Сибирский математический журнал
Июль—август, 2017. Том 58, № 4

УДК 517.518+517.54

О РЕГУЛЯРНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ, ОБРАТНЫХ К ГОМЕОМОРФИЗМАМ КЛАССОВ СОБОЛЕВА — ОРЛИЧА

А. В. Меновщиков

Аннотация. Определены условия для гомеоморфизма $\varphi \in W^1_M$, обеспечивающие принадлежность обратного отображения некоторому классу Соболева — Орлича W^1_F. Также получены необходимые и достаточные условия, при которых гомеоморфизм областей в евклидовом пространстве порождает ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича, определенных специальным классом N-функций. Как следствие этих результатов установлены требования на отображение, при выполнении которых обратный гомеоморфизм также порождает ограниченный оператор композиции другой пары пространств Соболева — Орлича, определяемой по первой.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.411

Ключевые слова: класс Соболева — Орлича, искажение и коискажение отображения, оператор композиции, N-функция.

Введение

Статья посвящена проблеме описания свойств регулярности обратного отображения к некоторому гомеоморфизму класса Соболева — Орлича W^1_M, если известны свойства регулярности прямого отображения.

Основной задачей является определение условий для гомеоморфизма $\varphi \in W^1_M$, обеспечивающих регулярность обратного отображения. Кроме того, определены необходимые и достаточные условия, при которых гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, где D, D' — области в $\mathbb{R}^n$, порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$, действующий по правилу $\varphi^* f = f \circ \varphi$. Как следствие этих результатов доказывается теорема об условиях, при выполнении которых обратный гомеоморфизм также порождает ограниченный оператор композиции другой пары пространств Соболева — Орлича, определяемой по первой. Отметим, что если N-функция M, определяющая пространство Соболева — Орлича W^1_M, степенная, то задача сводится к случаю пространств Соболева W^1_p, наиболее полное исследование которого проведено в [1]. Методы из [1] применяются для доказательства утверждений настоящей работы.

В истории изучения вопроса определения свойств регулярности обратного отображения по известным свойствам регулярности прямого можно выделить два направления. Первое из них основано на методах квазиконформного анализа, второе возникло при исследовании свойств специальных классов отображений, появившихся при изучении некоторых вопросов нелинейной теории упругости. Приведем основные этапы исследований в каждом направлении.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (код проекта № 16–41–02004).

В первую очередь рассмотрим исторически первое направление, связанное с квазиконформным анализом. В [2, 3] сформулирован следующий базовый результат: *гомеоморфизм, обратный к квазиконформному гомеоморфизму $\varphi : \Omega \to \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, также квазиконформен.* Этот результат можно представить в следующем виде: *гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$, удовлетворяющий условию*

$$|D\varphi(x)|^n \leq K|\det D\varphi(x)|$$

для почти всех $x \in \Omega$ с некоторой постоянной K, не зависящей от $x \in \Omega$, имеет обратный, принадлежащий $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega')$ и такой, что

$$|D\varphi^{-1}(y)|^n \leq K'|\det D\varphi^{-1}(y)|$$

для почти всех $y \in \Omega'$, где постоянная K' выражается через K.

Для исследования проблемы описания свойств регулярности обратного отображения важными являются результаты работы [4], возникшей на основе методов из [5, 6]. В ней впервые изучены свойства отображений класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ с условием конечного искажения: $D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве нулей якобиана для отображения $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Название этого класса отображений позже было предложено в [7, 8].

Новыми методами и методами квазиконформного анализа из [9, 10] в [11, 12] исследовался вопрос об аналитических свойствах гомеоморфизма $\psi : \Omega' \to \Omega$, обратный φ к которому индуцирует ограниченный оператор $\varphi^* : L^1_p(\Omega') \to L^1_q(\Omega)$, $n \leq q \leq p < \infty$. Полученные свойства гомеоморфизма ψ обеспечивают ограниченность оператора $\psi^* : L^1_{q/(q-n+1)}(\Omega) \to L^1_{p/(p-n+1)}(\Omega')$. Окончательные результаты установлены в [1] с использованием геометрической теории меры. Отметим, что в [11, 12] возникает класс отображений с ограниченным (p, q)-искажением (отображение $f : \Omega \to \Omega'$ принадлежит $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, а его локальное p-искажение

$$K_p(x, f) = \inf\{k(x) : |Df(x)| \leq k(x)J(x, f)^{1/p}\}$$

интегрируемо в степени $\varkappa$, $1/\varkappa = 1/q - 1/p$, $p \geq q \geq 1$). Подробное изучение свойств таких отображений читатель может найти в [13].

Как отмечалось ранее, наиболее полные результаты по рассматриваемому вопросу в случае отображений классов Соболева получены в [1]. Одним из основных утверждений этой работы является приведенная в разд. 1 теорема 4, отличительная особенность которой состоит в том, что исходное отображение не предполагается принадлежащим некоторому классу Соболева, что обеспечивает более широкий круг ее применения. Приведем еще один результат из [1], аналог которого для пространств Соболева — Орлича мы доказываем в настоящей работе (через $\operatorname{adj} A$ будем обозначать матрицу, присоединенную к A, т. е. составленную из алгебраических дополнений для соответствующих элементов транспонированной матрицы).

Теорема 1 [1]. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:*

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, $n - 1 \leq q \leq \infty$;

2) *φ имеет конечное коискажение* ($\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ *почти всюду на множестве* $Z = \{x \in D : J(x, \varphi) = 0\}$);

3) $\mathscr{K}_{\varphi,p}(x) = \frac{|\operatorname{adj} D\varphi(x)|}{|J(x,\varphi)|^{(n-1)/p}} \in L_\rho(D)$, *где* $1/\rho = (n-1)/q - (n-1)/p, n - 1 \leq q \leq p \leq \infty$ ($\rho = \infty$ *при* $q = p$).

Тогда обратный гомеоморфизм имеет следующие свойства:

4) $\varphi^{-1} \in W^1_{p',\mathrm{loc}}(D')$, *где* $p' = p/(p-n+1)$, $p' = 1$ *при* $p = \infty$;

5) φ^{-1} *имеет конечное искажение;*

6) $K_{\varphi^{-1},q'}(y) = \frac{|D\varphi^{-1}(y)|}{|J(y,\varphi^{-1})|^{1/q'}} \in L_\rho(D')$, *где* $q' = q/(q-n+1)$, $q' = \infty$ *при* $q = n-1$.

В силу условий на исходное отображение в теореме 1 можно заметить еще одну существенную особенность приведенных в [1] результатов. В ней предполагается, что гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает свойством конечного коискажения ($\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве $Z = \{x \in D : J(x,\varphi) = 0\}$), в то время как во многих предшествующих работах по этому вопросу требуется условие конечности искажения ($D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве $Z = \{x \in D : J(x,\varphi) = 0\}$).

