Сибирский математический журнал
Июль—август, 2017. Том 58, № 4

УДК 512.57

О ЛОГИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛОНОВ

А. Г. Пинус

Аннотация. Изучаются отношения эквивалентности между функциональными клонами на фиксированных множествах, основанные на совпадении их бескванторно формульных подмножеств соответствующих универсальных алгебр.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.413

Ключевые слова: функциональный клон, бескванторно формульное множество универсальных алгебр, условный терм.

Прежде всего напомним, что *функциональным клоном* на некотором множестве называется любая совокупность функций на этом множестве, замкнутая относительно суперпозиций и включающая в себя все селекторные функции на этом множестве. Определяющую роль в изучении совокупностей функциональных клонов на различных множествах играют результаты Поста [1] и Ю. И. Янова, А. Ф. Мучника [2], указывающие на принципиальную разницу при изучении совокупностей клонов на двухэлементном и на не менее чем трехэлементных множествах. В первом случае Постом детально описано не только строение соответствующей счетной решетки, но и строение самих этих клонов, включая их порядки, базисы и пр. Во втором случае Ю. И. Яновым и А. А. Мучником доказана не менее чем континуальность соответствующей решетки, что делает невозможным ее детальное описание (аналогичное постовскому), а также существование клонов, не имеющих базисов и тому подобных атрибутов. В силу этого при исследовании совокупности (решетки) клонов на не менее чем трехэлементном множестве, как правило, изучали либо какие-либо части — интервалы, подрешетки (см., к примеру, [3]) — этой решетки, либо ее экстремальные элементы — атомы, ко-атомы (см., например, [4]), либо ее элементы, обладающие какими-либо дополнительными свойствами: самодвойственностью, квазилинейностью и пр. (см., например, [5, 6]), либо вопросы отделимости клонов друг от друга тем или иным способом, в том числе и гипертождествами (см., например, [7, 8]).

К другим методам изучения подобных больших (на не менее чем трехэлементных множествах) совокупностей функциональных клонов относится классификация этих клонов относительно тех или иных, в том или ином смысле значимых, эквивалентностей на этих совокупностях. К подобным достаточно естественным и эффективным классификациям клонов относятся и их классификации по производным структурам (решеткам подалгебр, решеткам конгруэнций, группам автоморфизмов, алгебраическим геометриям) универсальных алгебр с клонами термальных функций, идентичными рассматриваемому клону.

В работах Б. И. Плоткина [9, 10] наряду с рассмотрением алгебраической геометрии универсальных алгебр (о последней см., например, [11]) предложена к изучению так называемая логическая геометрия этих алгебр, состоящая из подмножеств $B \subseteq A^n$, выделяемых в алгебре $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ формулами узкого исчисления предикатов сигнатуры σ. Однако в случае конечности алгебры $\mathfrak{A}$ эти подмножества суть объединения $\operatorname{Aut}\mathfrak{A}^n$-орбит, т. е. множеств вида

$$\{\bar{c} = \langle c_1, \dots, c_n \rangle \in A^n \mid \bar{c} = \varphi(\bar{b}), \varphi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{A}^n\},$$

где $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in A^n$, $\operatorname{Aut}\mathfrak{A}^n$ — группа автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}^n$. В связи с этим естественным представляется рассмотрение для конечных алгебр $\mathfrak{A}$ различных фрагментов исчисления предикатов, для которых соответствующая логическая геометрия не сводится к изучению группы автоморфизмов алгебры, при этом является усилением традиционной алгебраической геометрии. В качестве таковой в [12] предложено рассмотрение фрагмента L_0, состоящего из бескванторных формул сигнатуры σ. Под *n-мерной*, $n \in \omega$, L_0-логической геометрией $L_0g_n\mathfrak{A}$ универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ подразумевается булева алгебра n-мерных L_0-логических подмножеств множества A^n. При этом $B \subseteq A^n$ называется *n-мерным L_0-логическим множеством для алгебры* $\mathfrak{A}$, если для некоторой бескванторной формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры σ

$$B = \{\langle b_1, \dots, b_n \rangle \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \Phi(b_1, \dots, b_n)\}$$

