Сибирский математический журнал
Июль—август, 2017. Том 58, № 4

УДК 517.998

СУЩЕСТВОВАНИЕ И РЕЛАКСАЦИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. А. Толстоногов

Аннотация. В сепарабельном банаховом пространстве рассматривается дифференциальное включение, значениями которого являются невыпуклые, замкнутые, не обязательно ограниченные множества. Наряду с исходным включением рассматривается включение с овыпукленной правой частью. Доказываются теоремы существования и устанавливаются взаимосвязи между решениями исходного и овыпукленного дифференциальных включений. В отличие от традиционного при изучении таких вопросов предположения липшицевости по фазовой переменной в метрике Хаусдорфа правой части включения мы используем понятие $(\rho - H)$-липшицевости. Рассмотрен пример.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.419

Ключевые слова: существование, релаксация, неограниченность, ρ-хаусдорфово расстояние.

1. Введение. Пусть $T = [0, 1]$ — отрезок числовой прямой, X — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\mathrm{cl}(X)$ — совокупность всех непустых замкнутых множеств из X и $F : Q \subset T \times X \to \mathrm{cl}(X)$ — многозначное отображение. Рассмотрим дифференциальные включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

$$\dot{x} \in \overline{\mathrm{co}} F(t, x), \quad x(0) = x_0, \tag{1.2}$$

где символ $\overline{\mathrm{co}}$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества. Когда значениями отображения $F(t, x)$ являются замкнутые неограниченные множества, говорим о *неограниченном дифференциальном включении.* Если значениями отображения F являются замкнутые ограниченные множества, то имеем дело с *ограниченным дифференциальным включением.* Дифференциальное включение (1.2) называем *овыпукленным.* Нас будут интересовать вопросы существования решений неограниченных включений (1.1) и (1.2), а также аппроксимация решений включения (1.2) решениями включения (1.1). Это свойство обычно называют *релаксацией решений.* Вопросы существования для неограниченных и релаксации для ограниченных дифференциальных включений в конечномерном пространстве хорошо изучены, начиная с классической работы А. Ф. Филиппова [1]. Основополагающим предположением как в работе [1], так и в подавляющем большинстве работ, посвященных вопросам релаксации в конечномерном пространстве, является предположение липшицевости отображения $F(t, x)$ по x, т. е.

$$\mathrm{haus}(F(t, x), F(t, y)) \le k(t)\|x - y\|, \tag{1.3}$$

где $\mathrm{haus}(\cdot,\cdot)$ — метрика Хаусдорфа на пространстве непустых замкнутых ограниченных множеств, а $k(t)$ — суммируемая на T функция.

Теоремы существования и релаксации решений для ограниченных дифференциальных включений в банаховом пространстве при выполнении неравенства (1.3) впервые были доказаны в [2]. Неравенство (1.3) вполне приемлемо, когда значениями отображения F являются замкнутые ограниченные множества. Однако, строго говоря, это неравенство обременительно, когда значениями отображения F являются неограниченные множества. Между тем неограниченность значений многозначных отображений — вполне естественное свойство дифференциальных включений, которые возникают в теории оптимального управления (см. [3] и др.).

Работа представляет собой продолжение исследований, начатых в [4, 5] для неограниченных дифференциальных включений в конечномерном пространстве, не обладающих свойством липшицевости.

Цель данной работы — получить аналоги теорем существования и релаксации при более приемлемом предположении, чем неравенство (1.3), для неограниченных дифференциальных включений в банаховом пространстве.

В идейном плане при доказательстве теорем существования мы следуем работе [1].

2. Основные обозначения и определения. Пусть $T = [0, 1]$ — отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ и с σ-алгеброй Σ измеримых по Лебегу множеств из T. Пусть X — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и порожденной этой нормой метрикой $d(\cdot,\cdot)$, $d(x, A)$ — расстояние от точки x до множества $A \subset X$, X^* — пространство, топологически сопряженное к X с нормой $\|\cdot\|_*$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между X и X^*.

Введем следующие обозначения: $\varnothing$ — пустое множество, 2^X — совокупность всех подмножеств из X, включая пустое множество, $\mathrm{cl}(X)$ — совокупность всех непустых замкнутых подмножеств из X, $\mathrm{ccl}(X)$ — совокупность всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств из X, Θ — нулевой элемент пространства X.

Пусть $\mathscr{B}(X)$ — σ-алгебра борелевских множеств из X и $\Sigma \otimes \mathscr{B}(X)$ — σ-алгебра подмножеств из $T \times X$, порожденная множествами $\mathscr{T} \times A$, $\mathscr{T} \in \Sigma$, $A \in \mathscr{B}(X)$.

Следуя [6], многозначное отображение $U : T \to \mathrm{cl}(X)$ назовем *измеримым*, если множество $U^{-1}(V) = \{t \in T;\ U(t) \cap V \neq \varnothing\}$ принадлежит Σ для любого замкнутого множества $V \subset X$. При $Q \subset \Sigma \otimes \mathscr{B}(X)$ и $U : Q \subset T \times X \to \mathrm{cl}(X)$ отображение U называется $\Sigma \otimes \mathscr{B}(X)$-*измеримым на* Q, если $U^{-1}(V) = \{(t, x) \in Q;\ U(t, x) \cap V \neq \varnothing\} \in \Sigma \otimes \mathscr{B}(X)$ для любого замкнутого множества $V \subset X$.

Пусть $C \in 2^X$. Положим

$$d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|, \quad x \in X,$$

считая, что $d(x, C) = +\infty$, если $C = \varnothing$.

Через ρB, $\rho > 0$, обозначаем открытый шар в X с центром в Θ радиуса ρ, а через $\rho\overline{B}$, $\rho \geq 0$, — замкнутый шар с центром в Θ радиуса ρ.

Положим

$$C\rho = C \cap \rho\overline{B}, \quad \rho \geq 0.$$

Полуотклонение множества $C \in 2^X$ от множества $D \in 2^X$ определяется следующим образом:

$$e(C, D) = \sup_{x \in C} d(x, D)$$

с естественным соглашением $e(C, D) = 0$, если $C = \varnothing$. Заметим, что наши определения влекут $e = +\infty$, если $C \neq \varnothing$ и $D = \varnothing$.

Определим *ρ-хаусдорфово $(\rho - H)$-расстояние*, $\rho \geq 0$, между множествами $C, D \in \mathrm{cl}(X)$ следующим образом [7]:

$$\mathrm{haus}_\rho(C, D) = \max\{e(C\rho, D), e(D\rho, C)\}.$$

Из наших соглашений вытекает, что $\mathrm{haus}_\rho(C, D) \neq +\infty$, $\rho \geq 0$, для $C, D \in \mathrm{cl}(X)$ и $\mathrm{haus}_\rho(C, D) = 0$ для всех $\rho \geq 0$ тогда и только тогда, когда $C = D$. Расстояние $\mathrm{haus}_\rho(\cdot, \cdot)$, $\rho \geq 0$, не является метрикой, поскольку для него не выполняется неравенство треугольника.

Через $C(T, X)$ обозначаем банахово пространство всех непрерывных функций из T в X с топологией равномерной сходимости на T, а через $A^{1,1}(T, X)$ — пространство всех абсолютно непрерывных функций из T в X, у которых производные принадлежат $L^1(T, X)$ [8]. В пространстве $L^1(T, X)$ наряду со стандартной нормой рассмотрим слабую норму

$$\|f\|_\omega = \max_{0 \leq s \leq t \leq 1} \left\| \int_s^t f(\tau)\, d\tau \right\|, \quad f \in L^1(T, X). \tag{2.1}$$

Отметим, что норма (2.1) эквивалентна норме

$$|||f||| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \int_0^t f(s)\, ds \right\|. \tag{2.2}$$

Следующее определение в удобных для нас терминах эквивалентно определению 1.1 в [4].