Далее рассмотрим основные этапы второго направления изучения исследуемой проблемы. Необходимость определения свойств обратного отображения для гомеоморфизмов класса Соболева W^1_p возникла также в связи с изучением некоторых вопросов нелинейной теории упругости. В работах Болла [14, 15] доказана

Теорема 2 [15]. *Пусть* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *— ограниченная строго липшицева область. Если функция* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит* $W^1_q(\Omega)$, $q > n$, *совпадает на* $\partial\Omega$ *с некоторым гомеоморфизмом* u_0 *области* Ω, *причем* $u_0(\Omega)$ *удовлетворяет условию конуса, а* $\det Du(x) > 0$ *почти всюду в* Ω, *и для некоторого* $p' > n$ *выполнено условие*

$$\int\limits_\Omega |Du^{-1}(u(x))|^{p'} \det Du(x)\, dx < \infty,$$

то исходная функция u *является гомеоморфизмом из* Ω *в* $u_0(\Omega)$, *а обратное отображение* u^{-1} *принадлежит классу* $W^1_{p'}(u_o(\Omega))$.

Доказательство того факта, что отображение $u : \Omega \to u_0(\Omega)$ является гомеоморфизмом, приведено в [15]. Покажем, что второе утверждение теоремы 2 может быть получено как частный случай теоремы 1:

$$\int\limits_\Omega |Du^{-1}(u(x))|^{p'} \det Du(x)\, dx$$
$$= \int\limits_\Omega \frac{|\operatorname{adj} Du(x)|^{p'}}{J(x,u)^{(p'-1)}}\, dx = \int\limits_\Omega \left(\frac{|\operatorname{adj} Du(x)|}{J(x,u)^{(n-1)/p}} \right)^{p'} dx < \infty,$$

где $p = p'(n-1)/(p'-1)$. Следовательно, величина p больше $n-1$, так как по условию теоремы $p' > n$. Условие $1/\rho = (n-1)/q - (n-1)/p$ теоремы 1 в данном случае выглядит следующим образом: $1/p' = (n-1)/q - (p'-1)/p'$, откуда заключаем, что $q = n-1$. Поскольку в [15] требуется, чтобы исходное отображение u принадлежало W^1_q, $q > n$, а в теореме 1 для достижения того же самого результата требуется, чтобы u принадлежало только W^1_{n-1}, из приведенных рассуждений следует, что указанная теорема Болла содержится в качестве частного случая в теореме 1.

Наряду с данным результатом в [14, 15] определены классы отображений

$$A_{p,q} = \left\{ f \in W^1_p(\Omega) : \operatorname{adj} Df \in L_q \right\},$$

где $p \geq n-1$ и $q \geq p/(p-1)$. Исследованию отображений различных подклассов в $A_{p,q}$ посвящены приводимые ниже работы.

О некоторых результатах в данном направлении уже упоминалось выше (отображения с конечным искажением). В [16–18] определены некоторые свойства отображений с конечным искажением без предположения о принадлежности такого отображения классу W_n^1. Также в статьях [16–18] рассмотрен класс отображений с экспоненциально интегрируемым искажением и приведено следующее утверждение. *Пусть $f \in W_1^1(\Omega)$ удовлетворяет условию*

$$|Df(x)|^n \leq K(x)J(x,f)$$

почти всюду в Ω, где $K \geq 1$ и $\exp(\lambda K)$ интегрируема для некоторого $\lambda > 0$. Если $J(x,f)$ интегрируем, то f или постоянное или открытое и дискретное отображение. Дальнейшее изучение отображений с экспоненциально интегрируемым искажением представлено в статье [19], в которой рассмотрен более общий случай, когда $\exp(\Psi(K)) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $\Psi(t)$ — строго возрастающая дифференцируемая функция, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям.

Также стоит отметить работы, посвященные определению условий, при которых отображения с конечным искажением обладают N-свойством Лузина. Основные методы решения этой задачи были заложены при установлении N-свойства для отображений с ограниченным искажением в [20]. Для отображений с конечным искажением этот вопрос последовательно изучался в [6, 21–23] и в [18]. В [24] данная проблема изучена для отображений с экспоненциально интегрируемым искажением.

Достижения в исследовании приведенных выше различных классов отображений позволили решить задачу об определении свойств обратного отображения по известным свойствам прямого. Сначала данная проблема была изучена для различных гомеоморфизмов $f : \Omega \to f(\Omega)$, $\Omega, f(\Omega) \in \mathbb{R}^2$, а затем получено обобщение для пространств $\mathbb{R}^n$, $n > 2$.

В [25, 26] исследовался вопрос: при каких условиях обратное отображение для гомеоморфизма $f : \Omega \to f(\Omega)$, $\Omega, f(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$, $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p \geq 1$, принадлежит классу $W^1_{1,\mathrm{loc}}(f(\Omega))$ или даже $W^1_{q,\mathrm{loc}}(f(\Omega))$ для некоторого $q > 1$? Наиболее важным из таких условий в [25, 26] является конечность искажения. В [25, 27–29] рассматривалась аналогичная задача, но для случая отображений с экспоненциально интегрируемым искажением. Приведем один из основных полученных в [29] результатов: *пусть Ω — область в $\mathbb{R}^2$ и $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ — гомеоморфизм с конечным искажением. Предположим, что функция искажения K_f удовлетворяет условию $\exp(\lambda K_f) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ для некоторого $\lambda > 0$. Тогда $K^p_{f^{-1}} \in L_{1,\mathrm{loc}}(f(\Omega))$ для всех $p < \lambda$.* В [30] изучается вопрос об обратимости отображений с ограниченной вариацией. Для них доказано следующее утверждение: *пусть Ω — область в $\mathbb{R}^2$ и $f : \Omega \to \Omega'$ — гомеоморфизм. Тогда $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ в том и только в том случае, когда $f^{-1} \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega')$. Более того, f и f^{-1} почти всюду дифференцируемы.*

Исследованию задачи в пространствах $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, посвящены работы [30–32]. Приведенные в них результаты были обобщены в [33]. Основное утверждение состоит в следующем: *пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, и пусть гомеоморфизм f принадлежит $W^1_{n-1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Тогда $f^{-1} \in BV_{\mathrm{loc}}(f(\Omega))$. Если f имеет конечное искажение, то f^{-1} принадлежит $W^1_{1,\mathrm{loc}}(f(\Omega))$ и имеет конечное искажение.*

Отметим, что приведенные в двух предыдущих абзацах результаты, относящиеся к отображениям с конечным искажением и к отображениям с ограниченной вариацией, в качестве частных случаев также содержатся в [1].