или, иначе, B есть объединение конечного числа совокупностей решений в $\mathfrak{A}$ некоторых конечных систем термальных уравнений и неравенств сигнатуры σ. Под *L_0-логической геометрией алгебры* $\mathfrak{A}$ будем понимать последовательность

$$L_0g\mathfrak{A} = \langle L_0g_1\mathfrak{A}, \dots, L_0g_n\mathfrak{A}, \dots \rangle.$$

Таким образом, в конечном счете L_0-логическая геометрия алгебры $\mathfrak{A}$ зависит не от совокупности ее сигнатурных функций, а от функционального клона $T(\mathfrak{A})$ ее термальных функций. С другой стороны, для любого функционального клона F на множестве A имеет место равенство $T(\mathfrak{A}_F) = F$, где $\mathfrak{A}_F = \langle A; F \rangle$ — алгебра с основным множеством A и сигнатурными функциями, всеми функциями из F. Все это в совокупности делает естественным (подобно тому, как это проделано в [13] для алгебраической геометрии клонов) изучение *L_0-логической геометрии функциональных клонов F на множестве* A, где $L_0gF = \langle L_0g_1F, \dots, L_0g_nF, \dots \rangle$ — последовательность вида $L_0g\mathfrak{A}_F$. При этом $B \subseteq A^n$ является *n-мерным L_0-логическим множеством для* F, если для некоторых $B_1, \dots, B_m$ $(m \in \omega)$ имеют место равенства $B = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$ и

$$B_i = \big\{\langle b_1, \dots, b_n \rangle \in A^n \mid f_j^i(b_1, \dots, b_n) = g_j^i(b_1, \dots, b_n),\\ h_j^i(b_1, \dots, b_n) \neq r_j^i(b_1, \dots, b_n)\big\}$$

для некоторых n-местных функций f_j^i, g_j^i, h_j^i, r_j^i из F, где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le q$ и $m, q \in \omega$.

Совокупность всех функциональных клонов на множестве A обозначим через F_A. Два клона $F_0, F_1 \in F_A$ назовем *L_0-логически эквивалентными* ($F_0 \sim_{l_0g} F_1$), если совпадают их L_0-логические геометрии $L_0gF_0 = L_0gF_1$ (если L_0-*логически эквивалентны* ($L_0g\mathfrak{A}_{F_0} = L_0g\mathfrak{A}_{F_1}$) алгебры $\mathfrak{A}_{F_0}$ и $\mathfrak{A}_{F_1}$).

В данной работе изучаются отношения $\sim_{l_0g}$ на совокупности F_A, в частности, мощности фактор-множеств F_A/l_0g и строение классов $F/\sim_{l_0g}$ $\sim_{l_0g}$-эквивалентных клонов F из F_A.

Напомним, что подмножество B множества A^n называется F-*алгебраическим* для $F \in F_A$ (в случае конечного A), если B — совокупность решений некоторой конечной системы F-уравнений. Обозначим совокупность подобных множеств B через Ag_nF. При этом клоны $F_0, F_1 \in F_A$ называются *алгебраически эквивалентными* ($F_0 \sim_{ag} F_1$, см. [13]), если $Ag_nF_0 = Ag_nF_1$ для любого $n \in \omega$. Заметим, что так как L_0g_nF является подалгеброй, порожденной совокупностью Ag_nF в булевой алгебре всех подмножеств множества A^n, для любых $F_0, F_1 \in F_A$ отношение $F_0 \sim_{ag} F_1$ влечет отношение $F_0 \sim_{l_0g} F_1$.

Напомним определения, связанные с введенным автором понятием условно термальной функции алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ (см., например, [14]). Под условием $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры σ будем понимать любую конечную совокупность термальных равенств и неравенств сигнатуры σ от переменных $x_1, \dots, x_n$. Под *полной системой условий* $\Phi_1(\bar{x}), \dots, \Phi_k(\bar{x})$ (где $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$) будем понимать совокупность условий такую, что формула $\bigvee\limits_{i=1}^{k} \Phi_i(\bar{x})$ тождественно истинна, а для $j \neq l \leq k$ формулы $\Phi_j(\bar{x}) \wedge \Phi_k(\bar{x})$ невыполнимы. Под *условным термом сигнатуры* σ понимаем схему вида

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} \Phi_1(\bar{x}) \to t_1(\bar{x}) \\ \dots \\ \Phi_k(\bar{x}) \to t_k(\bar{x}), \end{cases}$$

где $\{\Phi_1(\bar{x}), \dots, \Phi_k(\bar{x})\}$ — некоторая полная система условий, а $t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x})$ — термы сигнатуры σ. При этом функция $g(\bar{x})$ на основном множестве A универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ называется *условно термальной* для $\mathfrak{A}$, если для любого $\bar{a} \in A^n$ в случае, когда $\mathfrak{A} \models \Phi_i(\bar{a})$ для некоторого $i \leq k$, имеет место равенство $g(\bar{a}) = t_i(\bar{a})$.

Совокупность (клон) всех условно термальных функций алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ обозначим через $CT(\mathfrak{A})$. Для любого клона F на множестве A через $CT(F)$ обозначим клон $CT(\mathfrak{A}_F)$. Отметим, что оператор $CT : F_A \to F_A$ является оператором замыкания на решетке $L_A = \langle F_A; \wedge, \vee \rangle$ всех клонов на множестве A, т. е.

1) $F_1 \subseteq CT(F_1)$,
2) $F_1 \subseteq F_2 \to CT(F_1) \subseteq CT(F_2)$,
3) $CT(CT(F_1)) = CT(F_1)$

для любых $F_1, F_2 \in F_A$.

Непосредственно из определений отношения $\sim_{l_0g}$ и условно термальных функций вытекает

Лемма 1. *Для любого клона F на множестве A имеет место $F \sim_{l_0g} CT(F)$.*

Отсюда, в частности, с очевидностью следуют нетривиальность отношения $\sim_{l_0g}$ на F_A для любого неодноэлементного множества A и то, что отношение $\sim_{l_0g}$ на F_A, вообще говоря, не влечет отношения $\sim_{ag}$ (в качестве F достаточно взять минимальный клон на A, состоящий из селекторных функций на A). При этом очевидно, что клон $CT(F)$, состоящий из обобщенно селекторных функций, не совпадает в этом случае с F, в частности, $F \sim_{l_0g} CT(F)$, но $F \nsim_{ag} CT(F)$.

Из утверждения леммы 1 вытекает следующее

Утверждение 1. *Для любых клонов F_1, F_2 на множестве A отношения $F_1 \sim_{l_0g} F_2$ и $CT(F_1) \sim_{l_0g} CT(F_2)$ равносильны.*

Напомним, что *внутренним изоморфизмом алгебры* $\mathfrak{A}$ называется любой изоморфизм между ее подалгебрами. Через $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$ обозначим полугруппу внутренних изоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$, а через $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$ — решетку подалгебр этой алгебры. В [15] дана характеризация условно термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$ (теорема 1) как функций, относительно которых замкнуты подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ и которые коммутируют со всеми внутренними изоморфизмами этой алгебры.

Отсюда непосредственно вытекает

Утверждение А. *Для любого конечного множества A и любых универсальных алгебр $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathfrak{A}_2 = \langle A; \sigma_2 \rangle$ с основным множеством A следующие условия равносильны:*

1) $CT(\mathfrak{A}_1) = CT(\mathfrak{A}_2)$,

2) $\mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_1) = \mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_2)$ *и* $\mathrm{Sub}(\mathfrak{A}_1) = \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}_2)$.

В силу того, что для конечных A число всевозможных полугрупп частичных вложений множества A в себя (потенциально возможных полугрупп вида $\mathrm{Iso}(\mathfrak{A})$ для алгебр $\mathfrak{A}$ с основным множеством A) конечно, равно как конечно и число совокупностей подмножеств множества A (потенциально возможных решеток вида $\mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$), ввиду утверждения А конечно и число CT-замкнутых клонов на конечном множестве A. Тем самым по утверждению 1 конечно и множество $F_A / \sim_{l_0g}$, т. е. имеет место

Теорема 1. *Для любого конечного множества A число попарно не $\sim_{l_0g}$–эквивалентных клонов на A конечно.*

В частности, в силу результатов о так называемых потенциалах вычислимости двух- и трехэлементных алгебр (см., например, [14]), учитывающих число всевозможных пар вида $\langle \mathrm{Iso}(\mathfrak{A}), \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}) \rangle$ для двух- и трехэлементных алгебр с точностью до сопряженности этих пар перестановками их основных множеств $\{0,1\}$ и $\{0,1,2\}$, имеют место оценки

$$|F_{\{0,1\}} / \sim_{l_0g}| \le 5 \cdot 2!; \quad 53 \le |F_{\{0,1,2\}} / \sim_{l_0g}| \le 53 \cdot 3!.$$

Другим естественным вопросом об отношении $\sim_{l_0g}$ на совокупности F_A является вопрос о строении классов $F / \sim_{l_0g}$ (для $F \in F_A$) как подмножеств решетки L_A. Очевидным образом эти классы являются выпуклыми подмножествами решетки L_A и замкнутыми подмножествами метрического пространства $\langle F_A; d \rangle$ всех клонов на A, введенного в [10].

Отметим, что тем не менее эти классы не обязаны быть интервалами решетки L_A, более того, они не обязаны быть даже направленными ни вверх, ни вниз подмножествами решетки L_A.

Пример 1. Пусть $|A| = 4$ и $\{B_1, B_2\}$ — разбиение A на двухэлементные подмножества. Пусть F_i — клон всех функций на A со значениями в множестве B_i с добавленными к ним селекторными функциями на A. Очевидно, что $L_0g_n F_i$ для любого натурального n равно совокупности $P(A^n)$ всех подмножеств множества A^n. Тем самым $F_1 \sim_{l_0g} F_2$. В то же время $F_1 \cap F_2$ состоит лишь из селекторных на A функций и, значит, $F_1 \cap F_2 \nsim_{l_0g} F_1$, а класс $F_1 / \sim_{l_0g}$ не является направленным вниз подмножеством в L_A.

Пример 2. Пусть A — шестиэлементное множество и $\{B_1, B_2, B_3\}$ — разбиение A на двухэлементные подмножества. Пусть $b_i \in B_i$ для $i = 1, 3$. Определим на A одноместные функции g_1, g_2 следующим образом:

$$g_1(x) = \begin{cases} b_1, & \text{если } x \in B_1, \\ b_3, & \text{если } x \in B_2 \cup B_3, \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} b_1, & \text{если } x \in B_1 \cup B_2, \\ b_3, & \text{если } x \in B_3. \end{cases}$$

Пусть F_i — функциональный клон на A, порожденный функцией g_i. Так как $g_i^2 = g_i$, функция $h(x_1, \dots, x_n)$ входит в F_i тогда и только тогда, когда она селекторная либо имеет место равенство $h(x_1, \dots, x_n) = g_i(x_j)$ для некоторого $j \leq n$.

Непосредственно замечается, что $L_0 g_n F_1 = L_0 g_n F_2$ для любого $n \in \omega$. Таким образом, $F_1 \sim_{l_0 g} F_2$. При этом $L_0 g_1 F_i = \{\varnothing, A, \{b_1, b_3\}$ (решение уравнения $g_i(x) = x$), $A \setminus \{b_1, b_3\}\}$. В то же время если клон F включает в себя клоны F_1 и F_2, то множество $B_1 \cup B_3$ (решение уравнения $g_1(x) = g_2(x)$) входит в $L_0 g_1 F$ и, значит, $F \nsim_{l_0 g} F_1$. Тем самым $F / \sim_{l_0 g}$, вообще говоря, не является направленным вверх подмножеством решетки L_A.

В [13] для любого оператора замыкания g на некоторой решетке L введено понятие g-замкнутого полуинтервала решетки L как подмножества этой решетки вида $B = \{c \in L \mid g(c) = b\}$ для некоторого $b \in L$ такого, что $g(b) = b$.

Из доказательства теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Для любого конечного множества A и любого клона F на A класс $F / \sim_{l_0 g}$ является объединением конечного числа CT-замкнутых полуинтервалов в решетке L_A.*

По аналогии с введенным в [16] понятием ag-$\dim F$ алгебраической размерности клона F определим понятие $l_0 g$-$\dim F$ L_0-логической размерности клона F следующим образом: для любого клона F на множестве A пусть $l_0 g$-$\dim F$ является наименьшим натуральным n (если таковое существует) таким, что для любого $F_1 \in F_A$ равенство $L_0 g_n F_1 = L_0 g_n F$ влечет равенство $L_0 g F_1 = L_0 g F$, в противном случае полагаем $l_0 g$-$\dim F$ равной бесконечности. Из утверждения теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *Для любого конечного множества A и любого клона F на A логическая размерность клона F конечна. Более того, существует натуральное $n(A)$ такое, что для любых клонов F_1, F_2 на A совпадение совокупностей $n(A)$-мерных логических множеств для F_1 и F_2 влечет совпадение их логических геометрий.*

Для бесконечных множеств A ситуация иная: существуют функциональные клоны на бесконечных множествах, имеющие бесконечную логическую размерность.

Пример 3. Пусть A — бесконечное множество и $a \neq b$ — элементы из A. Для любого натурального n пусть функция $h_n(x_1, \dots, x_n)$ на A принимает одно и то же значение a. Пусть клон F порожден совокупностью функций $\{h_1(x), \dots, h_n(x_1, \dots, x_n), \dots\}$. Тогда очевидно, что для любого логического множества $B \subseteq A^n$ клона F любая π_i-проекция B (для $i \leq n$) имеет вид $\varnothing$ либо A, либо $\{a\}$, либо $A \backslash \{a\}$.

Для любого $n \in \omega$ определим функцию $f_n(x_1, \dots, x_n)$ на A, полагая значение $f_n(x_1, \dots, x_n)$ равным $h_m(x_1, \dots, x_m)$, если $x_1, \dots, x_m$ — все попарно различные значения аргументов $x_1, \dots, x_n$ и $m < n$, и равным b, если все значения аргументов $x_1, \dots, x_n$ попарно различны. Пусть F_n — клон функций на A, порожденный функциями $\{h_1(x), \dots, h_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), f_n(x_1, \dots, x_n)\}$. Очевидно, что $L_0 g_m F = L_0 g_m F_n$ для $m < n$, а совокупность решений F_n-уравнения

$f_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1$ не входит в $L_0 g_n F$. Тем самым логическая размерность клона F действительно бесконечна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Post E. L.* The two-valued iterative systems of mathematical Logik // Ann. Math. Stud. 1841. V. 5.

2. *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 144–146.

3. *Булатов А. А.* Конечные подрешетки в решетке клонов // Алгебра и логика. 1994. Т. 34, № 4. С. 140–148.

4. *Rosenberg I. G.* Über die funktionale Vollstandigkeit in dem mehrvertigen Logiken von mehrren Verandlichen auf endlichen Mengen // Rozpravy Cs. Akademie Ved., Ser. Math. Nat. Sci. 1970. V. 80. P. 3–93.

5. *Марченков С. С.* О замкнутых классах самодвойственных функций в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып. 36. С. 5–22.

6. *Мальцев И. А., Тугылбаева Б. Г.* Конгруэнции на подклонах клона Бурле ранга 3, не содержащих креативных функций // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1087–1104.

7. *Денеке К., Мальцев И. А.* Разделение клонов гипертождествами // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 310–316.

8. *Денеке К., Мальцев И. А.* О разделимости клонов гипертождествами // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1050–1066.

9. *Plotkin B., Zhitomirski G.* Some logical invariants of algebras and logical relations between algebras // Алгебра и анализ. 2007. V. 19, N 5. P. 214–245.

10. *Plotkin B.* Unitiped algebras // Proc. of the Steklov Inst. Math. 2012. V. 278, N 1. P. 91–115.

11. *Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. Новосибирск: Из-во СО РАН, 2016.

12. *Пинус А. Г.* Об одном из логических замыканий на универсальных алгебрах // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 17. С. 698–703.

13. *Пинус А. Г.* Об алгебраически эквивалентных клонах // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 6. С. 760–768.

14. *Пинус А. Г.* Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 4. С. 35–72.

15. *Пинус А. Г.* Характеризация условно термальных функций // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 161–165.

16. *Пинус А. Г.* Размерности функциональных клонов, метрика на их совокупности // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 366–374.

Статья поступила 30 июня 2016 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru