

ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ
КОЭФФИЦИЕНТА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ
ПРОНИЦАЕМОСТИ ПО МОДУЛЮ
РАССЕЯННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
В. Г. Романов

Аннотация. Рассматривается стационарная система уравнений электродинамики, которая соответствует немагнитной непроводящей среде. Для этой системы изучается задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости ε по заданным векторам электрической или магнитной напряженности электромагнитного поля. Предполагается, что поле вызывается точечным импульсным диполем, локализованным в некоторой точке y . Предполагается также, что диэлектрическая проницаемость отлична от заданной положительной постоянной ε_0 только внутри некоторой компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей S . Для отыскания ε внутри Ω задается информация о решении соответствующей прямой задачи для системы уравнений электродинамики на всей границе области Ω для всех частот, начиная с некоторой фиксированной частоты ω_0 , и для всех $y \in S$. Изучается асимптотика решения прямой задачи при больших частотах и показывается, что задаваемая информация позволяет свести исходную задачу к хорошо известной обратной кинематической задаче об определении коэффициента рефракции внутри Ω по временам пробега электромагнитной волны между произвольными точками границы области Ω . Это приводит к теореме единственности решения рассматриваемой задачи и открывает путь для ее конструктивного решения.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.417

Ключевые слова: стационарные уравнения электродинамики, безфазовая обратная задача, единственность, метод построения решения.

§ 1. Постановка задачи,
формулировка основных результатов

Рассмотрим стационарную систему уравнений

$$\operatorname{rot} H = -i\omega\varepsilon(x)E + \tilde{j}, \quad \operatorname{rot} E = i\omega\mu_0 H, \quad (1.1)$$

в которой $\mu_0 > 0$ — постоянный коэффициент магнитной проницаемости, $\varepsilon(x)$ — коэффициент диэлектрической проницаемости, $\tilde{j} = j^0\delta(x - y)$ — точечный диполь, локализованный в точке y , и j^0 — единичный вектор, определяющий направление диполя. Векторы $E = (E_1, E_2, E_3)$ и $H = (H_1, H_2, H_3)$ характеризуют напряженности электрического и магнитного полей соответственно. В дальнейшем точка y и частота ω являются параметрами задачи, направление вектора j^0

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00120-а).

также может зависеть от y . В связи с этим ниже будут использоваться обозначения $E = E(x, \omega, y)$, $H = H(x, \omega, y)$, подчеркивающие зависимость решения от этих параметров.

Относительно коэффициента диэлектрической проницаемости предположим, что он представляет собой гладкую положительную функцию всюду в $\mathbb{R}^3$, совпадающую с заданной положительной постоянной ε_0 вне некоторой компактной области Ω , а носитель разности $\varepsilon(x) - \varepsilon_0$ содержится строго внутри Ω . Обозначим через $n(x) = \sqrt{\varepsilon(x)\mu_0}$ индекс рефракции в неоднородной среде и через $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — значение его в однородной среде.

Будем рассматривать решения уравнений (1.1), удовлетворяющие условиям излучения, которые нам будет удобно сформулировать немного позже. Введем векторный $\tilde{A}(x, \omega, y)$ и скалярный $\tilde{\varphi}(x, \omega, y)$ потенциалы следующим образом:

$$\mu_0 H = \operatorname{rot} \tilde{A}, \quad E = i\omega \tilde{A} - \nabla \tilde{\varphi}. \quad (1.2)$$

Тогда второе уравнение (1.1) удовлетворяется автоматически. Используя формулы $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{A} = -\Delta \tilde{A} + \nabla \operatorname{div} \tilde{A}$, из первого уравнения (1.1) находим

$$\nabla(\operatorname{div} \tilde{A} - i\omega \mu_0 \varepsilon(x) \tilde{\varphi}) - \omega^2 \mu_0 \varepsilon(x) \tilde{A} - \Delta \tilde{A} + i\omega \mu_0 \tilde{\varphi} \nabla \varepsilon(x) = \mu_0 \tilde{j}.$$

Выбирая функцию $\tilde{\varphi}$ так, что

$$\tilde{\varphi}(x, \omega, y) = \frac{1}{i\omega n^2(x)} \operatorname{div} \tilde{A}(x, \omega, y), \quad n(x) = \sqrt{\mu_0 \varepsilon(x)}, \quad (1.3)$$