Данная статья организована следующим образом. В разд. 1 приводятся основные сведения из теории пространств Орлича, а также некоторые теоремы, необходимые для доказательств утверждений. В разд. 2 в теоремах 6 и 7 сформулированы утверждения о свойствах отображений, обратных к гомеоморфизмам классов Соболева — Орлича, и на их основании доказана теорема 8 об «обратимости» оператора композиции пространств Соболева — Орлича. В разд. 3 обобщен полученный ранее результат об ограниченном операторе композиции пространств L^1_M. С использованием этого обобщения, теорем 6, 7 и результата из [1] доказывается еще одно утверждение, обобщающее в некотором смысле теорему 8.

Автор благодарит Сергея Константиновича Водопьянова за постановку задачи, плодотворное сотрудничество и консультации, без которых написание данной статьи было бы невозможным.

1. Предварительные сведения

Напомним основные определения из теории пространств Орлича (формулируемые определения и утверждения читатель может найти в [34]).

Определение 1. Непрерывная выпуклая функция $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ называется *N-функцией*, если она четная и удовлетворяет условиям

$$\lim_{u\to 0} \frac{M(u)}{u} = 0, \quad \lim_{u\to\infty} \frac{M(u)}{u} = \infty.$$

Для N-функции $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ вводится дополнительная функция $M^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, определяемая формулой

$$M^*(v) = \sup\{u|v| - M(u) : u \geq 0\}.$$

Нетрудно видеть, что функция $M^*(v)$ также является N-функцией.

Пользуясь соображениями, которые обычно применяются при выводе неравенства Гёльдера, можно получить неравенство Юнга, которое играет важную роль при изучении N-функций: для всех u, v справедливо неравенство

$$uv \leq M(u) + M^*(v). \tag{1}$$

Следствием из (1) является неравенство

$$u < M^{-1}(u)M^{*-1}(u) \leq 2u. \tag{2}$$

Выпуклую функцию $Q(u)$ будем называть *главной частью N-функции* $M(u)$, если $Q(u) = M(u)$ при больших значениях аргумента.

Будем писать $M = M_1$, если функции M и M_1 совпадают, и $M < M_1$, если $M(u) < M_1(u)$ при больших значениях аргумента.

Существенную роль играет скорость роста N-функции $M(u)$ при $u \to \infty$. Поэтому удобно рассматривать специальные классы N-функций, характер поведения которых удовлетворяет некоторым условиям.

Говорят, что N-функция *удовлетворяет Δ_2-условию* (глобально), если существует такая постоянная $k > 0$, что

$$M(2u) \leq kM(u) \quad \text{для всех } u.$$

Можно показать, что N-функции, удовлетворяющие Δ_2-условию, растут не быстрее степенных.

Говорят, что N-функция *удовлетворяет* Δ'*-условию* (глобально), если существует такая постоянная $c > 0$, что

$$M(uv) \le cM(u)M(v) \quad \text{для всех } u, v.$$

Напомним определение пространств Орлича. *Классом Орлича* $\widetilde{L}_M(D)$, определенным некоторой N-функцией M, называют класс таких вещественных измеримых функций $u : D \to \mathbb{R}$ (D — область в $\mathbb{R}^n$), для которых

$$\int_D M(u(x))\, dx < \infty.$$

Определение 2. *Пространством Орлича* $L_M(D)$ называют совокупность измеримых функций $u : D \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$\int_D u(x)v(x)\, dx < \infty$$

при всех $v : D \to \mathbb{R}$, $v \in \widetilde{L}_{M^*}(D)$.

Если функция $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ удовлетворяет Δ_2-условию, то $\widetilde{L}_M(D)$ совпадает с $L_M(D)$.

Пространство Орлича будем рассматривать с нормой Люксембурга:

$$\|u\|_M = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_D M\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right) dx \le 1\right\}.$$

Заметим, что если N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то имеют место следующие соотношения:

$$\frac{1}{k}\int_D M(u)\, dx \le \|u\|_M^{\ln k/\ln 2} \le k\int_D M(u)\, dx,$$

где k — постоянная из определения Δ_2-условия.

Нам потребуется использовать аналог неравенства Гёльдера для функций из пространств Орлича [35]. Оно имеет следующий вид:

$$\|uv\|_M \le 2\|u\|_{M_1}\|v\|_{M_2}, \tag{3}$$

где M, M_1, M_2 —N-функции такие, что

$$M_1(u) = M(2M_3(u)), \qquad M_2(u) = M(2M_3^*(u)). \tag{4}$$

Далее определим пространства Соболева — Орлича.

Определение 3 [36]. *Пространством Соболева — Орлича* $W_M^1(D)$ (D — область в $\mathbb{R}^n$) называют совокупность классов эквивалентности функций из пространства Орлича $L_M(D)$, имеющих первые обобщенные производные, принадлежащие пространству Орлича $L_M(D)$.

В пространстве Соболева — Орлича $W_M^1(D)$ рассматривается норма

$$\left\|f \mid W_M^1\right\| = \|f \mid L_M\| + \|Df \mid L_M\|.$$

Определение 4 [36]. *Пространством Соболева — Орлича* $L_M^1(D)$ (D — область в $\mathbb{R}^n$) называют совокупность классов эквивалентности локально суммируемых функций с первыми обобщенными производными, принадлежащими пространству Орлича $L_M(D)$.

В пространстве Соболева — Орлича $L^1_M(D)$ рассматривается полунорма

$$\left\|f \mid L^1_M\right\| = \|Df \mid L_M\|.$$

Будем обозначать символом $\mathring{L}^1_M(D)$ замыкание множества финитных гладких функций в пространстве $L^1_M(D)$.

Будем говорить, что гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, где D, D' — области в $\mathbb{R}^n$, *порождает ограниченный оператор композиции* $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$, действующий по правилу $\varphi^* f = f \circ \varphi$, если существует постоянная $K < \infty$ такая, что

$$\left\|\varphi^* f \mid L^1_M(D)\right\| \leq K\left\|f \mid L^1_{M_1}(D')\right\|$$

для любой функции $f \in L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D')$.

Для доказательства формулируемых здесь результатов потребуются следующие теоремы.

Теорема 3 [37]. *Пусть функции M и M_1 такие, что функция M_2 из равенств (4) удовлетворяет Δ'-условию. Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$ *(абсолютно непрерывно на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси и имеющих непустое пересечение с D);*

2) *отображение φ имеет конечное искажение ($\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$, $D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве $Z = \{x \in D : J(x,\varphi) = 0\}$);*

3) *конечна величина* $K = \left\|\frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_{M_2}\right\|$ $\left(K = \left\|\frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_\infty\right\|\right.$ *при* $\left.M = M_1\right)$.