Определение 2.1. Пусть $Q \subset T \times X$ и $F : Q \to \mathrm{cl}(X)$. Отображение F называется *интегрально $(\rho - H)$-липшицевым на Q*, если существуют $\beta \geq 0$ и $k(\cdot) \in L^1(T, R^+)$ такие, что неравенство

$$\mathrm{haus}_\rho(F(t, x), F(t, y)) \leq (k(t) + \beta\rho)\|x - y\| \tag{2.3}$$

выполняется для всех $(t, x), (t, y) \in Q$ и всех $\rho \geq 0$.

Если неравенство (2.3) строгое при $x \neq y$, то отображение F называется *строго интегрально $(\rho - H)$-липшицевым.*

Пусть $y \in C(T, X)$, $b > 0$, $Q = \{(t, x) \in T \times X;\ \|x - y(t)\| \leq b\}$, $\|x_0 - y(0)\| \leq \delta < b$ и $\mathscr{T} = [0, d]$, $0 < d \leq 1$.

Определение 2.2. Функция $x(\cdot) \in A^{1,1}(\mathscr{T}, X)$, $x(0) = x_0$, $\|x(t) - y(t)\| \leq b$, $t \in \mathscr{T}$, называется *решением дифференциального включения* (1.1), если почти всюду на $\mathscr{T}$ имеет место включение $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$.

Аналогично определяется решение включения (1.2).

При этом если $0 < d < 1$, то решение $x(t)$ называется *локальным.* Если $d = 1$, то решение $x(t)$ называется *глобальным.*

Решение $x(t)$ включения (1.2) называется *строгим*, если существует функция $\alpha(\cdot) \in L^1(\mathscr{T}, R^+)$ такая, что

$$\dot{x}(t) \in \overline{\mathrm{co}}(F(t, x(t)) \cap \alpha(t)\overline{B}) \quad \text{п. в.} \tag{2.4}$$

Ясно, что любое решение включения (1.1) является строгим решением включения (1.2).

Утверждение 2.1 [7, утверждение 1.4]. *Пусть $C, D \in \mathrm{ccl}(X)$ таковы, что $C\rho_0$ и $D\rho_0$ непусты для некоторого $\rho_0 \geq 0$. Тогда для всех $\rho > \rho_0$*

$$\mathrm{haus}(C\rho, D\rho) \leq \frac{2\rho}{\rho - \rho_0}\,\mathrm{haus}_\rho(C, D). \tag{2.5}$$

3. Существование решений. В этом пункте докажем теоремы существования решения включений (1.1) и (1.2). Обозначим через $r(t)$, $r(0) = r_0 \geq 0$, решение дифференциального уравнения

$$\dot r(t) = a(t) + k(t)r(t), \quad t \in T,\ r(0) = r_0 \geq 0, \tag{3.1}$$

$$a(\cdot), k(\cdot) \in L^1(T, R^+), \quad a(t) \geq 0, \quad k(t) > 0, \quad t \in T, \tag{3.2}$$

которое имеет вид

$$r(t) = r_0 e^{m(t)} + \int\limits_0^t e^{m(t)-m(s)} a(s)\,ds, \quad m(t) = \int\limits_0^t k(s)\,ds, \quad t \in T. \tag{3.3}$$

Пусть $F : T \times b\overline{B} \to \mathrm{cl}(X)$, $b > 0$.

Сделаем следующие предположения.

Гипотезы $H(F)$**.** (1) *Отображение $t \to F(t, x(t))$ измеримо для любой функции $x(\cdot) \in C(T, X)$, $\|x(t)\| \leq b$, $t \in T$;*

(2) *выполнено неравенство*

$$d(\Theta, F(t, x)) < a(t) + k(t)\|x\| \ \text{ п. в.}, \quad \|x\| \leq b, \tag{3.4}$$

$d(\Theta, F(t, \Theta)) = 0$ *при* $a(t) = 0$;

(3) *имеет место неравенство*

$$\mathrm{haus}_\rho(F(t, x), F(t, y)) < k(t)\|x - y\| \text{ п. в.}; \quad \|x\| \leq b,\ \|y\| \leq b,\ x \neq y, \tag{3.5}$$

$0 \leq \rho \leq \dot r(t)$, $t \in T$, *где* $r(t)$ — *решение уравнения* (3.1).

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot x \in F(t, x), \quad x(0) = x_0,\ \|x_0\| < b, \tag{3.6}$$

$F : T \times b\overline{B} \to \mathrm{cl}(X)$.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются гипотезы $H(F)$ и $\|x_0\| \leq r_0 < b$. Тогда существует такое решение $x(t)$, $x(0) = x_0$, включения (3.6), что*

$$\|x(t)\| \leq r(t), \quad \|\dot x(t)\| \leq \|\dot r(t)\| \quad \text{п. в.} \tag{3.7}$$

для $t \in T$, при которых $r(t) \leq b$.

Доказательство. Из (3.2) следует, что функция $t \to r(t)$ не убывает. Так как $\|x_0\| \leq r_0 < b$, либо $r(t) \leq b$, $t \in T$, либо существует единственная точка $d \in (0, 1]$ такая, что $r(t) > b$, $t \in (d, 1]$, $r(d) = b$.

Пусть $\mathscr{T} = [0, d]$. Всюду в дальнейшем считаем, что $\mathscr{T}$ является областью изменения переменной t. Из (3.1), (3.4) следует, что

$$F(t, x) \cap \dot r(t)\overline{B} \neq \varnothing \text{ п. в.}, \quad \|x\| \leq r(t).$$

Воспользовавшись (3.5), получим

$$F(t, x) \cap \dot r(t)\overline{B} \subset F(t, y) + k(t)\|x - y\|B \quad \text{п. в.}, \tag{3.8}$$

$\|x\| \le r(t)$, $\|y\| \le r(t)$.

Построим по индукции последовательность $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots)$:

$$x_0(t) = \Theta, \quad x_{i+1}(t) = x_0 + \int_0^t v_i(s)\,ds, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.9}$$

где $v_i \in L^1(\mathscr{T}, X)$,

$$\dot{x}_{i+1}(t) = v_i(t) \in F(t, x_i(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{3.10}$$

$$\|\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)\| \le k(t)\|x_i(t) - x_{i-1}(t)\| \quad \text{п. в.}, \tag{3.11}$$

$$\|\dot{x}_{i+1}(t)\| = \|v_i(t)\| \le \dot{r}(t) \text{ п. в.}, \quad \|x_i(t)\| \le r(t), \tag{3.12}$$

$$\|\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)\| \le k(t)\left\{ r_0 \frac{[m(t)]^{i-1}}{(i-1)!} + \int_0^t \frac{[m(t) - m(s)]^{i-1}}{(i-1)!} a(s)\,ds \right\} \quad \text{п. в.}, \tag{3.13}$$

$$\|x_{i+1}(t) - x_i(t)\| \le r_0 \frac{[m(t)]^i}{i!} + \int_0^t \frac{[m(t) - m(s)]^i}{i!} a(s)\,ds. \tag{3.14}$$

Пусть $\mathscr{T}_0 = \{t \in \mathscr{T};\ a(t) = 0\}$. Из неравенства (3.4) вытекает, что

$$\alpha_0(t) = d(\Theta, F(t, x_0(t))) < a(t) \text{ п. в.}, \quad t \in \mathscr{T} \setminus \mathscr{T}_0. \tag{3.15}$$

Согласно гипотезе $H(F)(1)$ функция $\alpha_0(t)$ измерима на измеримом множестве $\mathscr{T} \setminus \mathscr{T}_0$ [6] и $\alpha_0(t) < \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2} < a(t)$ п. в. на $\mathscr{T} \setminus \mathscr{T}_0$. Поэтому в соответствии с (3.15) отображение $t \to F(t, x_0(t)) \cap \frac{\alpha_0(t) + a(t)}{2} \overline{B}$ измеримо на $\mathscr{T} \setminus \mathscr{T}_0$ с непустыми замкнутыми значениями. Поэтому существует измеримый селектор $v^*(t)$ [6] этого отображения. Положим $v_0(t) = v^*(t)$, $t \in \mathscr{T} \setminus \mathscr{T}_0$, $v_0(t) = \Theta$, $t \in \mathscr{T}_0$. Очевидно, что

$$\|v_0(t)\| \le a(t) \quad \text{п. в.}, \tag{3.16}$$

$$v_0(t) \in F(t, x_0(t)) \quad \text{п. в.} \tag{3.17}$$

Положим

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t v_0(s)\,ds. \tag{3.18}$$

Из (3.1), (3.16), (3.18) вытекает, что

$$\|\dot{x}_1(t)\| = \|v_0(t)\| \le \dot{r}(t) \text{ п. в.}, \quad \|x_1(t)\| \le r(t). \tag{3.19}$$

Так как $\|x_0(t)\| = 0 \le r(t)$, $t \in \mathscr{T}$, из (3.8), (3.17), (3.19) следует, что

$$d(\dot{x}_1(t), F(t, x_1(t))) < k(t)\|x_1(t)\| \quad \text{п. в.},$$

если $\|x_1(t)\| \ne 0$.

Пусть $\mathscr{T}_1 = \{t \in \mathscr{T};\ \|x_1(t)\| = 0\}$. Так как функция $\alpha_1(t) = d(\dot{x}_1(t), F(t, x_1(t)))$ измерима и $\alpha_1(t) < \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|x_1(t)\|}{2} < k(t)\|x_1(t)\|$, $t \notin \mathscr{T}_1$, а множество $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}$ замкнуто, многозначное отображение

$$t \to F(t, x_1(t)) \cap \left(\dot{x}_1(t) + \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|x_1(t)\|}{2} \overline{B} \right), \quad t \in \mathscr{T} \setminus \mathscr{T}_1, \tag{3.20}$$

измеримо с непустыми замкнутыми значениями. Поэтому на $\mathscr{T}\setminus\mathscr{T}_1$ существует измеримый селектор $v_1^*(t)$ этого отображения. Полагая $v_1(t)=v_1^*(t)$, $t\in\mathscr{T}\setminus\mathscr{T}_1$, $v_1(t)=\dot{x}_1(t)$, $t\in\mathscr{T}_1$, получим

$$v_1(t)\in F(t,x_1(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{3.21}$$

$$\|\dot{x}_1(t)-v_1(t)\|\le k(t)\|x_1(t)\| \quad \text{п. в.} \tag{3.22}$$

Из (3.16), (3.19) и (3.22) вытекает, что

$$\|v_1(t)\|\le a(t)+k(t)r(t) \quad \text{п. в.} \tag{3.23}$$

Положим

$$x_2(t)=x_0+\int\limits_0^t v_1(s)\,ds. \tag{3.24}$$

Из (3.23) и (3.24) следует, что

$$\|\dot{x}_2(t)\|=\|v_1(t)\|\le\dot{r}(t) \text{ п. в.}, \quad \|x_2(t)\|\le r(t). \tag{3.25}$$

Воспользовавшись (3.16), (3.18), (3.22), получим, что

$$\|\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)\|\le k(t)\left\{r_0+\int\limits_0^t a(s)\,ds\right\} \quad \text{п. в.}, \tag{3.26}$$

$$\|x_2(t)-x_1(t)\|\le r_0m(t)+\int\limits_0^t k(\tau)\left(\int\limits_0^\tau a(s)\,ds\right)d\tau. \tag{3.27}$$

Так как

$$\int\limits_0^t k(\tau)\left(\int\limits_0^\tau a(s)\,ds\right)d\tau=\int\limits_0^t[m(t)-m(s)]a(s)\,ds,$$

из (3.27) вытекает, что

$$\|x_2(t)-x_1(t)\|\le r_0m(t)+\int\limits_0^t[m(t)-m(s)]a(s)\,ds. \tag{3.28}$$

Из (3.24), (3.21), (3.22), (3.25), (3.26) и (3.28) получаем, что соотношения (3.9)–(3.14) имеют место при $i=1$.

Предположим, что построены $x_1(t),\dots,x_i(t)$, удовлетворяющие соотношениям (3.9)–(3.14). Тогда

$$\dot{x}_i(t)\in F(t,x_{i-1}(t)) \text{ п. в.}, \quad \|\dot{x}_i(t)\|\le\dot{r}(t) \text{ п. в.},$$

$$\|x_{i-1}(t)\|\le r(t), \quad \|x_i(t)\|\le\dot{r}(t).$$

Воспользовавшись (3.8) и этими соотношениями, получим

$$\dot{x}_i(t)\in F(t,x_{i-1}(t))\cap\dot{r}(t)\overline{B}\subset F(t,x_i(t))+k(t)\|x_i(t)-x_{i-1}(t)\|B \quad \text{п. в.}$$

Из этого включения вытекает, что

$$d(\dot{x}_i(t),F(t,x_i(t)))<k(t)\|x_{i-1}(t)-x_i(t)\| \quad \text{п. в.},$$

если $\|x_i(t) - x_{i-1}(t)\| \neq 0$. Рассуждая, как выше, выводим, что существует измеримая функция $v_i(t)$ такая, что

$$v_i(t) \in F(t, x_i(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{3.29}$$

$$\|\dot{x}_i(t) - v_i(t)\| \le k(t)\|x_i(t) - x_{i-1}(t)\| \quad \text{п. в.} \tag{3.30}$$

Положим

$$x_{i+1}(t) = x_0 + \int\limits_0^t v_i(s)\,ds. \tag{3.31}$$

Из равенства $\dot{x}_{i+1}(t) = v_i(t)$ и (3.30) вытекает, что

$$\|\dot{x}_{i+1}(t)\| \le k(t)\sum_{j=1}^{i}\|x_j(t) - x_{j-1}(t)\| + \|\dot{x}_1(t)\| \quad \text{п. в.}$$

Воспользовавшись (3.14), (3.16) и последним неравенством, получим

$$\|\dot{x}_{i+1}(t)\| \le k(t)\left[r_0\sum_{j=0}^{i-1}\frac{[m(t)]^j}{j!} + \sum_{j=0}^{i-1}\int\limits_0^t\frac{[m(t)-m(s)]^j}{j!}a(s)\,ds\right] + a(t) \quad \text{п. в.} \tag{3.32}$$

Так как $1 + \frac{z}{1!} + \ldots + \frac{z^j}{j!} \le e^z, \quad z \ge 0$, из (3.3), (3.32) следует, что

$$\|\dot{x}_{i+1}(t)\| \le a(t) + k(t)r(t) = \dot{r}(t) \quad \text{п. в.} \tag{3.33}$$

Поэтому

$$\|x_{i+1}(t)\| \le r(t). \tag{3.34}$$

Из (3.30), (3.31) и (3.14) получаем

$$\|\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)\| \le k(t)\left[r_0\frac{[m(t)]^{i-1}}{(i-1)!} + \int\limits_0^t\frac{[m(t)-m(s)]^{i-1}}{(i-1)!}a(s)\,ds\right] \quad \text{п. в.} \tag{3.35}$$

Из (3.35) непосредственно вытекает неравенство (3.14) для $\|x_{i+1}(t) - x_i(t)\|$. Чтобы убедиться в этом, нужно производную от правой части неравенства (3.14) сравнить с правой частью неравенства (3.35) и учесть, что при $t = 0$ левая и правая части неравенства (3.14) равны нулю.

Согласно (3.29)–(3.31), (3.33)–(3.35) соотношения (3.9)–(3.14) имеют место и для $x_{i+1}(t)$. Тем самым последовательность $x_i(t)$, $i \ge 1$, удовлетворяющая (3.9)–(3.14), построена. Из (3.14) вытекает, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\|x_{i+1}(t) - x_i(t)\|$ сходится при каждом $t \in \mathscr{T}$. Поэтому для каждого $t \in \mathscr{T}$ последовательность $x_i(t)$, $i \ge 1$ фундаментальна. Значит, последовательность $x_i(t)$, $i \ge 1$, поточечно сходится к некоторой функции $x(t)$. Аналогично из (3.13) получаем, что при почти каждом $t \in \mathscr{T}$ последовательность $\dot{x}_i(t)$, $i \ge 1$, сходится к некоторой функции $v(t)$. Из (3.12) вытекает, что

$$\|x(t)\| \le r(t), \quad \|v(t)\| \le \dot{r}(t) \quad \text{п. в.} \tag{3.36}$$

Поэтому последовательность $\dot{x}_i(t)$, $i \ge 1$, сходится к $v(t)$ в $L^1(\mathscr{T}, X)$. Воспользовавшись равенством (3.9) и переходя в нем к пределу при $i \to \infty$, получим

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t v(s)\,ds.$$

Поэтому $x(t)$ является абсолютно непрерывной функцией с $\dot{x}(t) = v(t)$ п. в. Из (3.36), (3.8)–(3.10) следует, что

$$d(\dot{x}_{i+1}(t), F(t, x(t))) \le k(t)\|x_i(t) - x(t)\| \quad \text{п. в.}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $i \to \infty$, имеем

$$d(\dot{x}(t), F(t, x(t))) = 0 \quad \text{п. в.}$$

Поэтому

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{п. в.}$$

и $x(t)$ является решением дифференциального включения (3.6), удовлетворяющим неравенствам (3.7) при $t \in \mathscr{T}$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.1 вытекает, что если выполняются гипотезы $H(F)$, то включение

$$\dot{x} \in \overline{\text{co}}F(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad \|x_0\| < b, \tag{3.37}$$

имеет решение.

Докажем существование решения включения (3.37) при иных предположениях.

Гипотезы $H(\overline{\text{co}}F)$**.** (1) *Отображение* $t \to \overline{\text{co}}F(t, x(t))$ *измеримо для любой функции* $x(\cdot) \in C(T, X)$, $\|x(t)\| \le b$, $t \in T$;

(2) *отображение* $\overline{\text{co}}F(t, x)$ *строго интегрально* $(\rho - H)$*-липшицево на* $T \times b\overline{B}$, *т. е. существуют* $m(\cdot) \in L^1(T, R^+)$ *и* $\beta > 0$ *такие, что*

$$\text{haus}_\rho(\overline{\text{co}}F(t, x), \overline{\text{co}}F(t, y)) < (m(t) + \beta\rho)\|x - y\| \text{ п. в.}, \quad \rho \ge 0; \tag{3.38}$$

(3) *имеет место неравенство*

$$d(\Theta, \overline{\text{co}}F(t, x)) < \rho_0(t) \text{ п. в.}, \ \|x\| \le b, \ \rho_0(\cdot) \in L^1(T, R^+), \ \rho_0(t) > 0, \ t \in T. \tag{3.39}$$

Пусть

$$\rho(t) = 2\rho_0(t), \tag{3.40}$$

$$l(t) = 4(m(t) + \beta\rho(t)) \tag{3.41}$$

и $r_*(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{r}_*(t) = \rho(t) + l(t)r_*(t), \quad r_*(0) = r_0 < b. \tag{3.42}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполняются гипотезы* $H(\overline{\text{co}}F)$ *и* $\|x_0\| \le r_0 < b$. *Тогда существует такое решение* $x(t)$, $x(0) = x_0$, *включения* (3.37), *что*

$$\|x(t)\| \le r_*(t), \quad \|\dot{x}(t)\| \le \dot{r}_*(t) \quad \text{п. в.} \tag{3.43}$$

для тех $t \in T$, *при которых* $r_*(t) \le b$.

Доказательство. Из (3.39), (3.40) следует, что $\rho_0(t) > 0$, $t \in T$, $\rho(t) > \rho_0(t)$ и $\overline{\text{co}}F(t, x) \cap \rho_0(t)\overline{B} \ne \varnothing$, $\overline{\text{co}}F(t, x) \cap \rho(t)\overline{B} \ne \varnothing$, $t \in T$, $\|x\| \le b$. Положим

$$U(t, x) = \overline{\text{co}}F(t, x) \cap \rho(t)\overline{B} \text{ п. в.}, \quad \|x\| \le b. \tag{3.44}$$

Тогда из (2.5), (3.41), (3.38) и (3.44) вытекает, что

$$\text{haus}(U(t, x), U(t, y)) < l(t)\|x - y\| \quad \text{п. в.}, \tag{3.45}$$

$\|x\| \le b$, $\|y\| \le b$, $x \ne y$.

Воспользовавшись (3.44), (3.45), получим

$$d(\Theta, U(t, x)) < \rho(t) + l(t)\|x\|, \quad \|x\| \le b. \tag{3.46}$$

Из гипотезы $H(\overline{\text{co}}F)$ следует, что для любой функции $x(\cdot) \in C(T, X)$, $\|x(t)\| \le b$, $t \in T$, многозначное отображение $t \to U(t, x(t))$ измеримо. Теперь утверждение теоремы вытекает из (3.42), (3.45), (3.46) и теоремы 3.1, примененной к включению

$$\dot{x} \in U(t, x), \quad x(0) = x_0.$$

Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Пусть $F : T \times X \to \mathrm{cl}(X)$ и для любых $x(\cdot) \in C(T, X)$ имеют место гипотезы $H(\overline{\mathrm{co}}F)$, в которых неравенства* (3.38), (3.39) *выполняются для любых $x, y \in X$, $x \neq y$. Тогда для любых $x_0 \in X$, $r_*(0) = r_0 > \|x_0\|$ существует решение $x(t)$, $x(0) = x_0$, включения* (3.37), *определенное на T и удовлетворяющее неравенствам* (3.43).

Пусть $g(\cdot) \in A^{1,1}(T, X)$, $Q(g) = \{(t, x) \in T \times X;\ \|g(t) - x\| \leq b\}$, $b > 0$ и $F : Q(g) \to \mathrm{cl}(X)$.

Сделаем следующие предположения.

Гипотезы $H_g(F)$. (1) *Для любой функции $x(\cdot) \in C(T, X)$, $\|x(t) - g(t)\| \leq b$, $t \in T$, отображение $t \to F(t, x(t))$ измеримо;*

(2) $d(\dot{g}(t), F(t, x)) < a(t) + k(t)\|x - g(t)\|$ п. в., $\|x - g(t)\| \leq b$, $\|y - g(t)\| \leq b$, $x \neq y$;

(3) $\mathrm{haus}_\rho(-\dot{g}(t) + F(t, x), -\dot{g}(t) + F(t, y)) < k(t)\|x - y\|$ *п. в.*, $\|x - g(t)\| \leq b$, $\|y - g(t)\| \leq b$, $x \neq y$; $0 \leq \rho \leq \dot{r}(t)$, $t \in T$, *где $r(t)$ — решение уравнения* (3.1).

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x),\ x(0) = x_0, \quad \|x_0 - g(0)\| < b. \tag{3.47}$$

Следствие 3.2. *Пусть выполняются гипотезы $H_g(F)$ и $\|x_0 - g(0)\| \leq r_0 < b$. Тогда существует такое решение $x(t)$, $x(0) = x_0$, включения* (3.47), *что*

$$\|x(t) - g(t)\| \leq r(t), \quad \|\dot{x}(t) - \dot{g}(t)\| \leq \dot{r}(t) \quad \text{п. в.} \tag{3.48}$$

для тех $t \in T$, при которых $r(t) \leq b$.