получим уравнение для $\tilde{A}(x, \omega, y)$ в виде

$$-\omega^2 n^2(x) \tilde{A} - \Delta \tilde{A} + (\operatorname{div} \tilde{A}) \nabla \ln(\varepsilon(x)) = \mu_0 j^0 \delta(x - y). \quad (1.4)$$

При найденной функции $\tilde{A}(x, \omega, y)$ векторы $E(x, \omega, y)$ и $H(x, \omega, y)$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} H(x, \omega, y) &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \tilde{A}(x, \omega, y), \\ E(x, \omega, y) &= i\omega \left[\tilde{A}(x, \omega, y) + \frac{1}{\omega^2 n^2(x)} \nabla \operatorname{div} \tilde{A}(x, \omega, y) \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Учитывая, что $n(x) = n_0$ вне Ω , условия излучения для функции $\tilde{A}(x, \omega, y)$ примем в виде, предложенном Зоммерфельдом:

$$\tilde{A}(x, \omega, y) = O(r^{-1}), \quad \frac{\partial \tilde{A}}{\partial r} - i\omega n_0 \tilde{A} = o(r^{-1}) \quad \text{при } r = |x - y| \rightarrow \infty. \quad (1.6)$$

Тогда решение уравнения (1.4) в однородной среде, т. е. при $n(x) = n_0$, удовлетворяющее условиям излучения (1.6), имеет вид

$$\tilde{A}^0(x, \omega, y) = \frac{\mu_0 j^0}{4\pi |x - y|} \exp(i\omega n_0 |x - y|). \quad (1.7)$$

Следовательно, соответствующее электромагнитное поле определяется равенствами

$$\begin{aligned} H^0(x, \omega, y) &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \tilde{A}^0(x, \omega, y), \\ E^0(x, \omega, y) &= i\omega \left[\tilde{A}^0(x, \omega, y) + \frac{1}{\omega^2 n_0^2} \nabla \operatorname{div} \tilde{A}^0(x, \omega, y) \right], \end{aligned} \quad (1.8)$$

в которых $\tilde{A}^0(x, \omega, y)$ находится по формуле (1.7).

Обозначим рассеянное на неоднородности среды электромагнитное поле через (E^{sc}, H^{sc}) :

$$E^{sc}(x, \omega, y) = E(x, \omega, y) - E^0(x, \omega, y), \quad H^{sc}(x, \omega, y) = H(x, \omega, y) - H^0(x, \omega, y). \quad (1.9)$$

Сформулируем постановку задач об определении коэффициента диэлектрической проницаемости, которые будем рассматривать ниже.

Задача 1. Предположим, что во всех точках границы S области Ω задан модуль $E^{sc}(x, \omega, y)$ как функция точки $x \in S$ и параметров y, ω для всех $y \in S$ и частот ω , начиная с некоторой фиксированной частоты $\omega_0 > 0$, т. е. задана функция

$$f_1(x, \omega, y) = |E^{sc}(x, \omega, y)|, \quad (x, y) \in S \times S, \quad \omega \geq \omega_0 > 0. \quad (1.10)$$

Требуется по заданной функции найти $\varepsilon(x)$ внутри Ω .

Задача 2. Предположим, что во всех точках границы S области Ω задан модуль $H^{sc}(x, \omega, y)$ как функция точки $x \in S$ и параметров y, ω для всех $y \in S$ и частот ω , начиная с некоторой фиксированной частоты $\omega_0 > 0$, т. е. задана функция

$$f_2(x, \omega, y) = |H^{sc}(x, \omega, y)|, \quad (x, y) \in S \times S, \quad \omega \geq \omega_0 > 0. \quad (1.11)$$

Требуется по заданной функции найти $\varepsilon(x)$ внутри Ω .