Норма оператора $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$ эквивалентна величине K, а именно $\alpha K \leq \|\varphi^*\| \leq K$, где α — положительная постоянная.

В настоящей работе мы усилим приведенный результат и докажем его для более широкого класса N-функций (теорема 9).

Доказательство основного результата, сформулированного в теореме 6, основано на следующем утверждении (подробнее об аппроксимативной дифференцируемости см., например, [1]).

Теорема 4 [1]. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:*

1) *φ аппроксимативно дифференцируем почти всюду;*

2) $\mathrm{adj}\, D\varphi \in L_1$;

3) *отображение φ имеет конечное коискажение;*

4) *φ обладает свойством Лузина на гиперповерхностях.*

Тогда обратное отображение $\varphi^{-1} : D' \to D$ имеет такие свойства:

5) *принадлежит классу* ACL;

6) $D\varphi^{-1} \in L_1(D')$;

7) *φ^{-1} имеет конечное искажение.*

С другой стороны, если для обратного к гомеоморфизму $\varphi : D \to D'$ отображения выполнены свойства 5–7, а гомеоморфизм φ аппроксимативно дифференцируем на множестве Z, то φ обладает свойствами 1–4.

Заметим, что свойство 4 выполняется для отображений классов Соболева — Орлича при соблюдении условий следующего утверждения.

Теорема 5 [38]. *Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение класса $W^1_{M,\mathrm{loc}}(D)$, где $M : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция такая, что*

$$\int\limits_1^\infty \left(\frac{t}{M(t)}\right)^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty.$$

Тогда отображение φ имеет почти всюду полный дифференциал в D. Кроме того, оно обладает N-свойством относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа на почти всех гиперповерхностях, параллельных произвольной фиксированной гиперплоскости.

2. Основной результат

В утверждениях данного раздела предполагаем, что N-функции M и M_1 выбраны таким образом, что функция M_2, определяемая из равенств (4), удовлетворяет Δ'-условию.

Теорема 6. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:*

1) *$\varphi \in W^1_{M,\mathrm{loc}}(D)$, где N-функция M удовлетворяет условиям теоремы 5;*

2) *φ имеет конечное коискажение;*

3) $\mathscr{K}_{\varphi,F_2} = \left\| \frac{|\operatorname{adj} D\varphi|}{(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|))^{n-1}} \mid L_{F_2} \right\| < \infty$.

Тогда обратный гомеоморфизм имеет такие свойства:

4) *$\varphi^{-1} \in W^1_{F_1,\mathrm{loc}}(D')$;*

5) *φ^{-1} имеет конечное искажение;*

6) $K_{\varphi^{-1},F} = \left\| \frac{|D\varphi^{-1}|}{F^{-1}(|J(x,\varphi^{-1})|)} \mid L_{F_2} \right\| < \infty$.

N-функции F, F_2 определяются равенствами

$$F^{-1}(u) = u(M^{-1}(1/u))^{n-1}, \quad F_2(u) = M_2(u^{\frac{1}{n-1}}),$$

а функция F_1 определяется из равенств

$$F(u) = F_1(2F_3(u)), \quad F_2(u) = F_1(2F_3^*(u)).$$

Доказательство. Заметим, что условия 1–3 теоремы 4 следуют из условий 1 и 2 теоремы 6. Условие 4 теоремы 4 выполнено, так как N-функция M удовлетворяет условию теоремы 5. Следовательно, для отображения $\varphi^{-1} : D' \to D$ верны заключения теоремы 4, и п. 5 настоящей теоремы установлен.

Перейдем к доказательству свойства 6. Будем обозначать через Z множество нулей якобиана для отображения φ, а через Z' — для φ^{-1}. В [1] показано, что множество Z можно выбрать таким образом, что $\varphi(Z) = \Sigma'$, где Σ' — множество сингулярности для отображения φ^{-1} (о множествах сингулярности см. [1]). Аналогично множество сингулярности Σ для φ можно выбрать так, что $Z' = \varphi(\Sigma)$.

В точках невырожденности матрицы Якоби $D\varphi(x)$ верны равенства [1] $J(y,\varphi^{-1}) = J(x,\varphi)^{-1}$ и $|D\varphi^{-1}(y)| = |J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|^{-1}|\operatorname{adj} D\varphi(\varphi^{-1}(y))|$. Используя их и приведенное ранее следствие из неравенства Юнга (2), получаем

$$\left\| \frac{|\operatorname{adj} D\varphi|}{\left(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)\right)^{n-1}} \mid L_{F_2} \right\|^{\ln k_{F_2}/\ln 2}$$
$$\geq C \int\limits_{D\setminus Z} F_2\left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi(x)|}{\left(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)\right)^{n-1}} \right) \frac{|J(x,\varphi)|}{|J(x,\varphi)|}\, dx$$
$$\geq C \int\limits_{D'\setminus(Z'\cup\Sigma')} F_2\left(\frac{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|^{-1} |\operatorname{adj} D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|^{-1}(M^{-1}(|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|))^{n-1}} \right) dy$$
$$= C \int\limits_{D'\setminus Z'} F_2\left(\frac{|D\varphi^{-1}(y)|}{F^{-1}(|J(y,\varphi^{-1})|)} \right) dy \geq C \left\| \frac{|D\varphi^{-1}|}{F^{-1}(|J(x,\varphi^{-1})|)} \mid L_{F_2} \right\|^{\ln k_{F_2}/\ln 2}.$$

Кроме того, из определения функции F_2 следует, что она удовлетворяет Δ'-условию.

Покажем, что $\varphi^{-1} \in W^1_{F_1,\mathrm{loc}}(D')$. Для этого используем неравенство Гёльдера (3):

$$\|D\varphi^{-1} \mid L_{F_1}\| \leq 2\|F^{-1}(|J(x,\varphi^{-1})|) \mid L_F\| \left\| \frac{|D\varphi^{-1}|}{F^{-1}(|J(x,\varphi^{-1})|)} \mid L_{F_2} \right\|,$$

где F и F_1 должны удовлетворять равенствам, приведенным в условии теоремы.

Из полученного выше неравенства следует конечность величины $\|D\varphi^{-1} \mid L_{F_1}\|$, и п. 4 настоящей теоремы доказан.

В качестве примера определим функции F, F_1, F_2, если функция M степенная (например, $M(u) = u^q$), а главная часть функции M_1 имеет вид $Q_1(u) = u^p(\ln u)^a$, $a \in \mathbb{R}$. Введем обозначения: $q' = q/(q-n+1)$, $p' = p/(p-n+1)$.

