \quad \text{для любых } t \in S,\ l\ (1 \le l \le n).$$

Покажем корректность определения отображения φ. Пусть $ts_k = rs_m$, т. е. $\langle t\cdot 1^k, r\cdot 1^m \rangle \in \theta_{\bar{s}}$. По лемме Мальцева существуют $n_0 \in \omega$, $u_l \in S$, $i_l \in \{0, \dots, n_s\}$ $(0 \le l < n_0)$ такие, что

$$t \cdot 1^k = u_0 t_{i_0}^{\bar{s}} \cdot 1^{k_{i_0}}, \quad u_l r_{i_l}^{\bar{s}} \cdot 1^{m_{i_l}} = u_{l+1} t_{i_{l+1}}^{\bar{s}} \cdot 1^{k_{i_{l+1}}}, \quad u_{n_0} r_{i_{n_0}}^{\bar{s}} \cdot 1^{m_{i_{n_0}}} = r \cdot 1^m.$$

Тем самым $k_{i_l} = m_{i_{l+1}}$, поэтому $u_l t_{i_l}^{\bar{s}} = u_{l+1} r_{i_{l+1}}^{\bar{s}}$. Тогда $u_l t_{i_l}^{\bar{s}} a_{k_i} = u_{l+1} r_{i_{l+1}}^{\bar{s}} a_{m_i}$ для любых l $(0 \le l < n_0)$, т. е. $ta_k = ra_m$. Таким образом, корректность определения отображения φ показана. Ясно, что φ — гомоморфизм полигонов. Поскольку ${}_SA$ — кп-слабо инъективный полигон, существует гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SS \to {}_SA$ такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} {}_SSs_1 \cup \dots \cup {}_SSs_n & \subseteq & {}_SS \\ & {}_{\varphi}\searrow \quad \swarrow_{\overline{\varphi}} & \\ & {}_SA & \end{array}. \tag{1}$$

Тогда

$$a_l = \varphi(s_l) = \overline{\varphi}(s_l) = s_l \overline{\varphi}(1),$$

т. е. ${}_SA \models \Phi_{\bar{s}}$.

Предположим, что ${}_SA \models \Phi_{\bar{s}}$ для любых $n \in \omega$, $\bar{s} \in S^n$, $\varphi : {}_SSs_1 \cup \dots \cup {}_SSs_n \to {}_SA$ — гомоморфизм полигонов, $\varphi(s_l) = a_l$ $(1 \le l \le n)$. Так как $ts_k = rs_m$, то $ta_k = ra_m$ для любой пары $\langle t^k, r^m \rangle \in \theta_{\bar{s}}$. Следовательно,

$${}_SA \models \bigwedge_{i=0}^{n_{\bar{s}}} t_i^{\bar{s}} a_{k_i} = r_i^{\bar{s}} a_{m_i}.$$

Поскольку ${}_SA \models \Phi_{\bar{s}}$, существует $b \in A$ такой, что $a_l = s_l b$ для любого l $(1 \le l \le n)$. Гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SS \to {}_SA$ определим следующим образом: $\overline{\varphi}(s) = sb$ для любого $s \in S$. Тогда

$$\overline{\varphi}(ts_l) = t\overline{\varphi}(s_l) = t(s_l b) = ta_l = t\varphi(s_l) = \varphi(ts_l),$$

что означает коммутативность диаграммы (1). Таким образом, **S-FGWInj** — аксиоматизируемый класс.

Из доказательства теоремы 1 следует, что если класс слабо инъективных полигонов аксиоматизируем, то для любого $n \in \omega$ и для любого $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_SS^{(n)}$ конечно порождена, т. е. имеет место

Замечание 3. Пусть S — счетный моноид. Если класс **S-WInj** аксиоматизируем, то класс **S-FGWInj** аксиоматизируем.

Пусть $s \in S$. Конгруэнцию θ_s полигона ${}_SS^{(1)} = {}_SS$ можно отождествить с множеством $\{\langle t, r\rangle \in S^2 \mid ts = rs\}$. Доказательство следствия 1 ниже полностью повторяет доказательство теоремы 1, если положить $n = 1$.

Следствие 1. *Пусть S — счетный моноид. Класс* **S-PWInj** *гл-слабо инъективных полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любого $s \in S$ конгруэнция θ_s полигона ${}_SS$ конечно порождена.*

Из теоремы 1 и следствия 1 вытекает

Замечание 4. Пусть S — счетный моноид. Если класс **S-FGWInj** аксиоматизируем, то класс **S-PWInj** аксиоматизируем.