Положим

$$U(t, z) = -\dot{g}(t) + F(t, z + g(t)), \quad \|z\| \leq b. \tag{3.49}$$

Тогда будет определено многозначное отображение $U : T \times b\overline{B} \to \mathrm{cl}(X)$. Из гипотез $H_g(F)$ вытекает, что для отображения $U(t, z)$ выполняются гипотезы $H(F)$(1),(2). Согласно гипотезе $H(F)$(2)

$$U(t, z) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \neq \varnothing, \quad \|z\| \leq b. \tag{3.50}$$

Воспользовавшись гипотезой $H_g(F)$(3) и (3.49), (3.50), имеем

$$U(t, z) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \subset U(t, v) + k(t)\|z - v\|B \quad \text{п. в.}$$

$\|z\| \leq b$, $\|v\| \leq b$. Из этого включения получаем

$$\mathrm{haus}_\rho(U(t, z), U(t, v)) < k(t)\|z - v\| \quad \text{п. в.},$$
$$\|z\| \leq b, \quad \|v\| \leq b, \quad z \neq v, \quad 0 \leq \rho \leq \dot{r}(t).$$

Согласно $Hg(F)$(1),(2) для отображения $U : T \times d\overline{B} \to \mathrm{cl}(X)$ выполняются все гипотезы (гипотезы $H(F)$), при которых для дифференциального включения

$$\dot{z} \in U(t, z), \quad z(0) = z_0, \quad \|z_0\| < b$$

справедливы утверждения теоремы 3.1, т. е. оно имеет решение $z(t)$. Полагая $x(t) = z(t) + g(t)$, получаем, что $x(t)$, $x(0) = x_0$, является решением включения (3.47), удовлетворяющим неравенствам (3.48).

4. Релаксация. Теорема 3.2 дает условия, при которых включение (1.2) имеет решение. В этом пункте рассмотрим вопрос аппроксимации решений включения (1.2) решениями включения (1.1).

Пусть $x_*(t)$, $x_*(0) = x_0$, — решение включения (1.2), определенное на отрезке T,

$$Q_* = \{(t, x) \in T \times X;\ \|x - x_*(t)\| \leq b\}, \quad b > 0.$$

Предположим, что отображение $F : Q_* \to \mathrm{cl}(X)$ обладает следующими свойствами.

Гипотезы $H_*(F)$**.** (1) *Отображение* $t \to F(t, x(t))$ *измеримо для любой функции* $x(\cdot) \in C(T, X)$, $\|x(t) - x_*(t)\| \le b$, $t \in T$;

(2) *существует функция* $\gamma(\cdot) \in L^1(T, R^+)$ *такая, что*

$$F(t, x) \cap \gamma(t)\overline{B} \ne \varnothing, \quad \|x - x_*(t)\| \le b; \tag{4.1}$$

(3) *отображение* $F(t, x)$ *строго интегрально* $(\rho - H)$*-липшицево на* Q_*, *т. е.*

$$\mathrm{haus}_\rho(F(t, x), F(t, y)) < (k_*(t) + \beta\rho)\|x - y\|, \tag{4.2}$$

$k_*(\cdot) \in L^1(T, R^+)$, $k_*(t) > 0$, $t \in T$, $\beta > 0$, $0 \le \rho$, $\|x - x_*(t)\| \le b$, $\|y - x_*(t)\| \le b$, $x \ne y$.

Теорема 4.1. *Пусть* $x_*(t)$, $x_*(0) = x_0$, $t \in T$, *— строгое решение включения* (1.2) *и выполняются гипотезы* $H_*(F)$. *Тогда существует последовательность* $x_n(t)$, $x_n(0) = x_0$, $t \in T$, *решений включения* (1.1), *определенных на* T, *такая, что* $x_n(t) \to x_*(t)$ *в пространстве* $C(T, X)$.

Доказательство. Из (2.4) и теоремы 2.2 в [9] следует, что существует последовательность $\dot{y}_n(\cdot) \in L^1(T, X)$, $n \ge 1$,

$$\dot{y}_n(t) \in F(t, x_*(t)) \cap \alpha(t)\overline{B} \quad \text{п. в.}, \tag{4.3}$$

сходящаяся к $\dot{x}_*(t)$ в пространстве $L^1_\omega(T, X)$.

Положив

$$y_n(t) = x_0 + \int_0^t \dot{y}_n(s)\, ds, \quad n \ge 1,$$

и воспользовавшись (2.2), получим, что

$$y_n(t) \to x_*(t) \quad \text{в пространстве } C(T, X). \tag{4.4}$$

Тогда из (4.1) и (4.4) вытекает, что

$$F(t, y_n(t)) \cap \gamma(t)\overline{B} \ne \varnothing, \quad t \in T, \tag{4.5}$$

при достаточно больших $n \ge 1$.

Положим

$$l(t) = \max(\alpha(t), k_*(t), \gamma(t)), \quad t \in T. \tag{4.6}$$

Тогда $l(\cdot) \in L^1(T, R^+)$ и $l(t) > 0$, $t \in T$. Воспользовавшись (4.1), (4.2) и (4.6), получим

$$F(t, x) \cap l(t)\overline{B} \ne \varnothing, \quad \|x_*(t) - x\| \le b \tag{4.7}$$

и при достаточно больших $n \ge 1$

$$F(t, x_*(t)) \cap l(t)\overline{B} \subset F(t, y_n(t)) + l(t)(1 + \beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|B \quad \text{п. в.}$$

Из этого включения и (4.3) вытекает, что

$$d(\dot{y}_n(t), F(t, y_n(t))) < l(t)(1 + \beta)\|x_*(t) - y_n(t)\| \quad \text{п. в.} \tag{4.8}$$

при достаточно больших $n \ge 1$. Согласно (4.4) существует $n_0 \ge 1$ такое, что $\|x_*(t) - y_n(t)\| \le b/2$, $t \in T$, $n \ge n_0$. Поэтому можно определить многозначные отображения

$$U_n(t, z) = -\dot{y}_n(t) + F(t, z + y_n(t)), \tag{4.9}$$

$\|z\| \le b/2$, $n \ge n_0$, $t \in T$.

Из гипотезы $H_*(F)(1)$ следует, что для любой функции $z(\cdot) \in C(T,X)$, $\|z(t)\| \le b/2$, $t \in T$, многозначное отображение $t \to U_n(t, z(t))$, $n \ge n_0$, измеримо. Так как

$$\begin{aligned} -\dot{y}_n(t) + F(t, z + y_n(t)) \cap l(t)\overline{B} \subset (-\dot{y}_n(t) + F(t, z + y_n(t))) \\ \cap (-\dot{y}_n(t) + l(t)\overline{B}) \subset (-\dot{y}_n(t) + F(t, z + y_n(t))) \cap 2l(t)\overline{B}, \quad n \ge n_0, \end{aligned}$$

из (4.7) имеем

$$U_n(t,z) \cap 2l(t)\overline{B} \ne \varnothing, \quad \|z\| \le b/2,\ t \in T,\ n \ge n_0. \tag{4.10}$$

Воспользовавшись (4.2), (4.6) и (4.9), (4.10), получим

$$U_n(t,z) \cap 2l(t)\overline{B} \subset U_n(t,v) + (l(t) + 3\beta l(t))\|z - v\|B, \quad \|z\| \le b/2,\ \|v\| \le b/2,\ n \ge n_0.$$

Из этого включения вытекает, что

$$U_n(t,\Theta) \cap 2l(t)\overline{B} \subset U_n(t,z) + l(t)(1 + 3\beta) \cdot \|z\|B, \quad \|z\| \le b/2,\ n \ge n_0.$$

Поэтому для $n \ge n_0$, $t \in T$, $z \in X$, $\|z\| \le b/2$, $u \in U_n(t,\Theta) \cap 2l(t)\overline{B}$ существует точка $w \in U_n(t,z)$, для которой имеет место неравенство

$$\|u - w\| < l(t)(1 + 3\beta)\|z\|. \tag{4.11}$$

Тогда

$$d(\Theta, U_n(t,z)) < \|u\| + l(t)(1 + 3\beta)\|z\|. \tag{4.12}$$

Воспользовавшись (4.8), (4.9), получим

$$d(\Theta, U_n(t,\Theta)) < l(t)(1 + \beta)\|x_*(t) - y_n(t)\|.$$

Из этого неравенства, (4.12) и произвольности точки $u \in U_n(t,\Theta) \cap 2l(t)\overline{B}$ вытекает, что

$$d(\Theta, U_n(t,z)) < l(t)(1 + \beta)\|x_*(t) - y_n(t)\| + l(t)(1 + 3\beta)\|z\|, \quad \|z\| \le b/2,\ n \ge n_0. \tag{4.13}$$

Пусть

$$a_n(t) = l(t)(1 + \beta)(\|x_*(t) - y_n(t)\| + 1/n), \tag{4.14}$$

$$k(t) = l(t)(1 + 3\beta). \tag{4.15}$$

С учетом обозначений (4.14), (4.15) неравенство (4.13) примет вид

$$d(\Theta, U_n(t,z)) < a_n(t) + k(t)\|z\|, \tag{4.16}$$

$\|z\| \le b/2$, $n \ge n_0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{r}_n(t) = a_n(t) + k(t) r_n(t), \quad r_n(0) = 0. \tag{4.17}$$

Воспользовавшись формулой (3.3) для решения уравнения (3.1), заменяя в ней $a(t)$ на $a_n(t)$ и r_0 на $r_n(0) = 0$ и учитывая (4.4), (4.14), получим, что

$$r_n(t) \to 0 \quad \text{в пространстве } C(T, R^+). \tag{4.18}$$

Поэтому при достаточно больших $n \ge n_0$ имеет место неравенство

$$0 \le r_n(t) \le b/2, \quad t \in T. \tag{4.19}$$

Согласно (4.16), (4.17), (4.19)

$$U_n(t,z)\cap \dot r_n(t)\overline{B}\neq\varnothing,\quad \|z\|\le r_n(t),\ t\in T. \tag{4.20}$$

Воспользовавшись (4.2), (4.3), (4.9), (4.6), (4.20), получим

$$U_n(t,z)\cap \dot r_n(t)\overline{B}\subset U_n(t,v)+(l(t)+\beta(l(t)+\dot r_n(t)))\|z-v\|B, \tag{4.21}$$

$\|z\|\le r_n(t)$, $\|v\|\le r_n(t)$, $t\in T$, при достаточно больших $n\ge n_0$. Из (4.4), (4.14), (4.15), (4.17), (4.18) вытекает, что при достаточно больших $n\ge n_0$ имеет место неравенство

$$0\le \dot r_n(t)<2l(t)\quad \text{п. в.}$$

Поэтому в соответствии с (4.21), (4.17) имеем

$$U_n(t,z)\cap \dot r_n(t)\overline{B}\subset U_n(t,v)+k(t)\|z-v\|B, \tag{4.22}$$

$\|z\|\le r_n(t)$, $\|v\|\le r_n(t)$, $t\in T$, при достаточно больших $n\ge n_0$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot z\in U_n(t,z),\quad z(0)=\Theta, \tag{4.23}$$

$\|z\|\le b/2$, $t\in T$. Отметим, что неравенство (4.16) является аналогом неравенства (3.4), а включение (4.22) — аналогом включения (3.8). Учитывая (4.19), из теоремы 3.1 получим, что при достаточно больших $n\ge n_0$ включение (4.23) имеет решение $z_n(t)$, $z_n(0)=\Theta$, определенное на T и удовлетворяющее неравенствам

$$\|z_n(t)\|\le r_n(t),\ t\in T,\quad \|\dot z_n(t)\|\le \dot r_n(t)\ \text{п. в.} \tag{4.24}$$

Положим

$$x_n(t)=z_n(t)+y_n(t),\quad n\ge n_0. \tag{4.25}$$

Воспользовавшись (4.4), (4.9), (4.18), (4.19), (4.24), получим, что при достаточно больших $n\ge n_0$ имеет место включение

$$\dot x_n(t)\in F(t,x_n(t))\ \text{п. в.},\quad x_n(0)=x_0, \tag{4.26}$$

$\|x_n(t)-x_*(t)\|\le b$, $t\in T$. Теперь из (4.25), (4.26), (4.18), (4.24) вытекает, что последовательность решений $x_n(t)$, $x_n(0)=x_0$ включения (1.1), определенных на T, сходится в $C(T,X)$ к решению $x_*(t)$, $x_*(0)=x_0$, включения (1.2). Теорема доказана.

Замечание 4.1. Условия теоремы 4.1 гарантируют существование решений включения (1.1), определенных на T.

Замечание 4.2. Гипотезы $H(F)(1)$ и $H_g(F)(1)$ будут иметь место, если отображение $F(t,x)$ будет $\Sigma\otimes\mathscr{B}(X)$-измеримым на Q и $Q(g)$ соответственно.

5. Пример. В этом пункте приведем пример многозначного отображения $F(t,x)$ с непустыми замкнутыми значениями, при котором дифференциальное включение (1.2) имеет решение, любое решение включения (1.2) является строгим и справедлива теорема релаксации.

Пусть $\Phi: T\times X\to X^*$, $b_i: T\times X\to R$, $i=1,2$,

$$\|\Phi(t,x)\|_*\ge d>0,\quad b_2(t,x)\le b_1(t,x),\quad (t,,x)\in T\times X. \tag{5.1}$$

Всюду в дальнейшем считаем, что неравенства (5.1) имеют место. Рассмотрим многозначное отображение

$$\Gamma(t,x)=\{v\in X;\ b_2(t,x)\le\langle v,\Phi(t,x)\rangle\le b_1(t,x)\},\quad t\in T,\ x\in X. \tag{5.2}$$

Согласно неравенству (5.1) значениями отображения $\Gamma(t,x)$ являются непустые замкнутые выпуклые множества.

Пусть $\operatorname{bd}\Gamma(t,x)$ и $\operatorname{int}\Gamma(t,x)$ — граница и внутренность множества $\Gamma(t,x)$.

Лемма 5.1. *Пусть* $\Gamma(t,x)$ — *отображение, определенное равенством* (5.2). *Тогда для любых* $t \in T$, $x, y \in X$, $v \notin \Gamma(t,y)$, $v \in \Gamma(t,x)$ *имеет место неравенство*

$$d(v,\Gamma(t,y)) \le (2\|\phi(t,x)-\phi(t,y)\|_*\|x_0\| + |b_1(t,x)-b_1(t,y)| + |b_2(t,x)-b_2(t,y)|)/d. \tag{5.3}$$

Аналогично для любых $t \in T$, $x, y \in X$, $v \notin \operatorname{bd}\Gamma(t,y)$, $v \in \operatorname{bd}\Gamma(t,x)$ *неравенство* (5.3) *справедливо для отображения* $\operatorname{bd}\Gamma(t,x)$.

Доказательство. Пусть $v \notin \Gamma(t,y)$. Тогда возможны два случая:
(а) $\langle v, \phi(t,y)\rangle > b_1(t,y)$,
(б) $\langle v, \phi(t,y)\rangle < b_2(t,y)$.

В случае (а) из утверждения 1.1 в [10] следует, что

$$d(v,\Gamma(t,y)) = \frac{\langle v, \phi(t,y)\rangle - b_1(t,y)}{\|\phi(t,y)\|_*}. \tag{5.4}$$

Так как $v \in \Gamma(t,x)$, имеем

$$b_1(t,x) - \langle v, \phi(t,x)\rangle \ge 0. \tag{5.5}$$

Воспользовавшись (5.1), (5.4), (5.5), приходим к неравенству

$$d(v,\Gamma(t,y)) = (\|\phi(t,x)-\phi(t,y)\|_*\|v\| + |b_1(t,x)-b_1(t,y)|)/d. \tag{5.6}$$

С помощью таких же рассуждений получаем, что и в случае (б) имеет место неравенство

$$d(v,\Gamma(t,y)) \le (\|\phi(t,x)-\phi(t,y)\|_*\|v\| + |b_2(t,x)-b_2(t,y)|)/d. \tag{5.7}$$

Теперь неравенство (5.3) вытекает из (5.6), (5.7).

Для отображения $\Gamma(t,x)$ неравенство (5.3) доказано.

Если $v \notin \operatorname{bd}\Gamma(t,y)$ и $v \in \operatorname{bd}\Gamma(t,x)$, то возможны два случая:
(а) $v \notin \Gamma(t,y)$,
(б) $v \in \operatorname{int}\Gamma(t,y)$.

Так как $v \in \operatorname{bd}\Gamma(t,x) \subset \Gamma(t,x)$, в случае (а) неравенство (5.3) для отображения $\operatorname{bd}\Gamma(t,y)$ уже доказано.

В случае (б) имеет место неравенство

$$b_2(t,y) < \langle v, \phi(t,y)\rangle < b_1(t,y). \tag{5.8}$$

Пусть

$$\Gamma_1(t,y) = \{w \in X;\ \langle w, \phi(t,y)\rangle = b_1(t,y)\},$$
$$\Gamma_2(t,y) = \{w \in X;\ \langle w, \phi(t,y)\rangle = b_2(t,y)\}.$$

Из (5.8) и утверждения 1.1 в [10] получаем

$$d(v,\Gamma_1(t,y)) = \frac{b_1(t,y) - \langle v, \phi(t,y)\rangle}{\|\phi(t,y)\|_*}, \tag{5.9}$$

$$d(v,\Gamma_2(t,y)) = \frac{\langle v, \phi(t,y)\rangle - b_2(t,y)}{\|\phi(t,y)\|_*}. \tag{5.10}$$

Так как $v \in \operatorname{bd}\Gamma(t,x)$, либо

$$\langle v, \phi(t,x)\rangle > -b_1(t,x) = 0, \tag{5.11}$$

либо

$$\langle v, \phi(t,x)\rangle > -b_2(t,x) = 0. \tag{5.12}$$

Теперь неравенство (5.3) для отображения $\operatorname{bd}\Gamma(t,y)$ непосредственно вытекает из (5.9)–(5.12). Лемма доказана.

Следствие 5.1. *Справедливо неравенство*

$$d(\Theta, \operatorname{bd}\Gamma(t,x)) \le |b_1(t,x)|/d. \tag{5.13}$$

Неравенство (5.13) непосредственно вытекает из формулы расстояния от точки до гиперплоскости (см., например, (5.9)).

Сделаем следующие предположения.

Гипотезы $H(\phi)$**.** (1) *Отображение* $t \to \phi(t,x)$ *измеримо,* $x \in X$;

(2) *имеет место неравенство*

$$\|\phi(t,x) - \phi(t,y)\|_* < k\|x-y\| \quad \text{п. в.}, \tag{5.14}$$

$x, y \in X$, $x \ne y$, $k > 0$.

Гипотезы $H(b)$**.** (1) *Отображения* $t \to b_i(t,x)$, $i = 1, 2$, *измеримы,* $x \in X$;
(2) *имеет место неравенство*

$$|b_i(t,x) - b_i(t,y)| < l(t)\|x-y\| \text{ п. в.}, \quad x, y \in X,\ x \ne y,\ i = 1, 2, \tag{5.15}$$

$l(t) > 0$, $l(\cdot) \in L^1(T, R^+)$;

(3) *имеет место неравенство*

$$|b_1(t,x)| < c(t) \text{ п. в.}, \quad x \in X,\ c(t) > 0,\ c(\cdot) \in L^1(T, R^+); \tag{5.16}$$

(4) *для любой функции* $x(\cdot) \in C(T,X)$ *функция* $t \to b_2(t, x(t))$ *суммируема.*

Теорема 5.1. *Пусть выполняются гипотезы* $H(\phi), H(b)$. *Тогда для отображения* $\Gamma(t,x)$ *справедливы следующие утверждения:*

(1) *для любой функции* $x(\cdot) \in C(T,X)$ *отображение* $t \to \Gamma(t, x(t))$ *измеримо;*

(2) *имеет место неравенство*

$$d(\Theta, \Gamma(t,x)) < c(t)/d \text{ п. в.}, \quad x \in X; \tag{5.17}$$

(3) *справедливо неравенство*

$$\operatorname{haus}_\rho(\Gamma(t,x), \Gamma(t,y)) < ((2k\rho + 2l(t))\|x-y\|)/d \quad \text{п. в.}, \tag{5.18}$$

$x, y \in X$, $x \ne y$, $\rho > 0$.

Утверждения (1)–(3) теоремы остаются справедливыми и для отображения $\operatorname{bd}\Gamma(t,x)$.

Доказательство. Пусть $x(\cdot) \in C(T,X)$. Покажем, что отображение $t \to \Gamma(t, x(t))$ измеримо. Из гипотез $H(\phi)$, $H(b)$ следует, что числовые функции $(t,w) \to \langle w, \phi(t, x(t))\rangle - b_i(t, x(t))$, $i = 1, 2$, измеримы по t и непрерывны по w. Тогда согласно теореме 6.4 из [6] многозначные отображения $t \to U_i(t)$, $i = 1, 2$,

$$U_1(t) = \{w \in X;\ \langle w, \phi(t, x(t, x(t)))\rangle - b_1(t, x(t)) \le 0\},$$

$$U_2(t) = \{w \in X;\ \langle w, \phi(t, x(t, x(t)))\rangle - b_2(t, x(t)) \ge 0\}$$

измеримы и, следовательно, в силу теоремы 3.5 из [6] графики $\operatorname{Gr} U_i(t)$, $i = 1, 2$, и отображение $t \to U_i(t)$, $i = 1, 2$, являются $\Sigma \otimes \mathscr{B}(X)$-измеримыми множествами. Тогда график отображения $t \to \Gamma(t, x(t)) = U_1(t) \cap U_2(t)$, $t \in T$, является $\Sigma \otimes \mathscr{B}(X)$-измеримым множеством. Воспользовавшись утверждением (iii) теоремы 3.5 из [6], получаем, что отображение $t \to \Gamma(t, x(t))$ измеримо.

Неравенство (5.17) вытекает из неравенств (5.13), (5.16).

Пусть $\rho \geq 0$. Если либо $\Gamma(t,x)\cap\rho\overline{B} = \varnothing$, либо $\Gamma(t,x)\cap\rho\overline{B} \neq \varnothing$ и $\Gamma(t,x)\cap\rho\overline{B} \subset \Gamma(t,y)$, то для полуотклонения $e(\Gamma_\rho(t,x),\Gamma(t,y)$ имеет место равенство

$$e(\Gamma_\rho(t,x),\Gamma(t,y)) = 0. \tag{5.19}$$

Если $v \in X$, $\|v\| \leq \rho$, $v \in \Gamma(t,x)$, $v \notin \Gamma(t,y)$, то из (5.3), (5.14), (5.15) вытекает

$$e(\Gamma_\rho(t,x),\Gamma(t,y)) < (2k\rho + 2l(t))\|x-y\|/d \text{ п. в.,} \quad x, y, \in X,\ x \neq y. \tag{5.20}$$

Учитывая (5.19), (5.20) и симметрию между x и y, придем к неравенству (5.18). Тем самым утверждения (1)–(3) теоремы доказаны для отображения $\Gamma(t,x)$.

Докажем эти утверждения для отображения $\operatorname{bd}\Gamma(t,x)$. Измеримость отображения $t \to \operatorname{bd}\Gamma(t,x(t))$ для любой функции $x(\cdot) \in C(T,X)$ следует из утверждения (1) для отображения $t \to \Gamma(t,x(t))$ и утверждения (iii) теоремы 4.6 из [6].

Неравенство (5.17) для отображения $\operatorname{bd}\Gamma(t,x)$ вытекает из неравенств (5.13), (5.16).

Неравенство (5.18) для отображения $\operatorname{bd}\Gamma(t,x)$ доказывается по аналогии с доказательством этого неравенства для отображения $\Gamma(t,x)$ с использованием неравенства (5.3), справедливого для отображения $\operatorname{bd}\Gamma(t,x)$. Теорема доказана.

Пусть

$$F(t,x) = \operatorname{bd}\Gamma(t,x), \quad t \in T,\ x \in X, \tag{5.21}$$

где отображение $\Gamma(t,x)$ определено равенством (5.2). Тогда $\overline{\operatorname{co}}F(t,x) = \Gamma(t,x)$.

Обозначим через $\mathscr{R}_F(x_0)$ и $\mathscr{R}_{\overline{\operatorname{co}}F}(x_0)$ множества решений включений (1.1) и (1.2), определенных на T, с отображением $F(t,x)$ (5.21).

Теорема 5.2. *Пусть выполняются гипотезы $H(\phi), H(b)$. Тогда множество $\mathscr{R}_{\overline{\operatorname{co}}F}(x_0)$ непусто, и если пространство X рефлексивно, то любое решение $x_*(\cdot) \in \mathscr{R}_{\overline{\operatorname{co}}F}(x_0)$ строгое.*

Доказательство. Непустота $\mathscr{R}_{\overline{\operatorname{co}}F}(x)$ вытекает из следствия 3.1 и утверждений (1)–(3) теоремы 5.1 для отображения $\Gamma(t,x)$, если положить $\rho_0(t) = c(t)/d$, $\beta = 2k/d$, $m(t) = 2l(t)/d$.

Пусть X рефлексивно, $x_*(\cdot) \in \mathscr{R}_{\overline{\operatorname{co}}F}(x_0)$ и

$$\Gamma_1(t,x_*(t)) = \{w \in X;\ \langle w, \phi(t,x_*(t))\rangle = b_1(t,x_*(t))\}, \tag{5.22}$$

$$\Gamma_2(t,x_*(t)) = \{w \in X;\ \langle w, \phi(t,x_*(t))\rangle = b_2(t,x_*(t))\}. \tag{5.23}$$

Если $\dot{x}_*(t) \in \operatorname{int}\Gamma(t,x_*(t))$, то

$$b_2(t,x_*(t)) < \langle \dot{x}_*(t), \phi(t,x_*(t))\rangle < b_1(t,x_*(t)). \tag{5.24}$$

Так как пространство X рефлексивно, существует точка $v_1 \in \Gamma_1(t,x_*(t))$ такая, что

$$\|\dot{x}_*(t) - v_1\| = d(\dot{x}_*(t), \Gamma_1(t,x_*(t))) = \frac{b_1(t,x_*(t)) - \langle \dot{x}_*(t), \phi(t,x_*(t))\rangle}{\|\phi(t,x_*(t))\|_*}. \tag{5.25}$$

Пусть $v_2 = \lambda\dot{x}_*(t) + (1-\lambda)v_1$, $\lambda \geq 1$, — точка, лежащая на отрезке, проходящем через точки $\dot{x}_*(t)$ и v_1 с

$$\lambda = \frac{b_1(t,x_*(t)) - b_2(t,x_*(t))}{b_1(t,x_*(t)) - \langle \dot{x}_*(t), \phi(t,x_*(t))\rangle}.$$

Из (5.24) вытекает, что $\lambda > 1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $v_2 \in \Gamma_2(t, x_*(t))$ и

$$\|v_1 - v_2\| = \frac{b_1(t, x_*(t)) - b_2(t, x_*(t))}{\|\phi(t, x_*(t))\|_*}. \tag{5.26}$$

Таким образом, точка $\dot{x}_*(t)$ лежит на отрезке с концами $v_1, v_2 \in \operatorname{bd}\Gamma(t, x_*(t))$ и длиной, определенной равенством (5.26). Поэтому

$$\dot{x}_*(t) \in \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{bd}\Gamma(t, x_*(t)) \cap (\dot{x}_*(t) + 2\|v_1 - v_2\|\overline{B})). \tag{5.27}$$

Воспользовавшись (5.27), (5.26), (5.1), (5.16) и гипотезой $H(b)(4)$, получаем, что функция

$$\alpha(t) = \|\dot{x}_*(t)\| + 2(c(t) + |b_2(t, x_*(t))|)/d$$

суммируема и

$$\dot{x}_*(t) \in \overline{\operatorname{co}}(F(t, \dot{x}_*(t)) \cap \alpha(t)\overline{B}), \quad t \in T.$$

Тем самым решение $x_*(t) \in \mathscr{R}_{\overline{\operatorname{co}}F}(x_0)$ строгое. Теорема доказана.

Теорема 5.3. *Пусть выполняются гипотезы $H(\phi)$, $H(b)$ и пространство X рефлексивно. Тогда множество $\mathscr{R}_F(x)$ непусто и для любого решения $x_*(t) \in \mathscr{R}_{\overline{\operatorname{co}}F}(x_0)$ существует последовательность $x_n(\cdot) \in \mathscr{R}_F(x_0)$, $n \geq 1$, сходящаяся к $x_*(\cdot)$ в пространстве $C(T, X)$.*

Доказательство. Из утверждений (1)–(3) теоремы 5.1, справедливых для отображения $F(t, x)$, определенного равенством (5.21), следует, что выполняются все гипотезы $H_*(F)$ с функциями $\gamma(t) = c(t)/d$, $k_*(t) = 2l(t)/d$ и $\beta = 2k/d$.

Согласно теореме 5.2 каждое решение $x_*(\cdot) \in \mathscr{R}_{\overline{\operatorname{co}}F}(x_0)$ строгое. Теперь утверждение теоремы вытекает из теоремы 4.1.

Следствие 5.2. *В рамках предположений теоремы* 5.3 *имеет место равенство*

$$\overline{\mathscr{R}_{\overline{\operatorname{co}}F}(x_0)} = \overline{\mathscr{R}_F(x_0)},$$

где черта вверху означает замыкание в пространстве $C(T, X)$.

В [11, теоремы 39.1, 40.1] рассматривались вопросы существования и релаксации решений дифференциальных включений в банаховом пространстве. Предположения в теореме существования 39.1 в определенном смысле похожи на предположения в нашем следствии 3.2. Однако доказательства как теоремы 39.1, так и теоремы 40.1 некорректны. Они используют неверно доказанное предложение 15.2 (см. неверное равенство в доказательстве в [11, с. 193, 7 строка сверху]) об измеримости пересечения измеримых многозначных отображений с незамкнутыми значениями. Для случая, когда областью определения многозначных отображений является абстрактное измеримое пространство, соответствующий контрпример приведен в [12, пример 1.42].

В рамках корректных предположений утверждение теоремы 39.1 из [11] вытекает из следствия 3.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1967. Т. 3. С. 16–26.
2. *Леваков А. А.* Некоторые свойства решений дифференциальных включений в банаховом пространстве // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физика, математика, механика. 1982. Т. 1. С. 45–48.

3. *Loewen P. D., Rockafellar R. T.* Optimal control of unbounded differential inclusions // SIAM J. Control Optim. 1994. V. 32, N 2. P. 442–470.
4. *Ioffe A.* Existence and relaxation theorems for unbounded differential inclusions // J. Convex Anal. 2006. V. 13, N 2. P. 353–362.
5. *Tolstonogov A. A.* Differential inclusions with unbounded right-hand side: existence and relaxation theorems // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 291, N 1. P. 190–207.
6. *Himmelberg C. J.* Measurable relations // Fund. Math. 1975. V. 87. P. 53–72.
7. *Attouch H., Wets RJ. B.* Quantitative stability of variational systems. I. The epigraphical distance // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 328, N 2. P. 695–729.
8. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Leyden, The Netherlands: Noordhoff Intern. Publ., 1976.
9. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values. Relaxation theorems // Set-valued Anal. 1996. V. 87, N 4. P. 237–269.
10. *Berghaller C., Zinger I.* The distance to a polyhedron // Linear Algebra Appl. 1992. V. 169. P. 111–129.
11. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М.: Физматлит, 2014.
12. *Hu Sh., Papageorgiou N.* Handbook of multivalued analysis. V. I: Theory. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1997.

Статья поступила 2 февраля 2016 г., окончательный вариант — 1 декабря 2016 г.

Толстоногов Александр Александрович
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
aatol@icc.ru