В первую очередь, из равенств (4) найдем функцию M_2. Ее главная часть имеет вид

$$Q_2(u) = u^{\frac{pq}{p-q}} (\ln u)^{\frac{-qa}{p-q}}.$$

Тогда главная часть функции $F_2(u)$ будет выглядеть так:

$$G_2(u) = u^{\frac{p'q'}{q'-p'}} (\ln u^{1/(n-1)})^{\frac{-qa}{p-q}}.$$

Очевидно, $F(u) = u^{q'}$. Теперь можно определить главную часть функции $F_1(u)$ с помощью приведенных в теореме соотношений:

$$G_1(u) = u^{p'} (\ln u^{1/(n-1)})^{a(p'-1)}.$$

На основании теоремы 6 устанавливается справедливость следующего утверждения.

Теорема 7. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:*

1) $\varphi \in W^1_{M,\mathrm{loc}}(D)$, *где N-функция M удовлетворяет условиям теоремы 5;*

2) φ *имеет конечное искажение;*

3) $K_{\varphi,M_1} = \left\| \frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_{M_2} \right\| < \infty$.

Тогда обратный гомеоморфизм имеет такие свойства:

4) $\varphi^{-1} \in W^1_{F_1,\mathrm{loc}}(D')$;

5) φ^{-1} *имеет конечное искажение;*

6) $K_{\varphi^{-1},F} = \left\| \frac{|D\varphi^{-1}|}{F^{-1}(|J(x,\varphi^{-1})|)} \mid L_{F_2} \right\| < \infty$.

Доказательство. Покажем, что условия 2 и 3 теоремы 6 выполнены, если выполнены условия 2 и 3 настоящей теоремы. То, что $\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z, следует непосредственно из условия 2. Далее, используя соотношение [1] $|\operatorname{adj} D\varphi(x)| \le |D\varphi(x)|^{n-1}$, получаем

$$\left\| \frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_{M_2} \right\|^{\ln k_{M_2}/\ln 2} \ge C \int\limits_D M_2\left(\frac{|D\varphi(x)|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \right) dx$$

$$\ge C \int\limits_D M_2\left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi(x)|^{\frac{1}{n-1}}}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \right) dx = \int\limits_D F_2\left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi(x)|}{\left(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)\right)^{n-1}} \right) dx$$

$$\ge C \left\| \frac{|\operatorname{adj} D\varphi^{-1}|}{\left(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)\right)^{n-1}} \mid L_{F_2} \right\|^{\ln k_{F_2}/\ln 2}.$$

Следовательно, выполнены условия теоремы 6, и верно ее заключение.

При наложении дополнительных условий на функции M и M_1 в качестве следствия теорем 3 и 7 получаем следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть функции M и M_1 удовлетворяют Δ'-условию. Пусть, кроме того, N-функция M удовлетворяет условиям теоремы 5. Если гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$ и имеет конечное коискажение, то обратное отображение $\varphi^{-1} : D' \to D$ порождает ограниченный оператор композиции ${\varphi^{-1}}^* : L^1_F(D) \to L^1_{F_1}(D')$ и имеет конечное искажение.*

Доказательство. Так как по условиям теоремы N-функции M, M_1, M_2 удовлетворяют Δ'-условию, можно воспользоваться теоремой 3 для гомеоморфизма $\varphi : D \to D'$. Тогда для этого отображения верны следующие утверждения:

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$;

2) отображение φ имеет конечное искажение;

3) конечна величина $K_{\varphi,M_1} = \left\| \frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_{M_2} \right\|$ ($K = \left\| \frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_\infty \right\|$ при $M = M_1$).

Так же, как и в теореме 6, используя аналог неравенства Гёльдера (3), делаем вывод, что $\varphi \in W^1_{M,\mathrm{loc}}(D)$. Заметим, что выполнены все условия теоремы 7 и функция $F(u)$ удовлетворяет Δ'-условию, если этому условию удовлетворяет функция $M(u)$. В результате получаем, что отображение $\varphi^{-1} : D' \to D$ имеет следующие свойства:

4) $\varphi^{-1} \in \mathrm{ACL}(D')$;

5) φ^{-1} имеет конечное искажение;

6) $K_{\varphi^{-1},F} = \left\| \frac{|D\varphi^{-1}|}{F^{-1}(|J(x,\varphi^{-1})|)} \mid L_{F_2} \right\| < \infty$.

По теореме 3 для того, чтобы отображение φ^{-1} порождало ограниченный оператор композиции ${\varphi^{-1}}^* : L^1_F(D) \to L^1_{F_1}(D')$, достаточно, чтобы были выполнены условия 4–6, а N-функции, определяющие пространства L^1_F и $L^1_{F_1}$, удовлетворяли Δ'-условию. Но в приведенной ниже теореме 9 показано, что при доказательстве этого факта ограничение необходимо накладывать только на N-функцию F (она должна удовлетворять Δ'-условию). Поэтому можно сделать вывод, что отображение $\varphi^{-1} : D' \to D$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^{-1^*} : L^1_F(D) \to L^1_{F_1}(D')$ и имеет конечное искажение. $\square$

3. Обобщение теоремы об ограниченном операторе композиции

Рассмотрим вторую задачу, которая была упомянута во введении. Доказанная ниже теорема представляет собой некоторое обобщение теоремы 3 из разд. 1.

Введем обозначения: $\alpha = \ln C_M / \ln 2$, $\beta = \ln C_{M_1} / \ln 2$, $\gamma = \alpha\beta/(\beta - \alpha)$, где C_M, C_{M_1} — константы из Δ_2-условия для функций M и M_1 соответственно.

Перед тем как формулировать основной результат, докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$, функции M и M_1 удовлетворяют Δ_2-условию. Тогда*

$$\Phi(A') = \sup_{f \in \mathring{L}^1_{M_1}(A')} \left(C \frac{\|\varphi^* f \mid \mathring{L}^1_M(\varphi^{-1}(A'))\|}{\|f \mid \mathring{L}^1_{M_1}(A')\|} \right)^{\gamma},$$

где C — некоторая постоянная, является ограниченной квазиаддитивной функцией, определенной на открытых множествах из области D'.