Поставленные выше задачи лежат в русле серии постановок задач, публикации по которым появились в последние годы, так называемых безфазовых обратных задач для уравнений эллиптического типа. В этих задачах используется только модуль некоторой комплекснозначной функции, отвечающей рассеянному на неоднородностях среды физическому полю. Объясняется это тем, что физические эксперименты часто проводятся при высоких уровнях энергии (высоких частотах), чтобы можно было определить свойства среды, имеющей мелкие включения типа наноструктур. При этом фазовая составляющая поля не может быть непосредственно измерена, эффективно измеряется только модуль рассеянного поля. В связи с этим 40 лет назад в книге Шадана и Сабатье [1] была впервые поставлена задача об определении потенциала в уравнении Шредингера по модулю рассеянного поля. Несколько позднее на важность построения решения этой задачи было указано в [2]. Результаты, связанные с исследованием поставленной задачи, получены совсем недавно. Теорема о единственности определения фазы по модулю амплитуды рассеяния получена в работах М. В. Клибанова [3–5]. Конструктивные методы построения решения задачи об определении потенциала в уравнении Шредингера предложены в [6–9], об определении коэффициента рефракции в обобщенном уравнении Гельмгольца — в [10–13]. В настоящей работе показываем, что поставленные выше задачи об отыскании коэффициента диэлектрической проницаемости в уравнениях электродинамики приводятся к задаче об определении индекса рефракции по кинематическим данным, т. е. к решению хорошо известной обратной кинематической задачи. Это открывает путь к их эффективному решению.

§ 2. Асимптотика электромагнитного поля на высоких частотах для однородной среды

Найдем асимптотику функций E^0 и H^0 , заданных формулами (1.7), (1.8) при $\omega \rightarrow \infty$. Проводя вычисления, получаем формулы

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \tilde{A}^0 &= \frac{\mu_0(j^0 \cdot \nu^0)}{4\pi|x-y|} \exp(i\omega n_0|x-y|) \left[i\omega n_0 - \frac{1}{|x-y|} \right], \\ \operatorname{rot} \tilde{A}^0 &= \frac{\mu_0(\nu^0 \times j^0)}{4\pi|x-y|} \exp(i\omega n_0|x-y|) \left[i\omega n_0 - \frac{1}{|x-y|} \right], \\ \nabla \operatorname{div} \tilde{A}^0 &= \frac{\mu_0}{4\pi|x-y|} \exp(i\omega n_0|x-y|) \left\{ \left[i\omega n_0 - \frac{1}{|x-y|} \right] (i\omega n_0) \nu^0 (j^0 \cdot \nu^0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\omega n_0}{|x-y|} (j^0 - 2\nu^0(j^0 \cdot \nu^0)) - \frac{1}{|x-y|^2} (j^0 - 3\nu^0(j^0 \cdot \nu^0)) \right\},\end{aligned}$$

в которых $\nu^0 = (x-y)/|x-y|$. В результате находим, что

$$\begin{aligned}E^0(x, \omega, y) &= \frac{i\omega\mu_0}{4\pi|x-y|} \exp(i\omega n_0|x-y|) \left\{ j^0 - \nu^0(j^0 \cdot \nu^0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{j^0 - 3\nu^0(j^0 \cdot \nu^0)}{i\omega n_0|x-y|} - \frac{j^0 - 3\nu^0(j^0 \cdot \nu^0)}{(i\omega n_0|x-y|)^2} \right\},\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$H^0(x, \omega, y) = \frac{(\nu^0 \times j^0)}{4\pi|x-y|} \exp(i\omega n_0|x-y|) \left[i\omega n_0 - \frac{1}{|x-y|} \right].\quad (2.2)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}E^0(x, \omega, y) &= \exp(i\omega n_0|x-y|) \frac{i\omega\mu_0}{4\pi|x-y|} \left[j^0 - (j^0 \cdot \nu^0) \nu^0 \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{1}{\omega|x-y|}\right) \right], \quad \omega \rightarrow \infty,\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$H^0(x, \omega, y) = \exp(i\omega n_0|x-y|) \frac{i\omega n_0(\nu^0 \times j^0)}{4\pi|x-y|} \left[1 + O\left(\frac{1}{\omega|x-y|}\right) \right], \quad \omega \rightarrow \infty.\quad (2.4)$$