Следствие 2. *Если S — регулярный моноид, то класс* **S-PWInj** *аксиоматизируем.*

Доказательство. Пусть $s \in S$, $t \in S$ и $s = sts$. Покажем, что конгруэнция θ_s полигона ${}_SS$ конечно порождена, а именно пара $\langle 1, st\rangle$ порождает конгруэнцию θ_s. Так как $1 \cdot s = (st) \cdot s$, то $\langle 1, st\rangle \in \theta_s$. Для любой пары $\langle u, v\rangle \in \theta_s$ имеем

$$u = u \cdot 1 \ \theta_s \ ust = vst \ \theta_s \ v \cdot 1 = v.$$

Следовательно, по лемме Мальцева конгруэнция θ_s полигона ${}_SS$ порождается парой $\langle 1, st\rangle$. По следствию 1 класс гл-слабо инъективных полигонов аксиоматизируем.

3. Аксиоматизируемость класса S-WInj

Теорема 2. *Пусть S — счетный моноид. Класс* **S-WInj** *слабо инъективных полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любого $n \in \omega$ и для любого $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_SS^{(n)}$ конечно порождена и S — нётеров слева моноид.*

Доказательство. Из нётеровости слева моноида S следует, что любой левый идеал S конечно порожден. Тогда любой кп-слабо инъективный полигон слабо инъективен, т. е. классы **S-WInj** и **S-FGWInj** совпадают.

Достаточность следует из теоремы 1.

Необходимость. Достаточно показать, что S — нётеров слева моноид.

Предположим, что S — не нётеров слева моноид. Тогда найдутся левые идеалы I_k $(k \in \omega)$ моноида S и элементы $s_j \in S$ $(j \in \omega)$ такие, что

$${}_SI_k = \bigcup_{j \le k} {}_SSs_j \quad \text{и} \quad I_k \subset I_{k+1} \text{ для любого } k \in \omega.$$

Пусть ${}_SI = \bigcup\limits_{k \in \omega} {}_SI_k$. По факту 1 существует инъективный полигон ${}_SQ_0$ такой, что $I_0 \subseteq Q_0$. Можно считать, что $Q_0 \cap (I \setminus I_0) = \varnothing$. Через ${}_SQ_{k+1}$ обозначим инъективный полигон такой, что $Q_k \cup (I_{k+1}) \subseteq Q_{k+1}$. Можно считать, что

$Q_{k+1} \cap (I \setminus I_{k+1}) = \varnothing$. Так как $s_{k+1} \in Q_{k+1} \setminus Q_k$, то $Q_k \subset Q_{k+1}$ для любого $k \in \omega$.

Через ${}_SQ$ обозначим $\bigcup\limits_{k\in\omega} {}_SQ_k$. Покажем, что ${}_SQ$ — кп-слабо инъективный полигон. Пусть $n \in \omega$, J — конечно порожденный левый идеал S, $J = \bigcup\limits_{i\leq n} Sb_i$, $\varphi : {}_SJ \to {}_SQ$ — гомоморфизм полигонов. Через k_0 обозначим число такое, что $\varphi(b_i) \in Q_{k_0}$ для всех $i \leq n$. Такое число существует, поскольку ${}_SQ$ — объединение возрастающей цепи полигонов ${}_SQ_k$ ($k \in \omega$). Тогда в силу инъективности полигона ${}_SQ_{k_0}$ существует гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SS \to {}_SQ_{k_0}$, продолжающий φ. Следовательно, ${}_SQ$ — кп-слабо инъективный полигон.

Покажем, что ${}_SQ$ — не слабо инъективный полигон. Предположим, что это не так. Пусть $f : {}_SI \to {}_SQ$ — вложение полигонов. Тогда существует гомоморфизм $\bar{f} : {}_SS \to {}_SQ$, продолжающий f. Пусть $\bar{f}(1) \in Q_{k_0}$, где $k_0 \in \omega$. Если $s \in I \setminus I_{k_0}$, то

$$s = f(s) = \bar{f}(s) = s\bar{f}(1) \in Q_{k_0},$$

т. е. $I \setminus I_{k_0} \subseteq Q_{k_0}$; получили противоречие.

Выберем кардинал α таким образом, что $|S| \leq \alpha$ и $|Q| \leq 2^\alpha$. По факту 4 существует α^+-насыщенное элементарное расширение ${}_S\overline{Q}$ полигона ${}_SQ$ мощности 2^α. По замечанию 3 класс **S-FGWInj** аксиоматизируем, и по критерию аксиоматизируемости он замкнут относительно элементарной эквивалентности. Так как ${}_SQ \equiv {}_S\overline{Q}$ и ${}_SQ$ — кп-слабо инъективный полигон, ${}_S\overline{Q}$ — кп-слабо инъективный полигон.

Покажем, что ${}_S\overline{Q}$ — слабо инъективный полигон. Пусть $b_i \in S$ ($i \in I$), $f : \bigcup\limits_{i\in I} {}_SSb_i \to {}_S\overline{Q}$ — гомоморфизм полигонов, $X = \{f(b_i) \mid i \in I\}$. Тогда $|X| \leq |S| \leq \alpha < \alpha^+$. Через $\Gamma(y)$ обозначим множество $\{b_iy = c_{f(b_i)} \mid i \in I\}$ формул сигнатуры $L_S \cup \{c_{f(b_i)}\}_{i\in I}$. Покажем, что $\Gamma(y)$ — локально совместное множество. Пусть

$$k \in \omega, \quad \Gamma_k(y) = \{b_{m_i}y = c_{f(b_{m_i})} \mid i \leq k, m_i \in I\}, \quad f_k = f \restriction \bigcup_{i\leq k} Sb_{m_i}.$$

Так как ${}_S\overline{Q}$ — кп-слабо инъективный полигон, существует гомоморфизм $\bar{f}_k : {}_SS \to {}_S\overline{Q}$, продолжающий гомоморфизм f_k. Тогда $b_{m_i}\bar{f}_k(1) = f(b_{m_i})$ для любого i ($i \leq k$) и множество $\Gamma_k(y)$ совместно. По теореме компактности $\Gamma(y)$ совместны. Поскольку ${}_S\overline{Q}$ — α^+-насыщенный полигон, существует $y_0 \in {}_S\overline{Q}$ такой, что $b_iy_0 = f(b_i)$ для всех $i \in I$. Гомоморфизм $\bar{f} : {}_SS \to {}_S\overline{Q}$ определим следующим образом:

$$\bar{f}(t) = ty_0 \quad \text{для любого } t \in S.$$

Так как

$$f(sb_i) = sf(b_i) = sb_iy_0 = sb_i\bar{f}(1) = \bar{f}(sb_i)$$

для любого $i \in I$, гомоморфизм $\bar{f}$ продолжает гомоморфизм f, что доказывает слабую инъективность полигона ${}_S\overline{Q}$.

По критерию аксиоматизируемости класс **S-WInj** замкнут относительно элементарной эквивалентности. Поскольку ${}_SQ \equiv {}_S\overline{Q}$, то ${}_SQ$ является слабо инъективным полигоном; противоречие.

4. Примеры

Утверждение 1. *Если S — счетная группа, то класс* **S-WInj** *слабо инъективных полигонов аксиоматизируем.*

Доказательство. Моноид S нётеров слева, ибо $St = S$ для любого $t \in S$. Пусть $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle \in S$. Покажем, что конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ порождается множеством $\{\langle s_k s_m^{-1} \cdot 1^m, 1^k \rangle \mid k, m \leq n\}$. Пусть $\langle t^m, r^k \rangle \in \theta_{\bar{s}}$. Тогда $ts_m = rs_k$. Так как S — группа, то $t = rs_k s_m^{-1}$. Поэтому

$$\langle t^m, r^k \rangle = r\langle s_k s_m^{-1} \cdot 1^m, 1^k \rangle.$$

Таким образом, по теореме 2 класс **S-WInj** аксиоматизируем.

В приводимых ниже примерах под $\mathbb{N}$ понимается множество натуральных чисел без нуля.

Пример 1 моноида S, не являющегося группой, для которого класс **S-WInj** аксиоматизируем. Пусть $S = \langle \omega; + \rangle$. Заметим, что все идеалы моноида S главные, т. е. имеют вид $\omega + s$, где $s \in \omega$. Поскольку

$$\omega + t \subseteq \omega + r \Longleftrightarrow t \geq r,$$

моноид S нётеров. Если $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle \in S$, то конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ порождается множеством

$$\{\langle 0^i, (s_i - s_j) + 0^j \rangle \mid s_i \geq s_j,\ i, j \leq n\} \cup \{\langle (s_j - s_i) + 0^i, 0^j \rangle \mid s_i < s_j,\ i, j \leq n\}.$$

По теореме 2 класс **S-WInj** аксиоматизируем.

Пример 2 моноида S, для которого класс S-WInj не аксиоматизируем, а класс **S-FGWInj** аксиоматизируем.. Пусть $S = \langle \mathbb{N}; \cdot \rangle$, $P = \{p_i \mid i \in \omega\}$ — множество простых чисел. Так как

$$\bigcup_{i \leq n} p_i \mathbb{N} \subset \bigcup_{i \leq n+1} p_i \mathbb{N}$$

для любого $n \in \omega$, моноид S не нётеров. По теореме 2 класс **S-WInj** не аксиоматизируем. Пусть $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle \in S$. Через (a, b) обозначим наибольший общий делитель чисел $a, b \in \mathbb{N}$. Покажем, что конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ порождается множеством

$$\left\{\left\langle \frac{s_m}{(s_k, s_m)} \cdot 1^k, \frac{s_k}{(s_k, s_m)} \cdot 1^m \right\rangle \mid k, m \in \{1, \ldots, n\}\right\}.$$

Пусть $\langle t^k, r^m \rangle \in \theta_{\bar{s}}$. Тогда $t \cdot s_k = r \cdot s_m$. Следовательно, t делится на $\frac{s_m}{(s_k, s_m)}$ и $\frac{t \cdot (s_k, s_m)}{s_m} \in \mathbb{N}$. Из равенств

$$\frac{t \cdot (s_k, s_m)}{s_m} \left\langle \frac{s_m}{(s_k, s_m)} \cdot 1^k, \frac{s_k}{(s_k, s_m)} \cdot 1^m \right\rangle = \left\langle t^k, \frac{ts_k}{s_m} \cdot 1^m \right\rangle = \left\langle t^k, \frac{rs_m}{s_m} \cdot 1^m \right\rangle = \langle t^k, r^m \rangle$$

по теореме 1 следует аксиоматизируемость класса **S-FGWInj**.

Пример 3 моноида S, для которого класс **S-FGWInj** не аксиоматизируем, а класс **S-PWInj** аксиоматизируем. Пусть $S = \langle \mathbb{N}^2 \cup \{\langle 0, 0 \rangle\}; + \rangle$, где операция $+$ на множестве $\mathbb{N}^2 \cup \{\langle 0, 0 \rangle\}$ определяется покомпонентно, $n, m \in \mathbb{N}$. Конгруэнция $\theta_{\langle n, m \rangle}$ порождается парой $\langle \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle \rangle$:

$$\begin{aligned}\theta_{\langle n, m \rangle} &= \{\langle \langle i, j \rangle, \langle i', j' \rangle \rangle \mid \langle i, j \rangle + \langle n, m \rangle = \langle i', j' \rangle + \langle n, m \rangle\} \\ &= \{\langle \langle i, j \rangle, \langle i', j' \rangle \rangle \mid \langle i, j \rangle = \langle i', j' \rangle\} = \{\langle \langle i, j \rangle, \langle i, j \rangle \rangle\} = \mathbb{N}^2 + \langle \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle \rangle.\end{aligned}$$

Тогда по следствию 1 класс **S-PWinj** аксиоматизируем.

Покажем, что конгруэнция $\theta_{\langle\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\rangle}$ не конечно порождена. Так как

$$\begin{aligned}\{\langle\langle i,j\rangle^1,\langle i',j'\rangle^2\rangle \mid \langle i,j\rangle+\langle 1,1\rangle=\langle i',j'\rangle+\langle 1,2\rangle\}\\ =\{\langle\langle i,j\rangle^1,\langle i',j'\rangle^2\rangle \mid \langle i,j\rangle=\langle i',j'+1\rangle\}\\ =\{\langle\langle i,j+1\rangle^1,\langle i,j\rangle^2\rangle \mid \langle i,j\rangle\in\mathbb{N}^2\}\subseteq\theta_{\langle\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\rangle},\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}\theta_{\langle\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\rangle}=\{\langle\langle i,j+1\rangle^1,\langle i,j\rangle^2\rangle \mid \langle i,j\rangle\in\mathbb{N}^2\}\cup\{\langle\langle i,j\rangle^2,\langle i,j+1\rangle^1\rangle \mid \langle i,j\rangle\in\mathbb{N}^2\}\\ \cup\{\langle\langle i,j\rangle^k,\langle i,j\rangle^k\rangle \mid \langle i,j\rangle\in\mathbb{N}^2,\ k\in\{1,2\}\}.\end{aligned}$$

Пусть $\langle\langle i_1,j_1\rangle^{k_1},\langle i'_1,j'_1\rangle^{m_1}\rangle,\ \dots,\ \langle\langle i_n,j_n\rangle^{k_n},\langle i'_n,j'_n\rangle^{m_n}\rangle$ порождают $\theta_{\langle\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\rangle}$ и $j_0=\max\{j_1,\dots,j_n,j'_1,\dots,j'_n\}+1$. Поскольку

$$\langle\langle 1,j_0+1\rangle^1,\langle 1,j_0\rangle^2\rangle\in\theta_{\langle\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\rangle},$$

существуют такие $\langle i,j\rangle\in\mathbb{N}^2$ и $l\le n$, что $\langle 1,j_0+1\rangle^1=\langle i,j\rangle+\langle i_l,j_l\rangle^1$ или $\langle 1,j_0+1\rangle^1=\langle i,j\rangle+\langle i'_l,j'_l\rangle^1$. Предположим, что выполняется первое равенство. Можно считать, что $\langle i_l,j_l\rangle\ne\langle 0,0\rangle$. Тогда $1=i+i_l$ и $i=0$. Следовательно, $j=0$ и $j_0+1=j_l$; противоречие.

Пример 4 моноида S, для которого класс **S-PWInj** не аксиоматизируем. Пусть $S=\langle\omega\cup\{e\};\circ\rangle$ — полугруппа с присоединенной единицей e, где $t\circ r=\min\{t,r\}$ для любых $t,r\in S$. Покажем, что конгруэнция

$$\theta_s=\{\langle t,r\rangle \mid t\circ s=r\circ s\}=\{\langle t,r\rangle \mid t=r \text{ или } t,r\ge s\}$$

не конечно порождена для любого $s\in S$. Предположим, что конгруэнция θ_s порождается множеством $\{\langle t_i,r_i\rangle \mid i\le n\}$. Пусть

$$m=\max(\{t_i \mid i\le n\}\cup\{r_i \mid i\le n\})+1.$$

Так как $\langle m,m\rangle\in\theta_s$, по лемме Мальцева $m=k\circ t_i$ или $m=k\circ r_i$ для некоторых $i\le n$, $k\in S$, что не так.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гоулд В., Михалев А. В., Палютин Е. А., Степанова А. А.* Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов // Фунд. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 7. С. 63–110.
2. *Степанова А. А.* Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов S-полигонов // Алгебра и логика. 1991. Т. 30, № 5. С. 583–594.
3. *Gould V.* Axiomatisability problems for S-systems // J. London Math. Soc. 1987. V. 35. P. 193–201.
4. *Михалев А. В., Овчинникова Е. В., Палютин Е. А., Степанова А. А.* Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов // Фунд. и прикл. математика. 2004. Т. 10, № 4. С. 107–157.
5. *Степанова А. А.* Аксиоматизируемость и модельная полнота класса регулярных полигонов // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 181–193.
6. *Степанова А. А.* Аксиоматизируемость и полнота класса инъективных полигонов над коммутативным моноидом и над группой // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 650–662.
7. *Каш Ф.* Модули и кольца. М.: Мир, 1981.
8. *Berthiaume P.* The injective envelope of S-sets // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 10. P. 261–273.
9. *Gould V.* The characterization of monoids by properties of their S-systems // Semigroup Forum. 1985. V. 32. P. 251–265.

10. *Luedeman J., McMorris F., Sim S.-K.* Semigroups for which every totally irreducible S-system is injective // Comment. Math. Univ. Carolinae. 1978. V. 19. P. 27–35.

11. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, acts and categories with applications to wreath products and graphs: a handbook for students and researchers. Berlin; New York: de Gruyter, 2000.

12. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

13. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1987.

14. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

Статья поступила 16 июня 2016 г, окончательный вариант — 8 ноября 2016 г.

Ефремов Евгений Леонидович
Дальневосточный федеральный университет,
Школа естественных наук,
ул. Суханова, 8, Владивосток 690000
`efremov-el@mail.ru`

Степанова Алена Андреевна
Дальневосточный федеральный университет,
Школа естественных наук,
ул. Суханова, 8, Владивосток 690000;
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
`stepltd@mail.ru`