Доказательство. Пусть A'_i, $i \in N$, — открытые попарно не пересекающиеся множества в D', $A'_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A'_i$, $A_i = \varphi^{-1}(A'_i)$, $i = 0, 1, \dots$. Рассмотрим такую функцию $f_i \in \mathring{L}^1_{M_1}(A'_i)$, чтобы одновременно выполнялись условия

$$\|\varphi^* f_i \mid \mathring{L}^1_M(A_i)\| \geq \left(\Phi(A'_i)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right)^{1/\gamma} \|f_i \mid \mathring{L}^1_{M_1}(A'_i)\|,$$

$$\left(\|f_i \mid \mathring{L}^1_{M_1}(A'_i)\|\right)^{\beta} = \Phi(A'_i)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2^i}\right), \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Такая функция существует в силу того, что норма в пространстве L_M однородна, отсюда следует, что умножение на положительную константу не изменит знака приведенного выше неравенства, и, подбирая константу соответствующим образом, всегда можно добиться выполнения последнего равенства. Полагая $f_N = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i$ и применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\left\|\varphi^* f_N \mid \mathring{L}^1_M\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)\right\| \geq \left(\frac{1}{C_M^2}\right)^{1/\alpha} \left(\sum_{i=1}^{N} \|\varphi^* f_i \mid \mathring{L}^1_M(A_i)\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

$$\geq \left(\frac{1}{C_M^2}\right)^{1/\alpha} \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\Phi(A'_i)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right)^{\alpha/\gamma} \|f_i \mid \mathring{L}^1_{M_1}(A'_i)\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

$$\geq \left(\frac{1}{C_M^2}\right)^{1/\alpha} \left(\sum_{i=1}^{N} \Phi(A'_i)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right)^{1/\gamma} \left(\sum_{i=1}^{N} \|f_i \mid \mathring{L}^1_{M_1}(A'_i)\|^{\beta}\right)^{1/\beta}$$

$$\geq \left(\frac{1}{C_M^2}\right)^{1/\alpha} \left(\frac{1}{C_{M_1}^2}\right)^{1/\beta} \left(\sum_{i=1}^{N} \Phi(A'_i) - \varepsilon\Phi(A'_0)\right)^{1/\gamma} \left\|f_N \mid \mathring{L}^1_{M_1}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A'_i\right)\right\|.$$

Заметим, что $C = \left(\frac{1}{C_M^2}\right)^{1/\alpha}\left(\frac{1}{C_{M_1}^2}\right)^{1/\beta}$ — константа, зависящая только от конкретного вида N-функций M и M_1. Отсюда следует, что

$$(\Phi(A_0'))^{1/\gamma} \geq \sup C \frac{\left\| \varphi^* f_N \mid \mathring{L}^1_M\left(\bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i\right)\right\|}{\left\| f_N \mid \mathring{L}^1_{M_1}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i'\right)\right\|} \geq \left(\sum_{i=1}^{N} \Phi(A_i') - \varepsilon\Phi(A_0')\right)^{1/\gamma},$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $f_N \in \mathring{L}^1_{M_1}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i'\right)$ указанного выше вида. Так как N и ε произвольны, квазиаддитивность функции Φ доказана.

Используя лемму 1, можно доказать следующе утверждение.

Теорема 9. *Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$, если M_1 удовлетворяет Δ'-условию и выполнены следующие требования:*

1) *$\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$;*

2) *отображение φ имеет конечное искажение;*

3) *конечна величина $K_{\varphi,M_1} = \left\| \frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_{M_2}\right\|$ $\left(K_{\varphi,M_1} = \left\| \frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_\infty\right\|\right.$ при $\left.M = M_1\right)$.*

Если гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ и функции M, M_1 удовлетворяют Δ_2-условию, то для φ выполнены требования 1, 2 и следующее условие:

4) *конечна величина $K_{\varphi,\beta} = \left\| \frac{(M(|D\varphi|))^{1/\alpha}}{|J(x,\varphi)|^{1/\beta}} \mid L_\gamma\right\|$ $\left(K_{\varphi,\beta} = \left\| \frac{M(|D\varphi|)}{|J(x,\varphi)|} \mid L_\infty\right\|\right.$ при $\left.M = M_1\right)$.*

Доказательство. В [39] приводится доказательство того, что отображение φ, порождающее ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, $f \in L^1_p$, принадлежит классу $\mathrm{ACL}(D)$. Метод доказательства ACL-свойства применим также и к пространствам Соболева — Орлича.

Необходимость. По лемме 1 для любой $f \in \mathring{L}^1_{M_1}(A) \cap \mathrm{Lip}(A)$ выполняется неравенство

$$\left\| \varphi^* f \mid \mathring{L}^1_M(\varphi^{-1}(A))\right\| \leq C(\Phi(A))^{1/\gamma} \left\| f \mid \mathring{L}^1_{M_1}(A)\right\|,$$

где $A \subset D'$ — открытое подмножество (при $M = M_1$ полагаем $(\Phi(A))^{1/\gamma} = \|\varphi^*\|$). Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную единице на $B(0,1)$ и нулю вне $B(0,2)$. Подставляя в это неравенство функции $f_i(y) = (y_i - y_{0,i})\eta\left(\frac{y-y_0}{r}\right)$, получаем

$$\left(\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|D\varphi|)\,dx\right)^{1/\alpha} \leq C(\Phi(B(y_0,2r)))^{1/\gamma}(r^n)^{1/\beta}. \tag{5}$$

Если гомеоморфизм φ не обладает N-свойством, то по теореме о замене переменной из [40] существует борелевское множество E нулевой меры такое, что справедлива формула

$$\int\limits_{D \setminus E} (g \circ \varphi)|J(x,\varphi)|\,dx = \int\limits_{D'} g(y)\,dy. \tag{6}$$

Докажем, что отображение $\varphi : D \to D'$ обладает конечным искажением. Для этого покажем, что выполнено равенство

$$\int\limits_Z M(|D\varphi|)\,dx = 0, \tag{7}$$

где $Z = \{x \in D \setminus E \mid J(x,\varphi) = 0\}$.

По формуле (6) $|\varphi(Z \setminus E)| = 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и открытое множество $U \supset \varphi(Z \setminus E)$, $|U| < \varepsilon$. Существует конечнократное покрытие множества U шарами $\{B(x_i, r_i)\}$ такое, что шары $\{B(x_i, 2r_i)\}$ также образуют конечнократное покрытие множества U и $\sum r_i^n < N\varepsilon$ (кратность N покрытия не зависит от множества U). Из неравенства (5) получаем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(Z)} M(|D\varphi|)\,dx \le \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))} M(|D\varphi|)\,dx \le C\|\varphi^*\|^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} r_i^n \quad \text{при } M = M_1;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))} M(|D\varphi|)\,dx \le C \sum_{i=1}^{\infty} (\Phi(B(y_i, 2r_i)))^{\alpha/\gamma} \big(r_i^n\big)^{\alpha/\beta}$$

$$\le C(\Phi(D'))^{\alpha/\gamma} \left(\sum_{i=1}^{\infty} r_i^n\right)^{\alpha/\beta} < C(\Phi(D'))^{\alpha/\gamma} (N\varepsilon)^{\alpha/\beta} \quad \text{при } M < M_1.$$

Так как $\Phi(D') < \infty$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число, (7) доказано и, следовательно, $|D\varphi| = 0$ почти всюду на множестве Z.

Перейдем к доказательству п. 4 настоящей теоремы. Рассмотрим случай, когда $M = M_1$. Применим к левой части (5) формулу (6). Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла (см., например, [41]) вытекает, что

$$\frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|} \le C\|\varphi^*\|^\alpha \qquad \text{почти всюду в } D' \setminus \varphi(E \cup Z).$$

Пусть $S \subset D' \setminus \varphi(E \cup Z)$ — множество, где последнее неравенство неверно. Тогда по формуле (6) $|J(x,\varphi)| = 0$ почти всюду на множестве $\varphi^{-1}(S)$. Поэтому $\varphi^{-1}(S) \subset Z$ и $M(|D\varphi|) \le C\|\varphi^*\|^\alpha |J(x,\varphi)|$ почти всюду в D.

При $M < M_1$ из неравенства (5) выводим соотношение

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|D\varphi|)\,dx \le C\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)^{\alpha/\gamma} r^n.$$

Применим к левой части этого неравенства формулу (6) замены переменной:

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|D\varphi|)\,dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))\setminus Z} M(|D\varphi|)\,dx$$

$$= \int\limits_{B(y_0,r)} \frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\,dy \le C\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)^{\alpha/\gamma} r^n.$$

Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла и свойств производной счетно-аддитивной функции множества (см., например, [41]) вытекает, что

$$\left(\frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\right)^{\gamma/\alpha} \le C\Phi'(y) \qquad \text{почти всюду в } D'.$$

Интегрируя неравенство по области D', получаем

$$(K_{\varphi,\beta})^\gamma \le C_1 \int\limits_{D\setminus Z} \left(\frac{(M(|D\varphi|))^{1/\alpha}}{|J(x,\varphi)|^{1/\beta}}\right)^\gamma dx = C_1 \int\limits_{D\setminus Z} \left(\frac{M(|D\varphi|)}{|J(x,\varphi)|}\right)^{\gamma/\alpha} |J(x,\varphi)|\,dx$$

$$= C_1 \int\limits_{D'} \left(\frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\right)^{\gamma/\alpha} dy \le C \int\limits_{D'} \Phi'(y)\,dy \le C\Phi(D') \le C\|\varphi^*\|^\gamma.$$

Достаточность. Покажем, что неравенство $\|\varphi^* f \mid L^1_M(D)\| \le K\|f \mid L^1_{M_1}(D')\|$ выполняется для любой функции $f \in L^1_{M_1}(D') \cap \operatorname{Lip}(D')$. Используя аналог неравенства Гёльдера (3), имеем

$$\|\varphi^* f \mid L^1_M(D)\| \le \left\| |Df||D\varphi| \frac{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_M(D)\right\|$$

$$\le 2\left\|\frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_{M_2}(D)\right\| \||Df|M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|) \mid L_{M_1}(D)\|.$$

Рассмотрим второй сомножитель:

$$\||Df|M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|) \mid L_{M_1}(D)\| \le C_1\Bigg(\int\limits_{D\setminus Z} M_1(|Df|(\varphi(x))M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|))\,dx\Bigg)^{1/\beta}$$

$$\le C_2\Bigg(\int\limits_{D'} M_1(|Df|(\varphi(x)))\,dy\Bigg)^{1/\beta} \le C\||Df| \mid L_{M_1}(D')\|.$$

Подставив полученное неравенство в исходное, выводим требуемый результат. При этом $K = C\left\|\frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_{M_2}\right\|$. В случае, когда функции M и M_1 совпадают, $K = C\left\|\frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_\infty\right\|$. $\square$

В [37] показано, как распространить оператор $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \operatorname{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ из теоремы 3 до оператора $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$ при некоторых дополнительных условиях на N-функции. Этот способ применим и к оператору φ^* теоремы 9, так как в нем существенным является Δ_2-условие на функции M и M_1, а не более сильное Δ'-условие. В результате получаем следующее утверждение.

Предложение. *Пусть отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \operatorname{Lip}(D') \to L^1_M(D)$. Тогда распространение этого оператора по непрерывности совпадает с оператором суперпозиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$ при условии, что N-функция $M_1(u)$ либо растет медленнее, чем u^n, либо удовлетворяет следующему условию:*

$$\int\limits_1^\infty \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+1/n}}\,dt < \infty.$$

Замечание. В [42] проводилось исследование оператора композиции пространств Соболева — Орлича, но рассматривались операторы $\varphi^* : W^1_M(D') \to W^1_M(D)$ в нормированных пространствах $W^1_M(D)$, а не полунормированных L^1_M. Кроме того, на N-функции, определяющие эти пространства, накладывались более жесткие ограничения: рассматриваемые в [42] N-функции $M:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ удовлетворяют условию

$$\lim_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u^q\ln^\alpha u}=1$$

для $q\ge n$ и $\alpha\ge 0$ или $q\le n$ и $\alpha\le 0$. В [42] доказано, что если гомеоморфизм порождает ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича W^1_M, то он является q-квазиконформным отображением ($\varphi\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$, $|D\varphi(x)|^q\le K|J(x,\varphi)|$ для почти всех $x\in D$). Необходимое условие настоящей работы в случае, когда функции, определяющие пространства Соболева — Орлича, равны и имеют тот же вид, что и в [42], совпадает с необходимым условием из [42].

Приведем еще один результат о свойствах оператора композиции, порождаемого обратным отображением к некоторому гомеоморфизму класса Соболева — Орлича. Доказательство этого результата основано на теоремах 9 и 1.

Теорема 10. *Пусть $Q(u)=Cu^q(\ln u)^{a_1}(\ln\ln u)^{a_2}...(\ln...\ln u)^{a_n}$, $q>1$, $a_i\in\mathbb{R}$ является главной частью N-функции M, а M_1 удовлетворяет Δ_2-условию. Пусть N-функция M также удовлетворяет условиям теоремы 5. Если гомеоморфизм $\varphi:D\to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^*: L^1_{M_1}(D')\to L^1_M(D)$ и имеет конечное коискажение, то обратное отображение $\varphi^{-1}:D'\to D$ порождает ограниченный оператор композиции ${\varphi^{-1}}^*: L^1_{\alpha'}(D)\to L^1_{\beta'}(D')$ и имеет конечное искажение.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что по теореме 9 отображение $\varphi:D\to D'$ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi\in\mathrm{ACL}(D)$;

2) φ имеет конечное искажение;

3) конечна величина $K_{\varphi,\beta}=\left\|\frac{(M(|D\varphi|))^{1/\alpha}}{(|J(x,\varphi)|)^{1/\beta}}\mid L_\gamma\right\|$ ($K_{\varphi,\beta}=\left\|\frac{M(|D\varphi|)}{|J(x,\varphi)|}\mid L_\infty\right\|$ при $M=M_1$).