Обозначим через $\tau_0(x, y) = n_0|x-y|$ время пробега электромагнитной волны в однородной среде. Тогда формулы (2.3), (2.4) можно записать в виде

$$E^0(x, \omega, y) = \frac{i\omega\mu_0 n_0}{4\pi\tau_0(x, y)} \exp(i\omega\tau_0(x, y)) \left\{ j^0 - \nu^0(j^0 \cdot \nu^0) + O\left(\frac{1}{\omega\tau_0(x, y)}\right) \right\},\quad (2.5)$$

$$H^0(x, \omega, y) = \exp(i\omega\tau_0(x, y)) \frac{i\omega n_0^2(\nu^0 \times j^0)}{4\pi\tau_0(x, y)} \left[1 + O\left(\frac{1}{\omega\tau_0(x, y)}\right) \right], \quad \omega \rightarrow \infty.\quad (2.6)$$

§ 3. Асимптотика электромагнитного поля на высоких частотах для неоднородной среды

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициент $\varepsilon(x)$ может быть представлен в виде

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(x); \quad \operatorname{supp} \varepsilon_1(x) \in \Omega; \quad \varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3).\quad (3.1)$$

Примем, что риманова метрика $d\tau = n(x)|dx|$, $n(x) = \sqrt{\varepsilon(x)\mu_0}$, простая, т. е. любые две точки x, y в $\mathbb{R}^3$ могут быть соединены единственной геодезической $\Gamma(x, y)$. Обозначим через $\tau(x, y)$ риманово расстояние между точками x и y . Известно, что функция $\tau(x, y)$ является решением следующей задачи:

$$|\nabla_x \tau(x, y)|^2 = n^2(x), \quad \tau(x, y) \sim n(y)|x - y| \quad \text{при } x \rightarrow y.$$

Для вывода асимптотики функций E и H при $\omega \rightarrow \infty$ воспользуемся тем обстоятельством, что функция $\tilde{A}(x, \omega, y)$, являющаяся решением задачи (1.4), (1.6), совпадает с образом Фурье решения задачи Коши

$$n^2(x) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A + (\operatorname{div} A) \nabla \ln(\varepsilon(x)) = \mu_0 j^0 \delta(x - y) \delta(t), \quad A|_{t < 0} = 0, \quad (3.2)$$

т. е.

$$\tilde{A}(x, \omega, y) = \int_0^\infty A(x, t, y) e^{i\omega t} dt. \quad (3.3)$$

Существование интеграла Фурье вытекает из результатов Вайнберга [14] об экспоненциальном убывании решения задачи (3.2) при $t \rightarrow \infty$ и следующей леммы, фактически являющейся следствием теоремы 1 в [15].

Лемма. Пусть выполнены условия (3.1) и метрика $d\tau = n(x)|dx|$, $n(x) = \sqrt{\varepsilon(x)\mu_0}$, простая. Тогда решение задачи (3.2) может быть представлено в виде

$$A(x, t, y) = \alpha^{-1}(x, y) \delta(t^2 - \tau^2(x, y)) + \hat{A}(x, t, y) \theta(t - \tau(x, y)), \quad (3.4)$$

где $\alpha^{-1}(x, y)$, $\tau^2(x, y)$ и $\hat{A}(x, t, y)$ — бесконечно дифференцируемые функции и $\theta(t)$ — функция Хевисайда: $\theta(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\theta(t) = 0$ при $t < 0$.

Функция $\alpha^{-1}(x, y)$ определяется формулой

$$\alpha^{-1}(x, y) = \frac{\mu_0 n_0}{2\pi} \Phi^{-1}(x, y) j^0, \quad (3.5)$$

в которой $\Phi^{-1}(x, y)$ — матрица, обратная к матрице $\Phi(x, y)$, определяемой равенством

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{J(x, y)}} \exp \left(\int_{\Gamma(x, y)} Q(\xi) d\xi \right). \quad (3.6)$$

В формуле (3.6) $J(x, y)$ — якобиан преобразования римановых координат $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ точки x в декартовы, ξ — переменная точка геодезической $\Gamma(x, y)$ и $Q(\xi) d\xi$ — линейная матричная форма,

$$Q(x) dx = I(\nabla \ln \sqrt{\varepsilon(x)} \cdot dx) - (\nabla \ln \sqrt{\varepsilon(x)})^* dx, \quad dx = (dx_1, dx_2, dx_3), \quad (3.7)$$

в которой $I = \operatorname{diag}(1, 1, 1)$ и $(\nabla \ln \sqrt{\varepsilon(x)})^*$ — вектор-столбец. Заметим, что римановы координаты ζ могут быть вычислены через функцию $\tau^2(x, y)$ по формуле

$$\zeta = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon(x)\mu_0}} \nabla_y \tau^2(x, y).$$

Используя упомянутые выше результаты Вайнберга об экспоненциальном убывании решения и вычисляя преобразование Фурье функции $A(x, t, y)$, находим, что

$$\tilde{A}(x, \omega, y) = \exp(i\omega \tau(x, y)) \left[\frac{\alpha^{-1}(x, y)}{2\tau(x, y)} + \int_0^\infty \hat{A}(x, t + \tau(x, y), y) \exp(i\omega t) dt \right]. \quad (3.8)$$

Преобразуем интеграл в этом равенстве, проинтегрировав его по частям. Тогда получим формулу для его вычисления в виде

$$\int_0^\infty \hat{A}(x, t + \tau(x, y), y) \exp(i\omega t) dt = -\frac{1}{i\omega} \left\{ \hat{A}(x, \tau(x, y) + 0, y) + \int_0^\infty \hat{A}_t(x, t + \tau(x, y), y) \exp(i\omega t) dt \right\}. \quad (3.9)$$

Следовательно, второе слагаемое в формуле (3.8) представляет собой величину порядка $O(1/\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$. Поэтому при вычислении компонент электромагнитного поля по формулам (1.5) главная часть асимптотики по ω функций $E(x, \omega, y)$ и $H(x, \omega, y)$ определяется множителем $\exp(i\omega\tau(x, y))$. Выполняя элементарные вычисления, находим

$$E(x, \omega, y) = \frac{i\omega}{2\tau(x, y)} \exp(i\omega\tau(x, y)) \left[\alpha^{-1}(x, y) - (\alpha^{-1}(x, y) \cdot \nu(x, y))\nu(x, y) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right], \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (3.10)$$

$$H(x, \omega, y) = \frac{i\omega}{2\mu_0\tau(x, y)} \exp(i\omega\tau(x, y)) \left[\nabla\tau(x, y) \times \alpha^{-1}(x, y) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right], \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

В формуле (3.10) $\nu(x, y) = \nabla\tau(x, y)/|\nabla\tau(x, y)| = \nabla\tau(x, y)/n(x)$ — единичный вектор.

§ 4. Сведение задач 1 и 2 к обратной кинематической задаче

Рассмотрим задачу 1. Вычислим асимптотику рассеянного электрического поля E^{sc} при $\omega \rightarrow \infty$. Воспользуемся для этого формулами (3.10) и (2.5). Тогда получим

$$\begin{aligned} E^{sc}(x, \omega, y) &= E(x, \omega, y) - E^0(x, \omega, y) \\ &= i\omega \left[\frac{\alpha^{-1}(x, y) - (\alpha^{-1}(x, y) \cdot \nu(x, y))\nu(x, y)}{2\tau(x, y)} \exp(i\omega\tau(x, y)) - \frac{\mu_0 n_0 (j^0 - (j^0 \cdot \nu^0(x, y))\nu^0(x, y))}{4\pi\tau_0(x, y)} \exp(i\omega\tau_0(x, y)) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Положим в этой формуле $x \in S, y \in S, x \neq y$. Используя данные (1.10) задачи 1, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega^2} f_1^2(x, \omega, y) &= \frac{1}{\omega^2} |E^{sc}(x, \omega, y)|^2 \\ &= \left[\left(\frac{|\alpha^{-1}(x, y) - (\alpha^{-1}(x, y) \cdot \nu(x, y))\nu(x, y)|}{2\tau(x, y)} - \frac{\mu_0 n_0 |j^0 - \nu^0(x, y)(j^0 \cdot \nu^0(x, y))|}{4\pi\tau_0(x, y)} \right)^2 \right. \\ &\quad + 4 \frac{|\alpha^{-1}(x, y) - (\alpha^{-1}(x, y) \cdot \nu(x, y))\nu(x, y)|}{2\tau(x, y)} \frac{\mu_0 n_0 |j^0 - (j^0 \cdot \nu^0(x, y))\nu^0(x, y)|}{4\pi\tau_0(x, y)} \\ &\quad \left. \times \sin^2 \left(\frac{\omega}{2} (\tau(x, y) - \tau_0(x, y)) \right) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right], \quad \omega \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Зафиксировав здесь x и y , получим функцию только одной переменной ω , которая является почти периодической функцией этой переменной. За счет выбора направления единичного вектора $j^0 = j^0(y)$ всегда можно гарантировать, что множитель при квадрате синуса в формуле (4.2) ненулевой. Поэтому при больших ω можно найти период этой функции, т. е. разность $\tau(x, y) - \tau_0(x, y) = \psi(x, y)$. Следовательно, можно найти и $\tau(x, y) = \psi(x, y) + \tau_0(x, y)$ для всех $(x, y) \in S \times S$, $x \neq y$. Приходим к обратной кинематической задаче: найти $n(x)$ внутри Ω по заданным временам пробега $\tau(x, y)$ между любыми точками x и y , лежащими на ее границе.

Рассмотрим задачу 2. Покажем, что и эта задача сводится к обратной кинематической задаче. Вычислим асимптотику рассеянного магнитного поля H^{sc} при $\omega \rightarrow \infty$. Используя формулы (3.11) и (2.6), получаем, что

$$H^{sc}(x, \omega, y) = H(x, \omega, y) - H^0(x, \omega, y) = i\omega \left[\frac{\nabla \tau(x, y) \times \alpha^{-1}(x, y)}{2\mu_0 \tau(x, y)} \exp(i\omega \tau(x, y)) - \frac{n_0^2(\nu^0 \times j^0)}{4\pi \tau_0(x, y)} \exp(i\omega \tau_0(x, y)) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right], \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Положим в этой формуле $x \in S$, $y \in S$, $x \neq y$. Используя данные (1.11) задачи 2, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega^2} f_2^2(x, \omega, y) &= \frac{1}{\omega^2} |H^{sc}(x, \omega, y)|^2 \\ &= \left[\left(\frac{|\nabla \tau(x, y) \times \alpha^{-1}(x, y)|}{2\mu_0 \tau(x, y)} - \frac{n_0^2 |\nu^0 \times j^0|}{4\pi \tau_0(x, y)} \right)^2 + 4 \frac{|\nabla \tau(x, y) \times \alpha^{-1}(x, y)|}{2\mu_0 \tau(x, y)} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{n_0^2 |\nu^0 \times j^0|}{4\pi \tau_0(x, y)} \sin^2 \left(\frac{\omega}{2} (\tau(x, y) - \tau_0(x, y)) \right) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right], \quad \omega \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Зафиксировав здесь x и y , опять получим почти периодическую функцию переменной ω . Поэтому при больших ω можно найти период этой функции, т. е. разность $\tau(x, y) - \tau_0(x, y) = \psi(x, y)$, а потом и $\tau(x, y)$ для всех $(x, y) \in S \times S$, $x \neq y$. Следовательно, опять приходим к обратной кинематической задаче.

Обратную кинематическую задачу стали исследовать в начале прошлого века. Первые результаты, связанные со сферически-симметричной моделью среды, получены немецким геофизиком Герглотцем в 1905 г. Далее одномерная (по числу переменных, от которых зависит неизвестная функция) обратная кинематическая задача рассматривалась многими геофизиками в связи с задачами сейсмологии и сейсморазведки полезных ископаемых. Многомерная обратная кинематическая задача впервые рассмотрена в линеаризованной постановке в [16] (см. также монографию [17] и цитированную в ней литературу). В предположении, что рассматриваемая конформная метрика простая, точная постановка нелинейной двумерной обратной задачи была исследована в работе Р. Г. Мухометова [18]. В этой работе найдена оценка устойчивости решения задачи. Для случая большей размерности результаты, связанные с оценкой устойчивости решения, получены в [19–21]. Численные методы решения обратной кинематической задачи предложены в [22–24].

Из [18–21] следует теорема единственности рассматриваемых задач.

Теорема. При выполнении условий леммы информация (1.10) однозначно определяет решение задачи 1, а информация (1.11) — решение задачи 2.

