Сибирский математический журнал
Июль—август, 2017. Том 58, № 4

УДК 512.57

СВОЙСТВА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КЛОНОВ, СОДЕРЖАЩИХ КРЕАТИВНЫЕ ФУНКЦИИ

И. А. Мальцев

Аннотация. Исследуется проблема характеризации гипертождествами клонов на трехэлементном множестве. Доказывается, что существует гипертождество, отделяющее любой креативный клон квазилинейных функций, определенных на множестве $\{0, 1, 2\}$, либо селекторных, либо таких, у которых все значения принадлежат множеству $\{0, 1\}$, от любого не сравнимого с ним некреативного клона, образованного подобными функциями.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.410

Ключевые слова: гипертождество, квазилинейная функция, клон, клоновое тождество, креативный клон.

Пусть $f_1^n, \dots, f_k^n$ — все n-арные функциональные символы и $x_1, \dots, x_m$ — все предметные символы, входящие в термы T_1 и T_2. *Гипертождеством* называется выражение вида

$$\forall f_1^n \dots \forall f_k^n \, \forall x_1 \dots \forall x_m \, (T_1 = T_2).$$

Гипертождество разделяет два клона, если оно истинно на одном из них, но ложно на другом. Чтобы подчеркнуть, что перед нами гипертождество, вместо знака $=$ будем использовать знак $\approx$. В [1] доказано, что любые два булевых клона разделимы гипертождеством. На множестве из трех элементов существуют пары клонов, не разделимые никаким гипертождеством. Подробно свойства гипертождеств изложены в [2].

Квазилинейные клоны образованы существенно одноместными функциями и функциями, выражающимися через одноместные функции следующим образом:

$$f(g_1(x_1) \oplus \dots \oplus g_n(x_n)),$$

здесь сложение ведется по модулю 2. На конечном множестве решетка всех квазилинейных клонов счетна [3]. Это свойство делает изучение таких клонов весьма привлекательным.

В данной статье рассматриваем клоны, образованные селекторными функциями $e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$ и квазилинейными функциями, определенными на множестве $\{0, 1, 2\}$, со значениями в множестве $\{0, 1\}$. Любая неселекторная квазилинейная функция $h(x_1, \dots, x_n)$ из этого клона, существенно зависящая от каждой переменной, может быть записана в виде

$$h(x_1, \dots, x_n) = c_k \oplus \sum_{j=1}^{g} \gamma(x_{i_j}) \oplus \sum_{j=g+1}^{g+f} \varphi(x_{i_j}) \oplus \sum_{j=g+f+1}^{g+f+p} \psi(x_{i_j}),$$

Таблица 1

x	$e(x)$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	$\gamma(x)$	$c_0(x)$	$c_1(x)$
0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1
2	2	0	1	1	0	1

где

$$k \in \{0,1\}, \quad g,f,p \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i_1,\dots,i_{g+f+p} \leqslant n.$$

Определения функций, являющихся слагаемыми в правой части формулы, указаны в табл. 1.

В дальнейшем не будем перечислять аргументы функции, а на их наличие и количество будут указывать индексы. Так, через φ_i^n далее будем обозначать существенно одноместную функцию $\varphi_i^n(x_1,\dots,x_n)$, равную $\varphi(x_i)$. Тильда над обозначением функции означает сумму одноместных функций, а верхний индекс — количество одноместных слагаемых, зависящих от разных переменных. Например, через $\tilde{\gamma}^n$ будет записываться сумма $\gamma(x_1)\oplus\dots\oplus\gamma(x_n)$.

Напомним определение клонового гомоморфизма. Пусть $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ — клоны функций, определенных на множествах M_1 и M_2 соответственно. Отображение $\kappa : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ называется *клоновым гомоморфизмом*, если

(1) для каждой функции $f \in \mathscr{C}_1$ арности функций f и $\kappa(f)$ совпадают,

(2) образом функции e_i^n из клона $\mathscr{C}_1$ является функция e_i^n из клона $\mathscr{C}_2$,

(3) $\kappa(f(g_1,\dots,g_n)) = \kappa(f)(\kappa(g_1),\dots,\kappa(g_n))$.

Взаимно однозначный клоновый гомоморфизм называется *клоновым изоморфизмом.* Если два клона изоморфны, то гипертождество либо истинно на каждом из них, либо ложно на обоих.

Отобразить изоморфно клон, образованный функциями, определенными на множестве M, на клон функций на том же множестве можно при помощи некоторого взаимно однозначного отображения μ множества M на себя. В этом случае изоморфизм α определим так: для каждой функции f из клона

$$\alpha(f(x_1,\dots,x_n)) = \mu^{-1}(f(\mu(x_1),\dots,\mu(x_n))).$$

Зададим на множестве $\{0,1,2\}$ функцию $\lambda(x)$ равенствами

$$\lambda(0)=1, \quad \lambda(1)=0, \quad \lambda(2)=2.$$

Отметим, что $\lambda^{-1}(x)=\lambda(x)$. Функцию $f^\lambda(x_1,\dots,x_n)$ назовем *λ-двойственной функции* $f(x_1,\dots,x_n)$, если

$$f^\lambda(x_1,\dots,x_n) = \lambda(f(\lambda(x_1),\dots,\lambda(x_n))).$$

Как указано выше, клон $\mathscr{K}_1$, образованный функциями, λ-двойственными функциям некоторого клона $\mathscr{K}$, изоморфен $\mathscr{K}$.

Квазилинейная функция называется *некреативной*, если при подстановке в нее любой другой квазилинейной функции со значениями в множестве $\{0,1\}$ число существенных переменных не возрастает. Так, из существенно одноместных функций невозможно при помощи суперпозиций получить существенно многоместную функцию. Функция, представимая в виде суммы $\gamma(x_1)\oplus\dots\oplus\gamma(x_n)$, обладает «свойством поглощения»: при подстановке в нее любой функции, у которой все значения принадлежат множеству $\{0,1\}$, получается функция с меньшим числом существенных переменных.

Клоны, образованные некреативными функциями, назовем *некреативными.* Клоны, в которых имеются креативные функции, назовем *креативными.* В [4] доказано, что существуют некреативные квазилинейные клоны, которые нельзя разделить никаким гипертождеством. Нашей целью является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Для любого некреативного клона $\mathscr{K}_1$ и любого креативного клона $\mathscr{K}_2$ найдется гипертождество, истинное на $\mathscr{K}_1$ и ложное на $\mathscr{K}_2$.*

Доказательство. Доказательство случая, когда клон $\mathscr{K}_1$ является подклоном клона $\mathscr{K}_2$, публикуется в другой статье. Список гипертождеств, разделяющих такие клоны, приведен в [5]. К сожалению, там пропущено указание о том, что речь идет о сравнимых клонах. Осталось рассмотреть случаи, в которых клоны $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ не сравнимы в решетке всех клонов рассматриваемого вида. Очевидно, если гипертождество истинно на некотором клоне, то оно истинно и на всех его подклонах. Аналогично если гипертождество ложно на каком-то клоне, то оно ложно и на всех надклонах. Вследствие этого достаточно доказать теорему для таких пар клонов $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$, что $\mathscr{K}_1$ не является подклоном никакого некреативного клона и $\mathscr{K}_2$ не содержит никакого креативного подклона. Другими словами, все подклоны клона $\mathscr{K}_2$ должны быть некреативными, а все надклоны клона $\mathscr{K}_2$ должны быть креативными.

В [6, 7] описаны все подклоны клона, образованного всеми квазилинейными функциями, определенными на множестве $\{0,1,2\}$, со значениями в множестве $\{0,1\}$. Там же изображена решетка по включению, образованная этими подклонами. Часть этой решетки, содержащая подклоны функций рассматриваемого вида, изображена на рис. 1. В нее включены все креативные клоны, обладающие максимальными некреативными подклонами. Вершины графа сопоставлены изучаемым клонам, при этом простая вершина соответствует некреативному клону, а вершина в кружочке — креативному. Обозначения максимальных некреативных клонов надчеркнуты, обозначения минимальных креативных клонов подчеркнуты. Ввиду сказанного выше не надо рассматривать клоны $\mathscr{J}_{00}^{\varphi}$, $\mathscr{F}_0^{\varphi}$, $\mathscr{F}_0^{\psi}$, $\mathscr{J}_{00}^{\varphi\psi}$, $\mathscr{L}_{\varphi\bar{\gamma}}$, $\mathscr{H}_{\varphi}$, $\mathscr{H}_{\psi}$, $\mathscr{H}_{\varphi\psi}$, $\mathscr{G}$.

Не будем рассматривать клоны, соответствующие вершинам графа на рис. 1, находящимся справа от вертикальной оси симметрии, так как они изоморфны соответственно клонам, отвечающим вершинам, находящимся слева от вертикальной оси симметрии.

Из табл. 2 можно выявить все пары некреативных креативных клонов, которые следует разделить гипертождествами.

Таблица 2

Клон	Надо отделить от клонов
$\mathscr{J}_{10}^{\varphi}$	$\mathscr{S}_{\psi}$, $\mathscr{L}_{\varphi}$, $\mathscr{L}_{\varphi\gamma}$
$\mathscr{J}_{10}^{\psi}$	$\mathscr{S}_{\varphi}$, $\mathscr{L}_{\varphi}$, $\mathscr{L}_{\varphi\gamma}$
$\mathscr{J}_{\infty\infty}^{\varphi\psi}$	$\mathscr{S}_{\varphi}$, $\mathscr{S}_{\psi}$, $\mathscr{L}_{\varphi}$, $\mathscr{L}_{\varphi\gamma}$
$\mathscr{F}_{0}^{\varphi\psi}$	$\mathscr{S}_{\varphi}$, $\mathscr{L}_{\varphi}$, $\mathscr{L}_{\varphi\gamma}$
$\mathscr{F}_{\infty}^{\varphi\psi}$	$\mathscr{S}_{\varphi}$, $\mathscr{S}_{\psi}$, $\mathscr{L}_{\varphi}$, $\mathscr{L}_{\varphi\gamma}$

Нам потребуется информация о составе изучаемых клонов. Строение квазилинейных клонов рассматриваемого вида описано в [6, 7]. В табл. 3 указаны

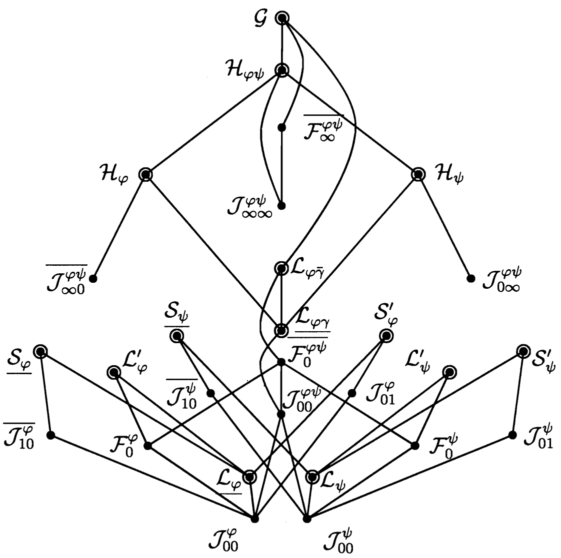

Рис. 1. Смежные креативные и некреативные клоны

Таблица 3

Клон	Содержащиеся функции	Изоморфный клон
$\mathscr{J}^{\varphi}_{10}$	$e^n_i, c^n_0, \varphi^n_i$	$\mathscr{J}^{\psi}_{01}$
$\mathscr{J}^{\psi}_{10}$	e^n_i, c^n_0, ψ^n_i	$\mathscr{J}^{\varphi}_{01}$
$\mathscr{J}^{\varphi\psi}_{\infty\infty}$	$e^n_i, c^n_0, c^n_1, \varphi^n_i, \psi^n_i, \gamma^n_i, \tilde{\gamma}^n, 1 \oplus \tilde{\gamma}^n$	$\mathscr{J}^{\varphi\psi}_{\infty\infty}$
$\mathscr{F}^{\varphi\psi}_{0}$	$e^n_i, \varphi^n_i, 1 \oplus \varphi^n_i, \psi^n_i, 1 \oplus \psi^n_i$	$\mathscr{F}^{\varphi\psi}_{0}$
$\mathscr{F}^{\varphi\psi}_{\infty}$	$e^n_i, c^n_0, c^n_1, \varphi^n_i, 1 \oplus \varphi^n_i, \psi^n_i, 1 \oplus \psi^n_i, \gamma^n_i, \tilde{\gamma}^n, 1 \oplus \tilde{\gamma}^n$	$\mathscr{F}^{\varphi\psi}_{\infty}$
$\mathscr{L}_{\varphi}$	$e^n_i, \varphi^n_i, \tilde{\varphi}^{2k+1}$ $(k \geqslant 0)$	$\mathscr{L}_{\psi}$
$\mathscr{L}_{\varphi\gamma}$	$e^n_i, \varphi^n_i, \psi^n_i, \varphi \oplus \tilde{\gamma}^n, \psi \oplus \tilde{\gamma}^n$	$\mathscr{L}_{\varphi\gamma}$
$\mathscr{S}_{\varphi}$	$e^n_i, c^n_0, \varphi^n_i, \tilde{\varphi}^n$	$\mathscr{S}'_{\psi}$
$\mathscr{S}_{\psi}$	$e^n_i, c^n_0, \psi^n_i, \tilde{\psi}^n$	$\mathscr{S}'_{\varphi}$

функции, образующие клоны, которые будем рассматривать.

Докажем, что гипертождество

$$\forall F\, (F(F(x,x,x), F(x,x,x), F(x,x,x)) \approx F(F(x,y,z), F(z,x,y), F(z,y,x))$$

истинно на клонах $\mathscr{J}^{\varphi}_{10}$, $\mathscr{J}^{\psi}_{10}$, $\mathscr{J}^{\varphi\psi}_{\infty\infty}$, $\mathscr{F}^{\varphi\psi}_{0}$, $\mathscr{F}^{\varphi\psi}_{\infty}$ и ложно на клонах $\mathscr{L}_{\varphi}$, $\mathscr{L}_{\varphi\gamma}$, $\mathscr{S}_{\varphi}$, $\mathscr{S}_{\psi}$. С учетом сказанного ранее это завершит доказательство теоремы.

Для $\{ijk\} = \{1,2,3\}$ через μ^3_{ij} обозначим сумму вида $\mu(x_i) \oplus \mu(x_j) \oplus c_0(x_k)$. Все функции от трех переменных любого из клонов $\mathscr{J}^{\varphi}_{10}$, $\mathscr{J}^{\psi}_{10}$, $\mathscr{J}^{\varphi\psi}_{\infty\infty}$, $\mathscr{F}^{\varphi\psi}_{0}$, $\mathscr{F}^{\varphi\psi}_{\infty}$ принадлежат множеству

$$\bigl\{e^3_i, c^3_0, c^3_1, \varphi^3_i, 1 \oplus \varphi^3_i, \psi^3_i, 1 \oplus \psi^3_i, \gamma^3_i, 1 \oplus \gamma^3_i, \gamma^3_{ij}, 1 \oplus \gamma^3_{ij}, \tilde{\gamma}^3, 1 \oplus \tilde{\gamma}^3\bigr\}.$$

При $F \in \{e^3_i, c^3_0, c^3_1\}$ равенство очевидно. Проверим остальные значения.

$F = \varphi^3_2$:

$$\varphi^3_2\bigl(\varphi^3_2(x,x,x), \varphi^3_2(x,x,x), \varphi^3_2(x,x,x)\bigr) = \varphi\bigl(\varphi^3_2(x,x,x)\bigr) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(x),$$

$$\varphi_2^3\big(\varphi_2^3(x,y,z),\varphi_2^3(z,x,y),\varphi_2^3(z,y,x)\big)=\varphi\big(\varphi_2^3(z,x,y)\big)=\varphi(\varphi(x))=\varphi(x).$$

При $F\in\{\varphi_1^3,\varphi_3^3,\psi_i^3\}$ аналогичные проверки также показывают, что левая часть совпадает с правой.

$F=1\oplus\varphi_2^3$:

$$1\oplus\varphi_2^3\big(1\oplus\varphi_2^3(x,y,z),1\oplus\varphi_2^3(z,x,y),1\oplus\varphi_2^3(z,y,x)\big)$$
$$=1\oplus\varphi\big(1\oplus\varphi_2^3(z,x,y)\big)=1\oplus\varphi(1\oplus\varphi(x))=\varphi(x),$$

$$1\oplus\varphi_2^3\big(1\oplus\varphi_2^3(x,x,x),1\oplus\varphi_2^3(x,x,x),1\oplus\varphi_2^3(x,x,x)\big)$$
$$=1\oplus\varphi\big(1\oplus\varphi_2^3(x,x,x)\big)=1\oplus\varphi(1\oplus\varphi(x))=\varphi(x).$$

Проверки для $F\in\big\{1\oplus\varphi_1^3,1\oplus\varphi_3^3,1\oplus\psi_i^3\big\}$ аналогичны.

$F=\gamma_2^3$:

$$\gamma_2^3\big(\gamma_2^3(x,x,x),\gamma_2^3(x,x,x),\gamma_2^3(x,x,x)\big)=\gamma\big(\gamma_2^3(x,x,x)\big)=\gamma(\gamma(x))=0,$$
$$\gamma_2^3\big(\gamma_2^3(x,y,z),\gamma_2^3(z,x,y),\gamma_2^3(z,y,x)\big)=\gamma\big(\gamma_2^3(z,x,y)\big)=\gamma(\gamma(x))=0.$$

Случаи $F=\gamma_1^3$ и $F=\gamma_3^3$ аналогичны, а при $F=1\oplus\gamma_i^3$ получаем равенство $1=1$.

$F(x,y,z)=\gamma_{13}^3(x,y,z)=\gamma(x)\oplus\gamma(z)$:

$$\gamma_{13}^3\big(\gamma_{13}^3(x,x,x),\gamma_2^3(x,x,x),\gamma_{13}^3(x,x,x)\big)=\gamma(\gamma(x)\oplus\gamma(x))\oplus\gamma(\gamma(x)\oplus\gamma(x))=0,$$

$$\gamma_{13}^3\big(\gamma_{13}^3(x,y,z),\gamma_2^3(z,x,y),\gamma_{13}^3(y,z,x)\big)=\gamma(\gamma(x)\oplus\gamma(z))\oplus\gamma(\gamma(y)\oplus\gamma(x))=0\oplus0=0.$$

Случаи $F=\gamma_{23}^3$, $F=\gamma_{12}^3$, $F=1\oplus\gamma_{ij}^3$ аналогичны.

$F(x,y,z)=\gamma(x)\oplus\gamma(y)\oplus\gamma(z)$:

$$\gamma(\gamma(x)\oplus\gamma(x)\oplus\gamma(x))\oplus\gamma(\gamma(x)\oplus\gamma(x)\oplus\gamma(x))\oplus\gamma(\gamma(x)\oplus\gamma(x)\oplus\gamma(x))=0\oplus0\oplus0$$
$$=\gamma(\gamma(x)\oplus\gamma(y)\oplus\gamma(z))\oplus\gamma(\gamma(z)\oplus\gamma(x)\oplus\gamma(y))\oplus\gamma(\gamma(y)\oplus\gamma(z)\oplus\gamma(x)).$$

При $F(x,y,z)=1\oplus\gamma(x)\oplus\gamma(y)\oplus\gamma(z)$ получаем равенство $1=1$.

Таким образом, рассматриваемое гипертождество истинно на клонах $\mathscr{I}_{10}^{\varphi}$, $\mathscr{I}_{10}^{\psi}$, $\mathscr{I}_{\infty\infty}^{\varphi\psi}$, $\mathscr{F}_0^{\varphi\psi}$, $\mathscr{F}_\infty^{\varphi\psi}$. Докажем, что оно ложно на клонах $\mathscr{L}_\varphi$, $\mathscr{L}_{\varphi\gamma}$, $\mathscr{S}_\varphi$, $\mathscr{S}_\psi$. Вычислим левую часть при $F(x,y,z)=\varphi(x)\oplus\varphi(y)\oplus\varphi(z)$:

$$\varphi(\varphi(x)\oplus\varphi(x)\oplus\varphi(x))\oplus\varphi(\varphi(x)\oplus\varphi(x)\oplus\varphi(x))\oplus\varphi(\varphi(x)\oplus\varphi(x)\oplus\varphi(x))$$
$$=\varphi(\varphi(x))\oplus\varphi(\varphi(x))\oplus\varphi(\varphi(x))=\varphi(x)\oplus\varphi(x)\oplus\varphi(x)=\varphi(x).$$

Правая часть не совпадает с левой:

$$\varphi(\varphi(x)\oplus\varphi(y)\oplus\varphi(z))\oplus\varphi(\varphi(z)\oplus\varphi(x)\oplus\varphi(y))\oplus\varphi(\varphi(y)\oplus\varphi(z)\oplus\varphi(x))$$
$$=\varphi(x)\oplus\varphi(y)\oplus\varphi(z).$$

Такой же результат получаем при $F(x,y,z)=\psi(x)\oplus\psi(y)\oplus\psi(z)$. Это означает, что гипертождество не ложно на клонах $\mathscr{L}_\varphi$, $\mathscr{S}_\varphi$, $\mathscr{S}_\psi$.

Гипертождество ложно также на клоне $\mathscr{L}_{\varphi\gamma}$, так как при

$$F(x,y,z)=\varphi(x)\oplus\gamma(y)\oplus\gamma(z)$$

получаем такие равенства:

$$\varphi(\varphi(x)\oplus\gamma(x)\oplus\gamma(x))\oplus\gamma(\varphi(x)\oplus\gamma(x)\oplus\gamma(x))\oplus\gamma(\varphi(x)\oplus\gamma(x)\oplus\gamma(x))$$
$$=\varphi(\varphi(x)\oplus0)\oplus0\oplus0=\varphi(x),$$

$$\varphi(\varphi(x) \oplus \gamma(y) \oplus \gamma(z)) \oplus \gamma(\varphi(z) \oplus \gamma(x) \oplus \gamma(y)) \oplus \gamma(\varphi(y) \oplus \gamma(z) \oplus \gamma(x)) \\ = \varphi(x) \oplus \gamma(y) \oplus \gamma(z) \oplus 0 \oplus 0 = \varphi(x) \oplus \gamma(y) \oplus \gamma(z).$$

Выше предполагалось, что значения всех неселекторных квазилинейных функций принадлежат множеству $\{0,1\}$. Обозначим клон, состоящий из всех таких функций и селекторов, через $\mathscr{Z}_1$, а через $\mathscr{Z}_2$ и $\mathscr{Z}_3$ — клоны, образованные селекторами и неселекторными квазилинейными функциями, у которых все значения принадлежат множествам $\{0,2\}$ и $\{1,2\}$ соответственно. Очевидно, эти клоны изоморфны. Изоморфны и клоны, занимающие одинаковые места в решетках всех подклонов. Значения гипертождества на изоморфных клонах совпадают, поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть некреативный клон $\mathscr{K}_1$ является подклоном клона $\mathscr{Z}_i$, а креативный клон $\mathscr{K}_2$ является подклоном клона $\mathscr{Z}_j$. Если клон $\mathscr{K}_1$ не изоморфен никакому подклону клона $\mathscr{K}_2$, то гипертождество*

$$\forall F\,(F(F(x,x,x),F(x,x,x),F(x,x,x)) \approx F(F(x,y,z),F(z,x,y),F(z,y,x))$$

истинно на $\mathscr{K}_1$ и ложно на $\mathscr{K}_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Денеке К., Мальцев И. А., Решке М.* О разделимости булевых клонов гипертождествами // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1050–1066.
2. *Denecke K., Wismath S. L.* Hyperidentities and clones. Amsterdam: Gordon & Breach Publ., 2000.
3. *Мальцев И. А.* Некоторые свойства клеток алгебр Поста // Дискрет. анализ. 1973. № 23. С. 24–31.
4. *Мальцев И. А.* Гипертождества квазилинейных клонов на трехэлементном множестве // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 2. С. 350–363.
5. *Мальцев И. А.* Разделение квазилинейных клонов гипертождествами // Междунар. конф. «Мальцевские чтения» 21–25 ноября 2016 г.: Тез. докл. Новосибирск, 2016. С. 190.
6. *Деметрович Я., Мальцев И. А.* О существенно минимальных TC-клонах на трехэлементном множестве // MTA SZTAKI Kozl. 1984. N 32. P. 115–151.
7. *Деметрович Я., Мальцев И. А.* О строении клона Бурле на трехэлементном множестве // Acta Cybern. 1989. V. 9, N 1. P. 1–25.

Статья поступила 30 декабря 2016 г.

Мальцев Иван Анатольевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
malcev@math.nsc.ru