Для функции $M(u)$ с приведенной выше главной частью $Q(u)$ показатель α равен q. Следовательно, $(M(u))^{1/\alpha}\ge u^{1/\rho}$, где $\rho\ge 1$ зависит от точного вида функции $M(u)$. Тогда для отображения φ верно следующее утверждение:

4) конечна величина $K_{\varphi,\beta\rho}=\left\|\frac{|D\varphi|}{(|J(x,\varphi)|)^{\rho/\beta}}\mid L_{\gamma\rho}\right\|$.

Этот факт и теорема 7 позволяют нам применить теорему 1 к отображению $\varphi:D\to D'$. В результате получим, что обратное отображение $\varphi^{-1}:D'\to D$ обладает свойствами:

5) $\varphi^{-1}\in W^1_{\beta',\mathrm{loc}}(D')$, где $\beta'=\beta/(\beta-\rho(n-1))$;

6) φ^{-1} имеет конечное искажение;

7) $K_{\varphi^{-1},\alpha'}=\left\|\frac{|D\varphi^{-1}(y)|}{|J(y,\varphi^{-1})|^{1/\alpha'}}\mid L_{\gamma\rho}(D')\right\|$, где $\alpha'=\alpha/(\alpha-\rho(n-1))$, $q'=\infty$ при $q=n-1$.

В [1] также изучен вопрос об определении условий, при которых гомеоморфизм евклидовых областей порождает ограниченный оператор композиции. Полученные условия на отображение $\varphi^{-1}:D'\to D$ позволяют установить этот факт. В итоге заключаем, что в наших обозначениях отображение $\varphi^{-1}:D'\to D$ порождает ограниченный оператор композиции ${\varphi^{-1}}^*: L^1_{\alpha'}(D)\to L^1_{\beta'}(D')$ и имеет конечное искажение. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.

2. *Mostow G. D.* Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1968. V. 34, N 1. P. 53–104.

3. *Váisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes in Math.; V. 229).

4. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 3. С. 515–531.

5. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 224–246.

6. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Функциональные характеристики квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 768–773.

7. *Iwaniec T., Sverak V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 118, N 1. P. 181–188.

8. *Heinonen J., Koskela P.* Sobolev mappings with integrable dilatation // Arch. Rational Mech. Anal. 1993. V. 125. P. 81–97.

9. *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I. 1969. V. 448. P. 1–40.

10. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130, № 2. С. 185–206.

11. *Ухлов А. Д.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 1. С. 185–192.

12. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 771–795.

13. *Ukhlov A. D., Vodopyanov S. K.* Mappings with bounded (P,Q)-distortion on Carnot groups // Bull. Sci. Math. 2010. V. 134, N 6. P. 605–634.

14. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. 1976. V. 63, N 4. P. 337–403.

15. *Ball J. M.* Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter // Proc. R. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1981. V. 88, N 3–4. P. 315–328.

16. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: discreteness and openness // Arch. Ration. Mech. Anal. 2001. V. 160, N 2. P. 135–151.

17. *Iwaniec T., Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: monotonicity and continuity // Invent. Math. 2001. V. 144, N 3. P. 507–531.

18. *Iwaniec T., Koskela P., Martin G.* Mappings of BMO-distortion and Beltrami type operators // J. Anal. Math. 2002. V. 88. P. 337–381.

19. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J., Zhong X.* Mappings of finite distortion: sharp Orlicz-conditions // Rev. Mat. Iberoam. 2003. V. 19, N 3. P. 857–872.

20. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 7, № 3. С. 629–658.

21. *David G.* Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$ // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I Math. 1988. V. 13. P. 25–70.

22. *Sverak V.* Regularity properties of deformations with finite energy // Arch. Rational Mech. Anal. 1988. V. 100. P. 105–127.

23. *Muller S., Spector S. J.* An existence theory for nonlinear elasticity that allows for cavitation // Arch. Rational Mech. Anal. 1995. V. 131. P. 1–66.

24. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: condition N // Michigan Math. J. 2001. V. 49, N 1. P. 169–181.

25. *Astala K., Iwaniec T., Martin G. J., Onninen J.* Extremal mappings of finite distortion // Proc. London Math. Soc. 2005. V. 91, N 3. P. 655–702.

26. *Hencl S., Koskela P.* Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism // Arch. Ration. Mech. Anal. 2006. V. 180, N 1. P. 75–95.

27. *Hencl S., Koskela P., Onninen J.* A note on extremal mappings of finite distortion // Math. Res. Lett. 2005. V. 12, N 2–3. P. 231–237.

28. *Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: capacity and modulus inequalities // J. Reine Angew. Math. 2006. V. 599. P. 1–26.

29. *Gill J.* Integrability of derivatives of inverses of maps of exponentially integrable distortion in the plane // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 352. P. 762–766.

30. *Hencl S., Koskela P., Onninen J.* Homeomorphisms of bounded variation // Arch. Ration. Mech. Anal. 2007. V. 186, N 3. P. 351–360.

31. *Hencl S., Koskela P., Maly J.* Regularity of the inverse of a Sobolev homeomorphism in space // Proc. R. Soc. Edinburgh. Sect. A. 2006. V. 136, N 6. P. 1267–1285.

32. *Onninen J.* Regularity of the inverse of spatial mappings with finite distortion // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 2006. V. 26, N 3. P. 331–341.

33. *Csornyei M., Hencl S., Maly J.* Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$ // J. Reine Angew. Math. 2010. V. 644. P. 221–235.

34. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.

35. *Чернов А. В.* Об аналоге обобщенного неравенства Гёльдера в пространствах Орлича // Вестн. Нижегород. ун-та. 2013. Т. 6, № 1. С. 157–161.

36. *Rao M. M., Ren Z. D.* Theory of Orlicz spaces. New York: Marcel Dekker, 1991. (Pure Appl. Math.).

37. *Меновщиков А. В.* Операторы композиции в пространствах Соболева — Орлича // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 1088–1101.

38. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории классов Орлича — Соболева // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, № 6. С. 50–102.

39. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. Математика. 2002. Т. 10. С. 11–33.

40. *Hajłasz P.* Change of variables formula under minimal assumptions // Colloq. Math. 1993. V. 64, N 1. P. 93–101.

41. *Водопьянов С. К.* Интегрирование по Лебегу: Учеб. пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2014.

42. *Hencl S., Kleprlik L.* Composition of q-quasiconformal mappings and functions in Orlicz–Sobolev spaces // Illinois J. Math. 2012. V. 56, N 3. P. 931–955.

Статья поступила 28 октября 2016 г.

Меновщиков Александр Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090;
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198
`antikoerper@mail.ru`