Заметим, что бесконечная дифференцируемость коэффициента диэлектрической проницаемости ε на самом деле несущественна и может быть заменена требованием конечной гладкости этого коэффициента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chadan K., Sabatier P. C. Inverse problems in quantum scattering theory. New York: Springer-Verl., 1977.
2. Newton R. G. Inverse Schrödinger scattering in three dimensions. New York: Springer-Verl., 1989.
3. Klibanov M. V. Phaseless inverse scattering problems in three dimensions // SIAM J. Appl. Math. 2014. V. 74. P. 392–410.
4. Klibanov M. V. On the first solution of a long standing problem: Uniqueness of the phaseless quantum inverse scattering problem in 3-d // Appl. Math. Lett. 2014. V. 37. P. 82–85.
5. Klibanov M. V. Uniqueness of two phaseless non-overdetermined inverse acoustics problems in 3-d // Appl. Anal. 2014. V. 93. P. 1135–1149.
6. Klibanov M. V., Romanov V. G. The first solution of a long standing problem: Reconstruction formula for a 3-d phaseless inverse scattering problem for the Schrödinger equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, N 4. P. 415–428.
7. Klibanov M. V., Romanov V. G. Explicit solution of 3-D phaseless inverse scattering problems for the Schrödinger equation: the plane wave case // Eurasian J. Math. Computer Appl. 2015. V. 3, N 1. P. 48–63.
8. Novikov R. G. Explicit formulas and global uniqueness for phaseless inverse scattering in multidimensions // J. Geom. Anal. 2015. DOI 10.1007/5.12220–014–9553–7.
9. Novikov R. G. Formulas for phase recovering from phaseless scattering data at fixed frequency // Bull. Sci. Math. 2015. DOI 10.1016/j.bulsci.2015.04.005.
10. Klibanov M. V., Romanov V. G. Explicit formula for the solution of the phaseless inverse scattering problem of imaging of nanostructures // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, N 2. P. 187–193.
11. Romanov V. G. Some geometric aspects in inverse problems // Euras. J. Math. Computer Appl. 2015. V. 3, N 4. P. 68–84.
12. Klibanov M. V., Romanov V. G. Reconstruction procedures for two inverse scattering problem without the phase information // SIAM J. Appl. Math. 2016. V. 76, N 1. P. 178–196. DOI 10.1137/15M1022367.
13. Klibanov M. V., Romanov V. G. Two reconstruction procedures for a 3D phaseless inverse scattering problem for the generalized Helmholtz equation // Inverse Probl. 2016. V. 32, N 2. P. 015005 (16 pp.) DOI 10.1088/0266-5611/32/1/015005.
14. Vainberg B. R. Asymptotic methods in equations of mathematical physics. New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1989.
15. Романов В. Г. О структуре фундаментального решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1577–1587.
16. Романов В. Г. О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 5. С. 1206–1208.
17. Романов В. Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972.
18. Мухометов Р. Г. Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 1. С. 32–35.
19. Мухометов Р. Г., Романов В. Г. К задаче отыскания изотропной римановой метрики в n -мерном пространстве // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 1. С. 41–44.
20. Бернштейн И. Н., Гервер М. Л. О задаче интегральной геометрии для семейства геодезических и об обратной кинематической задаче сейсмики // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 2. С. 302–305.
21. Бейлькин Г. Я. Устойчивость и единственность решения обратной кинематической задачи сейсмики в многомерном случае // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Л.: Наука, 1979. С. 3–6.
22. Алексеев А. С., Лаврентьев М. М., Мухометов Р. Г. и др. Численный метод решения трехмерной обратной кинематической задачи сейсмики // Математические проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1971. С. 143–165.

- 23.** Alekseev A. S., Belonosova A. V. et al. Seismic studies of low-velocity layers and horizontal inhomogeneities within the crust and upper mantle on the territory of the USSR // Tectonophysics. 1973. V. 20. P. 47–56.
- 24.** Алексеев А. С., Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Романов М. Е. Теоретические и вычислительные вопросы сейсмической томографии // Математическое моделирование в геофизике. Новосибирск: Наука, 1988. С. 35–50.

Статья поступила 10 января 2017 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru